التوجيهي العلمي

المنهاج الجديد

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

القطوع المخروطية

إعداد

الأستاذ محمد صالح

د.محمود سليم الكسجي

الأستاذ عمر الجبر

القطوع المخروطية : هي أشكال هندسية

تنتج عن قطع مستوى (سكين) لمخروط دائري قائم مزدوج بأوضاع مختلفة وهي :-

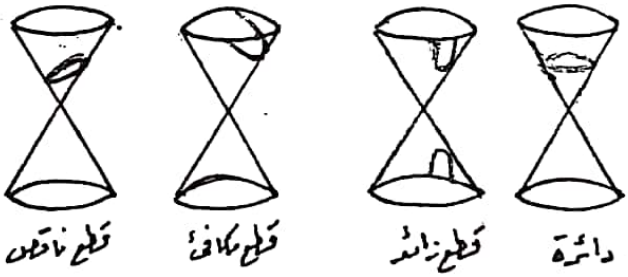
دائرة ، قطع مكافئ ، قطع ناقص ، قطع زائد

① إذا كان المستوى عمودي على المحور ولا يمر بالرأس فإن الشكل الناتج هو دائرة

② إذا كان المستوى يقطع فرعي المخروط ولا يمر بالرأس فإن الشكل الناتج هو قطع زائد

③ إذا كان المستوى موازيًا لمستقيم على سطح المخروط ويقطع فرعًا واحدًا فإن الشكل الناتج هو قطع مكافئ

④ إذا كان المستوى ماسًا على المحور ويقطع فرعًا واحدًا فإن الشكل الناتج هو قطع ناقص



* مراجعة لقوانين هامة :

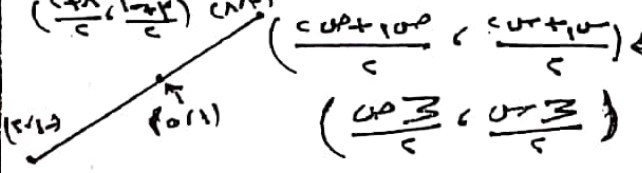
① المسافة بين نقطتين $(س_1 ، ص_1)$ ، $(س_2 ، ص_2)$

$$ف = \sqrt{(\text{فرق السينات})^2 + (\text{فرق الصادات})^2}$$

$$= \sqrt{(س_1 - س_2)^2 + (ص_1 - ص_2)^2}$$

② احداثيات منتصف قطعة مستقيمة :

$$\left(\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$



$$\left(\frac{\text{مجـ} س}{ن} ، \frac{\text{مجـ} ص}{ن} \right)$$

③ بُعد نقطة عن مستقيم :

النقطة $(س_1 ، ص_1)$ والمستقيم $أ س + ب ص + جـ = ٠$

$$ع = \frac{|أ س_1 + ب ص_1 + جـ|}{\sqrt{أ^2 + ب^2}}$$

لاحظ معادلة المستقيم بالشكل القياسي

مثال : ما بُعد النقطة $(-١ ، ٢)$ عن المستقيم $٣ص + ٥ = ٤س$

الحل : نجهز معادلة المستقيم بالشكل القياسي $٤س - ٣ص - ٥ = ٠$

$$ع = \frac{|٤(-١) - ٣(٢) - ١٥|}{\sqrt{٤^2 + (-٣)^2}} = \frac{|-١٥|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{١٥}{٥} = ٣$$

④ العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه

⑤ نصف القطر عمودي على المماس عند نقطة التماس

أولًا : الدائرة : هي المحل الهندسي لنقطة متحركة و $(س ، ص)$ بحيث بُعدها عن نقطة ثابتة (المركز) يساوي مقدار ثابت (نصف القطر)

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها $(ك ، هـ)$ ونصف قطرها $ر$ هي :

$$(س - ك)^2 + (ص - هـ)^2 = ر^2$$

ومن فك المعادلة القياسية للدائرة نحصل

$$س^2 - ٢ك س + ك^2 + ص^2 - ٢هـ ص + هـ^2 = ر^2$$

المعادلة العامة

$$س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + جـ = صفر$$

ويكون المركز هنا $\left(-\frac{أ}{٢} ، -\frac{ب}{٢} \right)$ $\Leftarrow$ لأن $-٢ك = أ$ ، $-٢هـ = ب$

$\left(-\frac{١}{٢} \text{ معامل } س ، -\frac{١}{٢} \text{ معامل } ص \right)$

ويكون نصف القطر $ر = \sqrt{\left(-\frac{أ}{٢}\right)^2 + \left(-\frac{ب}{٢}\right)^2 - جـ}$

لاحظ أن المعادلة العامة :

* لا تحتوي الحد $س ص$
* تحتوي $س^2$ ، $ص^2$
* معامل $س^2$ = معامل $ص^2$ = ١

Scanned with CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

× إيجاد المركز ونصف القطر إذا علمت المعادلة :
يجب أن تكون المعادلة جاهزة بحيث يكون معامل
$س^2 = 1$ ، $ص^2 = 1$

أمثلة : في المعادلة ذات الصورة القياسية وذات الصورة العامة جد مركز ونصف قطر كل من الدوائر التالية :

① $(س+3)^2 + (ص-5)^2 = 16$ جاهزة ومرتبة
المركز $(-3، 5)$ ، $ر^2 = 16 \leftarrow ر = 4$

② $(ص-1)^2 + (س+7)^2 = 10$ جاهزة وغير مرتبة
المركز $(-7، 1)$ انتبه للترتيب
$ر^2 = 10 \leftarrow ر = \sqrt{10}$

③ $(2س-7)^2 + (2ص+10)^2 = 36$ غير جاهزة ومرتبة
$4(س-\frac{7}{2})^2 + 4(ص+5)^2 = 36$ مهم
$(س-3{,}5)^2 + (ص+5)^2 = 9$
المركز $(3{,}5، -5)$ ، $ر^2 = 9 \leftarrow ر = 3$

④ $س^2 + ص^2 + 8س - 12ص + 27 = 0$
الحل : المعادلة جاهزة ومرتبة
$\left.\begin{matrix} ب = -12 \leftarrow -\frac{ب}{2} = 6 \\ أ = 8 \leftarrow -\frac{أ}{2} = -4 \end{matrix}\right\}$ المركز $(-4، 6)$
$ر = \sqrt{أ^2 + ب^2 - 4جـ} = \sqrt{16 + 36 - 27} = \sqrt{25} = 5$

⑤ $2س^2 + 2ص^2 - 8س - \frac{9}{2} = 0$ غير جاهزة ومرتبة
الحل : نجهز المعادلة بالضرب في $\frac{1}{2}$
$س^2 + ص^2 - 4س - \frac{9}{4} = 0$
$\left.\begin{matrix} أ = -4 \leftarrow -\frac{أ}{2} = 2 \\ ب = 0 \leftarrow -\frac{ب}{2} = 0 \end{matrix}\right\}$ المركز $(2، 0)$
$ر = \sqrt{أ^2 + ب^2 - جـ} = \sqrt{16 + 0 - (-\frac{9}{4})} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

⑥ $2س^2 + 2ص^2 + 18ص - 12س - 9 = 0$ غير جاهزة وغير مرتبة
الجواب : $(2، -3)$ ، $ر = 4$

تمرين ⑦
$(2س+4)^2 + 4ص^2 - 8ص - 24 = 0$ غير جاهزة وغير مرتبة
الجواب $(-2، 1)$ ، $ر = 3$

⑧ دائرة معادلتها $س^2 + ص^2 - 8س + 10ص + م = 0$
ما قيمة الثابت م علماً بأن نصف قطرها 7
الحل : المعادلة جاهزة ومرتبة
$\left.\begin{matrix} أ = -8 \leftarrow -\frac{أ}{2} = 4 \\ ب = 10 \leftarrow -\frac{ب}{2} = -5 \end{matrix}\right\}$ المركز $(4، -5)$
$ر = \sqrt{16 + 25 - م} \leftarrow 7 = \sqrt{41 - م}$ (تربيع)
$49 = 41 - م$
$م = 41 - 49 = -8$

⑨ دائرة معادلتها $س^2 + ص^2 - 2س + م ص - 6 = 0$
جد الثابت م الذي يجعل المركز $(1، -3)$ جاهزة ومرتبة
الحل : المركز $(1، -\frac{م}{2}) = (1، -3)$
$\because -\frac{م}{2} = -3 \leftarrow م = 6$

تمرين محلول : إذا كان نصف القطر للدائرة التي معادلتها $س^2 + ص^2 - 2ل س + 6ص - 7 = 0$ هو (6)
جد : ① قيمة ل ② مركز الدائرة الذي يقع في الربع الرابع
الحل : المعادلة جاهزة ومرتبة
$\left.\begin{matrix} أ = -2ل \leftarrow -\frac{أ}{2} = ل \\ ب = 6 \leftarrow -\frac{ب}{2} = -3 \end{matrix}\right\}$ المركز $(ل، -3)$
① $ر = \sqrt{ل^2 + 9 + 7} = 6 \leftarrow ل^2 + 16 = 36$
$ل^2 = 20 \leftarrow ل = \pm\sqrt{20}$
② المركز $(\sqrt{20}، -3)$

تمرين محلول : جد قيم الثابت جـ التي تجعل المعادلة $س^2 + ص^2 + 8س - 4ص + جـ = 0$ معادلة لدائرة
الحل : م $(-4، 2)$ $ر = \sqrt{16 + 4 - جـ} > 0$
$\leftarrow جـ < 20$ $\because جـ \in (-\infty، 20)$

أولاً معادلة الدائرة بمعلومية المركز ، ونصف القطر وبالتعويض بالصورة القياسية
أمثلة :
① ما معادلة الدائرة التي مركزها $(-3، 2)$ ونصف قطرها 4
الحل : $(س+3)^2 + (ص-2)^2 = 16$

(تدريب ②) ما معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل وقطرها 10 $س^2 + ص^2 = 25$

③ ما معادلة الدائرة التي مركزها $(2، -3)$ وتمر بنقطة $(5، 1)$ ؟ الحل : نجد ر حيث
$ر = \sqrt{(5-2)^2 + (1+3)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
$\because$ المعادلة $(س-2)^2 + (ص+3)^2 = 25$

Scanned with CamScanner

حل آخر : النقطة (١،٥) تحقق المعادلة

$(س-٢)^٢+(ص+٣)^٢=ر^٢$

$\Leftarrow (٥-٢)^٢+(١+٣)^٢=ر^٢ \Leftarrow ٩+١٦=ر^٢ \Leftarrow ر^٢=٢٥$

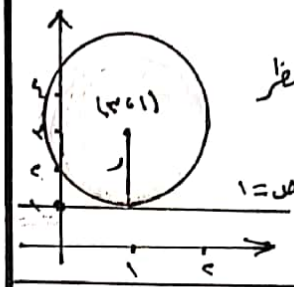
$(س-٢)^٢+(ص+٣)^٢=٢٥$

٣ ما معادلة الدائرة التي مركزها (٣،١) وتمس المستقيم ص = ١

الحل : نرسم ونجد ر بالعد والنظر

$\therefore ر=٢$

$(س-١)^٢+(ص-٣)^٢=٤$

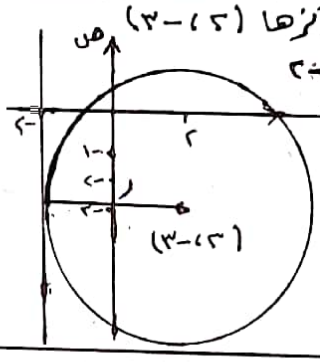


٤ ما معادلة الدائرة التي مركزها (٢، -٣) وتمس المستقيم س = ٣

الحل : نرسم ونجد س بالعد والنظر

ر = ٤ (بالعد والنظر)

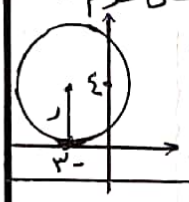
$(س-٢)^٢+(ص+٣)^٢=١٦$



٥ ما معادلة دائرة مركزها (-٣،٤) وتمس محور السينات

الحل : من الرسم ر = ٤ (بالعد والنظر)

$(س+٣)^٢+(ص-٤)^٢=١٦$



تدريب ٢ : ما معادلة دائرة مركزها (٤،٣) وتمس المستقيم المار بالنقطتين (٠،٠)، (٤،١)

٦ ما معادلة دائرة مركزها (-١،٢) وتمس المستقيم ٣س + ٤ص = -١٠

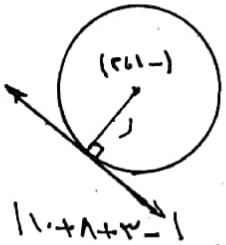
الحل : نجد ر = بعد نقطة (المركز) عن مستقيم (بجهاز المعادلة)

٣س + ٤ص + ١٠ = ٠

$ر=\frac{|٣س+٤ص+١٠|}{\sqrt{٩+١٦}} \Leftarrow ر=\frac{|-٣+٨+١٠|}{\sqrt{٢٥}}$

$\therefore ر=\frac{١٥}{٥}=٣$

$(س+١)^٢+(ص-٢)^٢=٩$



لاحظ كلما تمس مستقيم يستفاد منها انه نجد ر بعد النظر والعد او بالقانون عندما يكون المستقيم مائل

٧ ما معادلة الدائرة التي طرفي قطرها (نهايتي قطرها) النقطتين (-٢،٩)، (٤،٥)

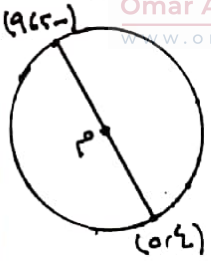
الحل : المركز يقع في المنتصف

$م \Leftarrow (\frac{-٢+٤}{٢}, \frac{٩+٥}{٢})$

$\Leftarrow (١، ٧)$

$ر=\sqrt{(-٢-١)^٢+(٩-٧)^٢} \Leftarrow ر=\sqrt{٩+٤}=\sqrt{١٣}$

$(س-١)^٢+(ص-٧)^٢=١٣$



٨ معتمداً على الشكل المجاور الذي فيه دائرة مركزها نقطة الأصل والمثلث أ ب جـ متساوي الأضلاع طول ضلعه (٦) سم ، الضلع ب جـ مماس للدائرة فجد معادلة الدائرة

الحل : نحدد ر على الشكل ونجد (ل) من المعادلة

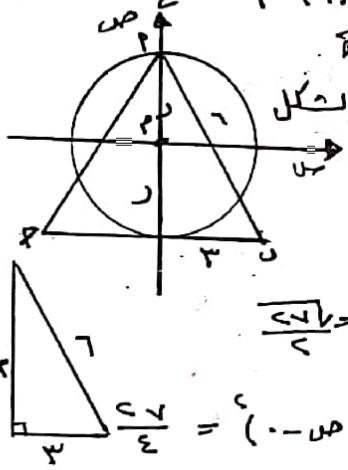
$(٢ل)^٢=٦^٢-٣^٢$

$٤ل^٢=٢٧$

$ل^٢=\frac{٢٧}{٤} \leftarrow ر=\frac{\sqrt{٢٧}}{٢}$

المعادلة :

$(س-٠)^٢+(ص-٠)^٢=\frac{٢٧}{٤}$



٩ معتمداً الشكل المجاور الذي فيه دائرة مركزها (٠،٠) والمستطيل أ ب جـ د حيث

أ ب = ٥ سم ، ب جـ = ٤ سم

فجد معادلة الدائرة

الحل : نحدد ر على الرسم مرتين

نحتاج معادلتين لوجود مجهولين

$ر^٢=ل^٢+٤$ ---①

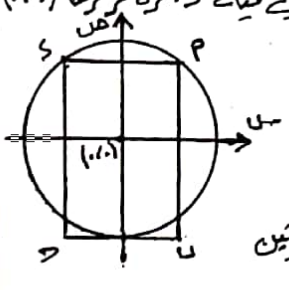
$ل+ر=٥$ ---②

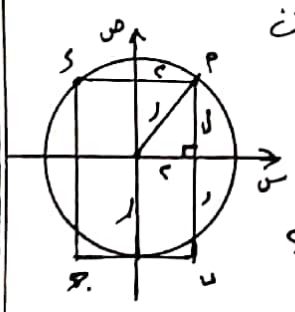
من ②

بحل المعادلتين نجد $ر=\frac{٢٩}{١٠}$

∴ المعادلة

$(س-٠)^٢+(ص-٠)^٢=(\frac{٢٩}{١٠})^٢$





Omar Aljabr عمر الجبر www.omaraljabr.com

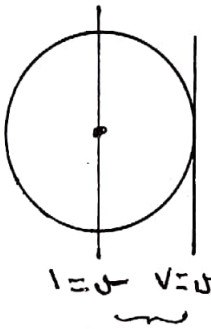
Scanned with CamScanner

ثانياً: معادلة الدائرة و المركز مجهول كاملاً او جزء منه (رمز واحد) يكون بدلالة (ر)

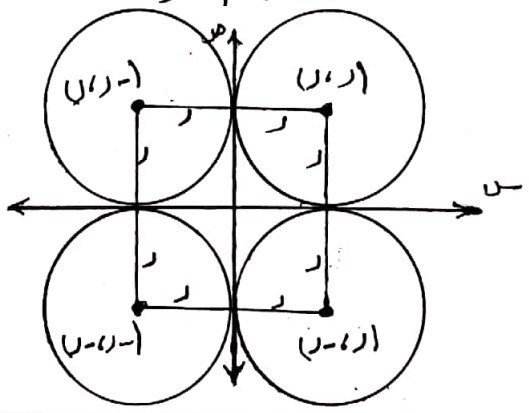
★ اذا كان لدينا دائرة تمس المحورين او مستقيمان متعامدان

في هذه الحالة نحتاج الرسم ويمكن الخيال

تعلم: اذا كان لدينا مستقيمان متوازيان يحصران دائرة فانها تمثل ٢ر و ½ المركز كما يلي

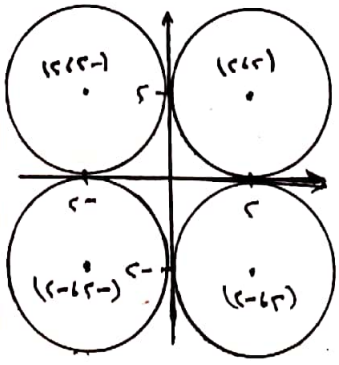


انتبه عندما تمس الدائرة المحورين او مستقيمين متعامدين عندها يمكن ٤ حالات ويكون المركز بدلالة ر كما يلي



[١] ما معادلة دائرة تمس المحورين وتقطع قطرها ٤

الحل: نرسم الشكل



المعادلات

$(س-٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

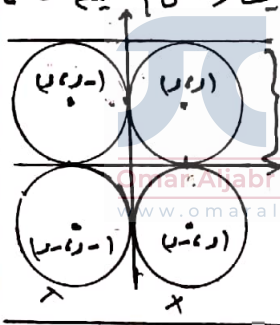
$(س+٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

$(س+٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = ٤$

$(س-٢)^٢ + (ص+٢)^٢ = ٤$

[٢] ما معادلة دائرة تمس المحورين وتمس المستقيم ص = ٤

الحل: نرسم الشكل



لاحظ تم حذف دائرتين

المركز الاول (٢ ، ٢)

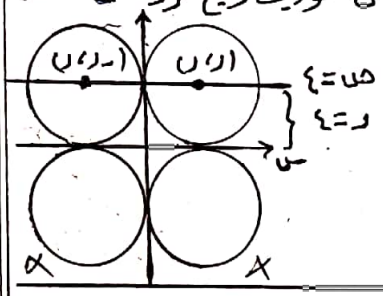
$(س-٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

المركز الثاني (-٢ ، ٢)

$(س+٢)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٤$

[٣] ما معادلة دائرة تمس المحورين ويقع مركزها على ص = ٤

الحل: نرسم الشكل



مركز الاولى (٤ ، ٤)

$(س-٤)^٢ + (ص-٤)^٢ = ١٦$

مركز الثانية (-٤ ، ٤)

$(س+٤)^٢ + (ص-٤)^٢ = ١٦$

تدريب ٤:

ما معادلة دائرة تمس المحورين ويقع مركزها على س = -٣

[٤] ما معادلة دائرة تمس المحورين ومر بالنقطة (٢ ، ١)

الحل: لاحظ (٢ ، ١) تقع في الربع الاول (شكراً)

لذلك يمكن الحل بدون رسم لان المركز (ر ، ر)

$(س-ر)^٢ + (ص-ر)^٢ = ر^٢$

النقطة (٢ ، ١) تحقق المعادلة لذلك مشكوه مرتين

$(١-ر)^٢ + (٢-ر)^٢ = ر^٢$

$١ - ٢ر + ر^٢ + ٤ - ٤ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ٦ر + ٥ = ٠$

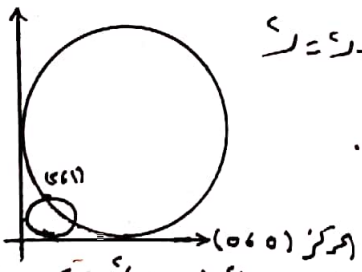
$(ر - ١)(ر - ٥) = ٠$

ر = ١ ⇐ المركز (١ ، ١)

$(س-١)^٢ + (ص-١)^٢ = ١$

ر = ٥ ⇐ المركز (٥ ، ٥)

$(س-٥)^٢ + (ص-٥)^٢ = ٢٥$



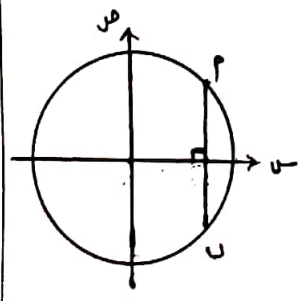
تدريب ٥:

ما معادلة دائرة تمس المحورين ومر بالنقطة (-٨ ، ٨)

تدريب ٦:

معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل الدائرة $س^٢ + ص^٢ = ٢٥$

حدد طول الوتر $\overline{AB}$ والمار بالنقطة (٤ ، ٠)



الجواب ٦

Scanned with CamScanner

⑤ ما معادلة الدائرة التي تقع في الربع الأول وتمس المحورين وتمس المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢

المركز (ر، ر)

$(س - ر)^2 + (ص - ر)^2 = ر^2$

نحتاج لبُعد نقطة عن المستقيم

$ر = \frac{|٣س + ٤ص - ١٢|}{\sqrt{٩ + ١٦}}$ ← $\frac{|٣ر + ٤ر - ١٢|}{٢٥}$

$٥ر = |٧ر - ١٢|$

$٥ر = ٧ر - ١٢$ ← $-٢ر = -١٢$ ← $ر = ٦$

$٥ر = ١٢ - ٧ر$ ← $١٢ر = ١٢$ ← $ر = ١$

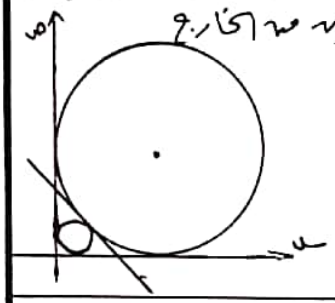
المركز في الحالة الأولى (٦، ٦)

∴ المعادلة $(س - ٦)^2 + (ص - ٦)^2 = ٣٦$

المركز في الحالة الثانية (١، ١)

∴ المعادلة $(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = ١$

لاحظ الدائرة الثانية تكون من الخارج



في الربع الأول ← المركز (ر، ر) يحقق المستقيم

$٣ر + ٤ر = ١٤$ ← $٧ر = ١٤$ ← $ر = ٢$

المركز (٢، ٢) ← $(س - ٢)^2 + (ص - ٢)^2 = ٤$

في الربع الثاني ← المركز (-ر، ر) يحقق المستقيم

$-٣ر + ٤ر = ١٤$ ← $ر = ١٤$

المركز (-١٤، ١٤) ← $(س + ١٤)^2 + (ص - ١٤)^2 = ١٩٦$

في الربع الثالث ← المركز (-ر، -ر) يحقق المستقيم

$-٣ر + -٤ر = ١٤$ ← $-٧ر = ١٤$ ← $ر = -٢$ ✗ مستحيل

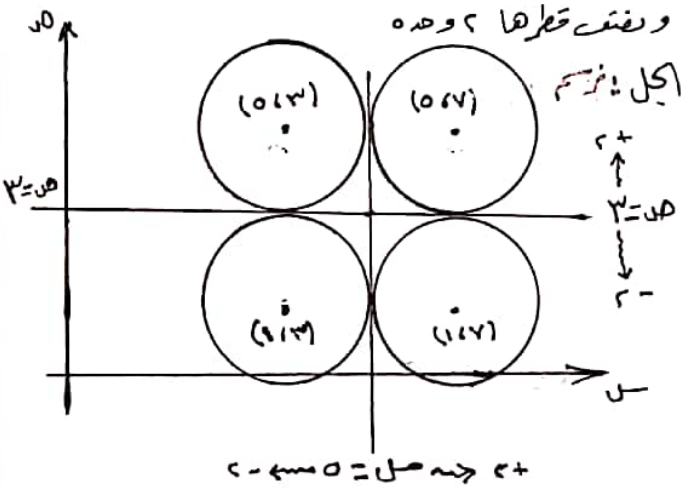
في الربع الرابع ← المركز (ر، -ر) يحقق المستقيم

$٣ر + -٤ر = ١٤$ ← $-ر = ١٤$ ← $ر = -١٤$ مستحيل

** دائرة تمس مستقيمان متعامدان (كما في المحورين)

[1] ما معادلة دائرة تمس المستقيمين س = ٥، ص = ٣ ونصف قطرها ٢ وحدة

الحل: نرسم



+٢ ⇐ ص = ٥ ± ٢ ⇒ -٢

المعادلات ← $(س - ٧)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤$

$(س - ٣)^2 + (ص - ٥)^2 = ٤$

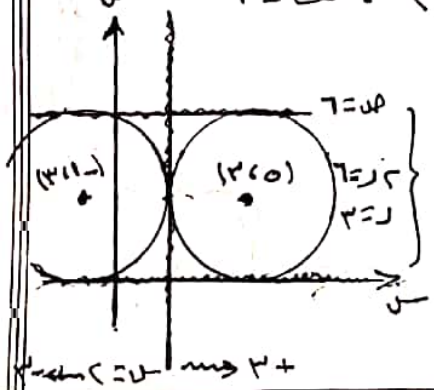
$(س - ٣)^2 + (ص - ١)^2 = ٤$

$(س - ٧)^2 + (ص - ١)^2 = ٤$

ملاحظة: يجوز الحل بدون رسم المحورين

[2] ما معادلة دائرة تمس محور السينات وتمس المستقيمين س = ٢، ص = ٦

الحل: نرسم



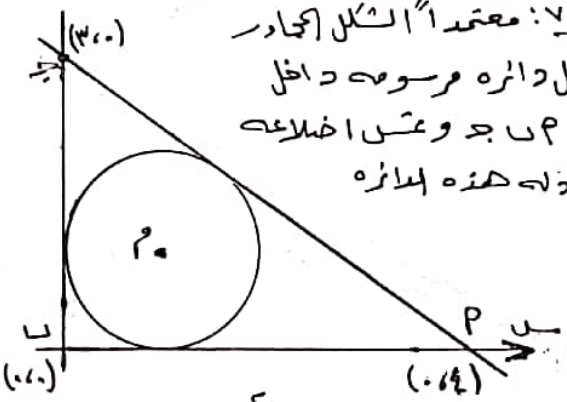
بعد المركز الأول (٣، ٥) عن المستقيم ر = ٣

$(س - ٥)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

المركز الثاني (-١، ٣)

$(س + ١)^2 + (ص - ٣)^2 = ٩$

تدريب ٧: معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل دائرة مرسومة داخل المثلث أ ب جـ وتمس أضلاعه جد معادلة هذه الدائرة



الجواب $(س - ١)^2 + (ص - ١)^2 = ١$

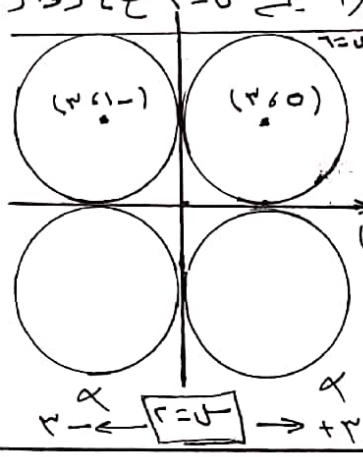
[6] ما معادلة دائرة تمس المحورين ويقع مركزها على المستقيم ٣س + ٤ص = ١٢

الحل: نجرب (٤) حالات حيث نهمل الحالة التي يكون فيها قيمة ر سالبة ولا داعي للرسم

Scanned with CamScanner

حل آخر: نرسم مستقيماته معادلاته أولاً مع ٤ دوائر ثم نختار ما يمس المستقيم الثالث

* نرسم محور الصادات والمستقيم س = ٢ مع ٤ دوائر



* نرسم ص = ٦

المعادلات

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

$(س + ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ٩$

تدريب ٨: أوجد معادلة دائرة تمس المستقيمات

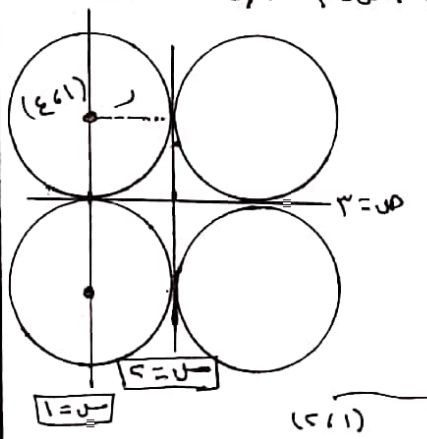
س = ١ ، س = ٧ ، ص = ٢

٣ أوجد معادلة دائرة يقع مركزها على المستقيم س = ١ وتمس المستقيمين س = ٢ ، ص = ٣

الحل * نرسم س = ٢ ، ص = ٣ لأنهما المماسان مع ٤ دوائر

* نرسم س = ١ حيث يقع عليه المركز لاحظ أن ر = ١ سم

∴ المركز (١ ، ١ ± ٣)



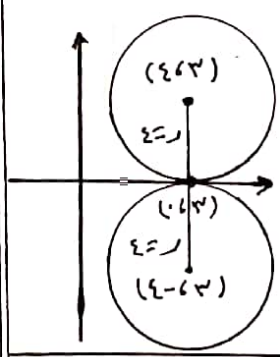
$(س - ١)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١$

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ = ١$

تدريب ٩: أوجد معادلة دائرة تمس محور السينات وتمس المستقيم س = -١ وتمر بالنقطة (٢، ٠) ونصف قطرها أكبر من وحدتين

٥ أوجد معادلة دائرة تمس محور السينات في النقطة (٣، ٠) ونصف قطرها ٤

الحل: الرسم (يوجد حالتين)

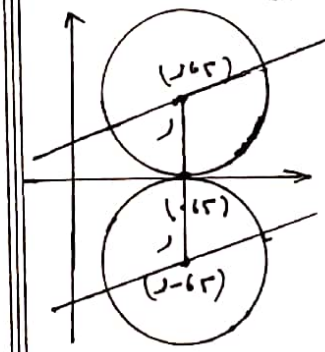


$(س - ٣)^٢ + (ص - ٤)^٢ = ١٦$

$(س - ٣)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ١٦$

٦ أوجد معادلة دائرة تمس محور السينات في النقطة (٢، ٠) ويقع مركزها على المستقيم ص = ٣س + ١

الحل: نرسم حالتين والمستقيم يختار فقط واحدة منهم



(٢، ر) تحقق معادلة المستقيم

$ر = ٦ + ١ \Leftarrow$ **ر = ٧**

∴ المركز (٢، ٧) ، $(س - ٢)^٢ + (ص - ٧)^٢ = ٤٩$

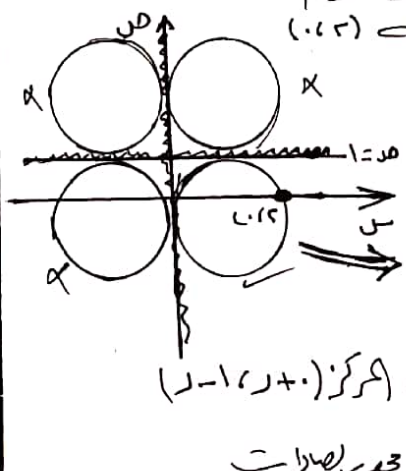
(٢، -ر) يحقق معادلة المستقيم ص = ٣س + ١

$-ر = ٦ + ١ \Leftarrow$ ر = -٧ تحل أو نقرر منها لرسم

تدريب ١٠: أوجد معادلة تمس محور السينات في النقطة (٧، ٠) وتمر بالنقطة (٤، ١)

$(س - ٧)^٢ + (ص - ١٠)^٢ = ١٠٠$

٤ خطير أوجد معادلة تمس محور الصادات وتمس المستقيم ص = ١ وتمر بالنقطة (٢، ٠)



المركز (٠ + ر ، ١ - ر)

الحل: محور الصادات س = ٠

المركز (ر ، ١ - ر)

$(س - ر)^٢ + (ص - ١ + ر)^٢ = ر^٢$

(٢، ٠) تحقق المعادلة

$(٢ - ر)^٢ + (٠ - ١ + ر)^٢ = ر^٢$

$٤ - ٤ر + ر^٢ + ١ - ٢ر + ر^٢ = ر^٢$

$ر^٢ - ٦ر + ٥ = ٠$

$(ر - ١)(ر - ٥) = ٠$

ر = ١ ⟵ المركز الأول (١، ٠) ، $(س - ١)^٢ + (ص - ٠)^٢ = ١$

ر = ٥ ⟵ المركز الثاني (٥، -٤) ، $(س - ٥)^٢ + (ص + ٤)^٢ = ٢٥$

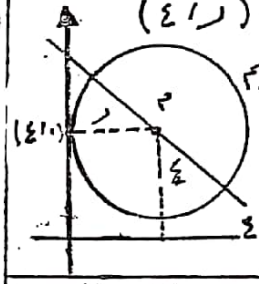
Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

⑦ ما معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات في النقطة (٠، ٤) ويقع مركزها على المستقيم ص = ٦ − س .

الحل : م (ر ، ٤)



(ر ، ٤) تحقق معادلة المستقيم

٤ = ٦ − ر ← ر = ٢

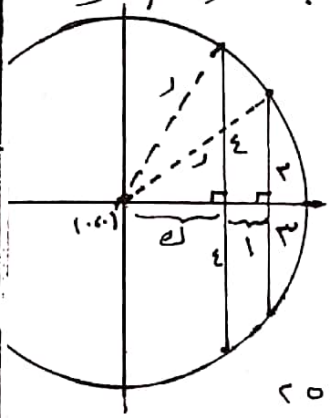
∴ م (٤ ، ٢) ، ر = ٢

المعادلة : $(س - ٢)^2 + (ص - ٤)^2 = ٤$

ومركز الدائرة الثاني (٠ ، ٤)

تدريب ① ما معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند (٠، ٥) ويقع مركزها على المستقيم س = ٣

⑧ معتمداً الشكل المجاور الذي يمثل دائرة مركزها (٠،٠) وطولها ٦ وحدات، ٨ وحدات وترا لها متوازيا لها اطوالها ٦ وحدات، ٨ وحدات وبعدها عن المركز بمقدار (١) وحدة جد معادلة الدائرة



الحل : نرسم ر مرتين

ونكون معادلتين

$ر^2 = ١٦ + ك^2$ ... ①

$ر^2 = ٩ + (ك + ١)^2$ ... ②

نحل المعادلتين

$ر^2 = ٢٥$ ← ر = ٥

المعادلة

$(س - ٠)^2 + (ص - ٠)^2 = ٢٥$

* أسئلة تعتمد على الصورة العامة لمعادلة الدائرة حيث يتم الحصول على الصورة العامة من خلال المعادلة القياسية للدائرة

$(س + ا)^2 + (ص + ب)^2 = ر^2$ حيث تكتب

المعادلة كما يلي :-

$س^2 + ص^2 + ا س + ب ص + جـ = ٠$

أمثلة :

① ما معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠،١) (٧،٠) ، (٥،-٣)

الحل : المعادلة العامة :-

$س^2 + ص^2 + ا س + ب ص + جـ = ٠$

(٠،١) ← ١ + ٠ + ٠ + ب + جـ = ٠ ← ب + جـ = −١ ... ①

(٧،٠) ← ٤٩ + ٠ + ٧ ا + ٠ + جـ = ٠ ← ٧ ا + جـ = −٤٩ ... ②

(٥،-٣) ← ٢٥ + ٩ + ٥ ا − ٣ ب + جـ = ٠

٥ ا − ٣ ب + جـ = −٣٤ ... ③

من ① ، ② ← ٧ ا − ب = −٤٨

من ② ، ③ ← ٥ ا − ٣ ب + جـ = −٣٤

٧ ا − ب = −٤٨

٥ ا − ٣ ب + جـ = −٣٤

$ا = -\frac{٨}{٢}$ ← ٢ ا = −٨

ا = −٨ ← ب = ٧ − ٨ = −١

التعويض في ③

٥ ا − ٣ ب + جـ = −٣٤ ← جـ = −٣٤ + ٣ ب − ٥ ا = −٣٤ − ٣ − ٤٠ = −٧

المعادلة :

$س^2 + ص^2 - ٨ س + \frac{٢}{٦} ص + ٧ = ٠$

② ما معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠،٠) ، (٠،٤) ، (-٢،٠)

الجواب :

$س^2 + ص^2 - ٢ س + ٤ ص = ٠$

تدريب : ما معادلة الدائرة التي تمر برؤوس المثلث (٠،٠) ، (٠،٣) ، (٤،٠)

③ ما معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (-٤،١) (٠،-٣) ويقع مركزها على المستقيم س − ٢ ص = ١

الحل : $س^2 + ص^2 + ا س + ب ص + جـ = ٠$

(-٤،١) ← ١٦ + ١ − ٤ ا + ب + جـ = ٠

−٤ ا + ب + جـ = −١٧ ... ①

(٠،-٣) ← ٩ + ٠ − ٣ ب + جـ = ٠ ← −٣ ب + جـ = −٩ ... ②

المركز $(-\frac{ا}{٢}، -\frac{ب}{٢})$ يقع على المستقيم س − ٢ ص = ١

$-\frac{ا}{٢} - ٢(-\frac{ب}{٢}) = ١$ ... ③ ← −ا + ٢ ب = ٢

من ① ، ② نتخلص من جـ ← −٤ ا + ٣ ب = −١٧

−ا + ٢ ب = ٢

٣ ب = −٩ ← ب = −٣

من ② ، ④ ← −ا + ٧ ب = −٨ ... ④

ب = −٣ ، ا = −٦ لذلك جـ = −١٥

المعادلة : $س^2 + ص^2 - ٦ س - ٢ ص - ١٥ = ٠$

تمرين محلول : ما معادلة دائرة يقع مركزها على محور السينات وتمر بالنقطتين (٣،-١) ، (٥،١)

الحل : $س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = صفر$

المركز $(-\frac{أ}{2}، 0) \leftarrow ب = 0$

$(٣،-١) \leftarrow 9 + 1 + أ٣ + ج = 0 \leftarrow أ + ج = -10 \ldots ①$

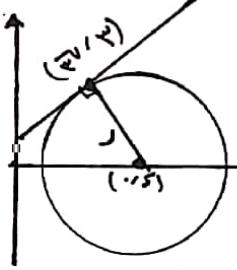
$(٥،١) \leftarrow 25 + 1 + أ٥ + ج = 0 \leftarrow أ + ج = -26 \ldots ②$

بحل المعادلات $أ = 8$ ، $ج = -34$

∴ المعادلة $س^2 + ص^2 + 8س - 34 = 0$

تمارين متنوعة

① ما معادلة الدائرة التي تمس المستقيم $ص = \frac{1}{\sqrt{3}} س$ في النقطة $(3، \sqrt{3})$ ويقع مركزها على محور السينات



الحل : المركز $(5، 0)$ لأنه على السينات

بعد الرسم نجد ر بطريقتين

ر = مسافة بين نقطتين

$ر = \sqrt{(5-3)^2 + (0-\sqrt{3})^2}$

$ر^2 = (5-3)^2 + 3$ ---- ①

∴ ر = بعد نقطة $(5،0)$ عن مستقيم $ص = \frac{1}{\sqrt{3}} س$

$ر = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} س - ص + 1}{\sqrt{\frac{1}{3} + 1}}$ ⇐ $ر = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} 5 - 0 + 1}{\frac{4}{3}}$ تربيع ⇐ $ر^2 = \frac{\frac{1}{3} ك^2}{\frac{4}{3}}$

$4ر^2 = ك^2$ ---- ②

وبحل المعادلتين $ك = 4$ ، $ر = 2$

∴ المعادلة $(س - 4)^2 + (ص)^2 = 4$

② ما معادلة دائرة تمر بنقطة الأصل وتقطع من محوري السينات والصادات الموجبين ٨ وحدات ، ٦ وحدات على الترتيب .

الحل : لدينا ٣ نقاط تمر بها الدائرة $(0،0)، (0،8)، (6،0)$

المعادلة العامة :

$س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + ج = 0$

$(0،0) \leftarrow$ صفر $ج = 0$

$(0،8) \leftarrow 64 + 8ب = 0$

$8ب = -64 \leftarrow ب = -8$

$(6،0) \leftarrow 36 + 6أ + 0 = 0$

$6أ = -36 \leftarrow أ = -6$

المعادلة $س^2 + ص^2 - 8ص - 6س = صفر$

حل آخر :

العمود النازل من المركز على أي وتر ينصفه

∴ المركز $(3، 4)$

من فيثاغورس

$ر = \sqrt{(4)^2 + (3)^2}$

$ر = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

∴ المعادلة

$(س - 4)^2 + (ص - 3)^2 = 25$

③ ما معادلة الدائرة التي مركزها $(8، 14)$ وتمس الدائرة من الخارج التي معادلتها $س^2 + ص^2 + 2س - 4ص = 11$

المركز $(8، 14)$ المجهول فقط ر

لذلك نجد مركز ونصف قطر الدائرة المعطاة . ⇐

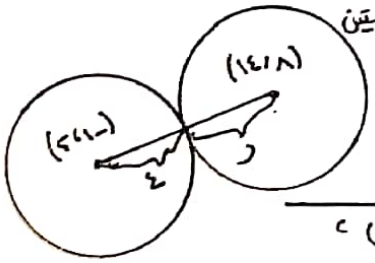
$س^2 + ص^2 + 2س - 4ص - 11 = 0$

المركز $(-1، 2)$

$ر = \sqrt{1 + 4 - (-11)} = \sqrt{16} = 4$

نرسم دائرتين متماستين

نجد المسافة بين المركزين



$ف = \sqrt{(9)^2 + (12)^2}$

$= \sqrt{225} = 15$

$ر = 15 - 4 = 11$

المعادلة :

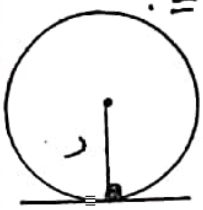
$(س - 8)^2 + (ص - 14)^2 = 121$

Omar Aljabr عمر الجبر www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

④ جد معادلة الدائرة التي طول قطرها (١٤) وحدة ومركزها (ل، ل) حيث ل > ٠، وتمس المستقيم الذي معادلته ٦س + ٨ص = ٠

الحل



$$ر = \frac{|٦ل + ٨ل|}{\sqrt{٦٤ + ٣٦}}$$

$$٧ = \frac{١٤ل}{١٠}$$

$$٧٠ = ١٤ل \quad أو \quad -٧٠ = ١٤ل$$

$$ل = ٥ \quad أو \quad ل = -٥$$

م (٥، ٥) ، ر = ٧

المعادلة $(س - ٥)^٢ + (ص - ٥)^٢ = ٤٩$

⑤ جد معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات عند (٠، ٣) وتقطع محور السينات في نقطتين احداهما (٠، ٩).

الحل: المركز (ر، ٣)

$ر^٢ = ٩ + (٩ - ر)^٢$

$ر^٢ = ٩ + ٨١ - ١٨ر + ر^٢$

$١٨ر = ٩٠ \leftarrow ر = ٥$

المركز (٥، ٣) ∴ المعادلة

$(س - ٥)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٢٥$

ثانياً: القطع المكافئ:

هو الحل الهندسي لنقطة متحركة و (س، ص) بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم.

تسمى النقطة الثابتة (بؤرة) والمستقيم المعلوم (دليل)

التعريف بالرموز

$|أب| = |أك|$ ← مسافات

عناصر القطع

رأس ● بؤرة

أوجد ٤ مرات

محور ● دليل

قطوع مستقيمة ومتعامدة

خصائص ومميزات القطع:

١- البؤرة تقع في قلب القطع

٢- الدليل يقع أمام الرأس

٣- البؤرة والرأس يقعان على المحور دائماً (مشتركة في نصف الزوج)

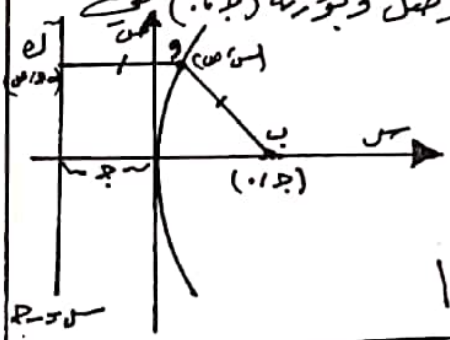
٤- بُعد الرأس عن البؤرة = بُعد الرأس عن الدليل ويساوي (د)

لذلك بُعد البؤرة عن الدليل (٢ د)

٥- معادلة القطع تربيعية إما مع $س^٢$ أو مع $ص^٢$ وليس كليهما

٦- أقرب نقطة للبؤرة هي الرأس (أقرب مسافة هي د)

سؤال: أثبت أن معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل وبؤرته (د، ٠) هي $ص^٢ = ٤ د س$



الحل:

نرسم ومن التعريف

$|أب| = |أك|$

$$\sqrt{(س - د)^٢ + (ص - ٠)^٢} = \sqrt{(س + د)^٢ + (٠)^٢}$$

نربع الطرفين ونفك القوسين

$س^٢ - ٢د س + د^٢ + ص^٢ = س^٢ + ٢د س + د^٢$

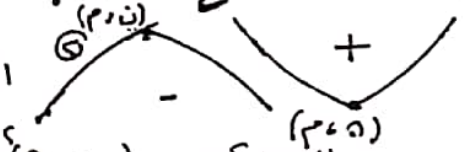
$ص^٢ = ٢د س + ٢د س \leftarrow$

$ص^٢ = ٤ د س$

* حالات القطع الأربعة:

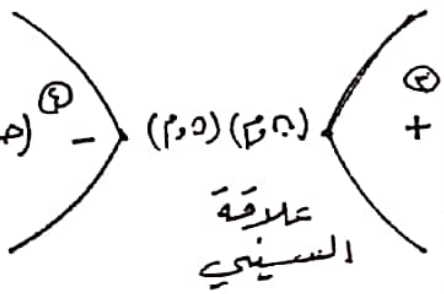
① اقتران تربيعي

$(س - ٥)^٢ = \pm ٤ د (ص - م)$



② علاقة السيني

$(ص - م)^٢ = \pm ٤ د (س - ٥)$



Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

* إيجاد معادلة القطع المكافئ :- (يجب الرسم)

١) نرسم بدقة بحيث نضع العناصر في المستوى البياني ونضع رأس القلم عند رأس القطع ونبدأ الحركة .

٢) نحدد نوع القطع ونكتب المعادلة العامة .

٣) بإحداثيات الرأس ونجد جـ من الرسم إن أمكن .

أمثلة :

① ما معادلة قطع مكافئ رأسه (١،٣) وبؤرته (٣،٤)

الحل : نرسم في المستوى

$(ص-٣)^{٢} = ٤جـ(س-١)$

الرأس (١،٣) ، جـ = ٣ من الرسم

$(ص-٣)^{٢} = ١٢(س-١)$

② ما معادلة قطع مكافئ بؤرته (٤،٣) ودليله محور الصادات

الحل : التربيع مع س

$(س-٥)^{٢} = ٤جـ(ص-٣)$

الرأس في المنتصف (٣،٣) جـ = ٣ من الرسم

$(س-٥)^{٢} = ٨(ص-٣)$

تمرين (١) : ما معادلة قطع مكافئ بؤرته (٣،٦)

ودليله ص - ٤ = صفر الجواب $(س-٦)^{٢} = -٤(ص-٥)$

③ ما معادلة قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة (٤،-٢) ومتماثل حول محور الصادات .

الحل : المحور صادي لذلك التربيع مع س

$(س-٠)^{٢} = -٤جـ(ص-٠)$

لاحظ تم الاستفادة من النقطة (٤،-٢) لتحديد الاتجاه (-)

$س^{٢} = -٤جـ ص$ لا نستطيع تحديد جـ على الرسم لذلك

سوف نستفيد من النقطة (٤،-٢) مرة أخرى لأنها تحقق المعادلة ونعوضها نجد جـ (لذلك مشكورة مرتين)

$(٤،-٢) \leftarrow ١٦ = -٤جـ(-٢) \leftarrow ١٦ = ٨جـ \leftarrow$ جـ = ٢

∴ المعادلة $س^{٢} = -٨ص$

تمرين (٢) : ما معادلة قطع مكافئ رأسه (١،-٢) ويمر بنقطة الأصل ومحوره يوازي المستوى .

الجواب : $(ص+٢)^{٢} = -٤(س-١)$

* ملاحظة :

- نستطيع تحديد جـ على الرسمة إذا كان لدينا الرأس مع البؤرة أو مع الدليل .

- في حالة عدم القدرة على تحديد جـ سوف نستفيد من النقطة التي تقع على المنحنى (مثال ٣ والتمرين) .

④ ما معادلة قطع مكافئ محوره س = ٢ ودليله ص = ١ ويمر بالنقطة (٦،٦) (شكرا) ؟

الحل : مفتاح الحل أن نحدد جـ على الرسم إن أمكن .

المحور صادي لذلك التربيع مع س

يفضل أن نكتب الرأس بدلالة جـ

حيث الرأس (٢، ١+جـ)

المعادلة $(س-٢)^{٢} = ٤جـ(ص-(١+جـ))$

(٦،٦) مشكورة تحقق المعادلة

$١٦ = ٤جـ(٦-(١+جـ))$

$٤ = جـ(٥-جـ) \leftarrow ٤ = ٥جـ - جـ^{٢} \leftarrow جـ^{٢} - ٥جـ + ٤ = ٠$

$(جـ-١)(جـ-٤) = ٠$

جـ = ١ ، جـ = ٤ لذلك يوجد معادلتين

الأولى عند جـ = ١ $\leftarrow (س-٢)^{٢} = ٤(ص-٢)$

الثانية عند جـ = ٤ $\leftarrow (س-٢)^{٢} = ١٦(ص-٥)$

تمرين (٣) : ما معادلة قطع مكافئ دليله س = ٣ ومحوره ص = ٤ ويمر بالنقطة (٨،١٠) الجواب : $(ص-٤)^{٢} = ١٢(س-٥)$

⑤ ما معادلة قطع مكافئ بؤرته (١،٣) ومحوره يوازي محور السينات ويمر بالنقطة (٠،٥) ورأسه على يمين البؤرة

الحل : نرسم ونحدد جـ على الرسم إن أمكن

الرأس (٣+جـ، ١)

المحور يوازي السينات لذلك التربيع مع ص

$(ص-١)^{٢} = -٤جـ(س-(٣+جـ))$

(٠،٥) مشكورة $\leftarrow ١٦ = -٤جـ(٠-٣-جـ)$

$٤ = -جـ(-٣-جـ) \leftarrow ٤ = ٣جـ + جـ^{٢} \leftarrow جـ^{٢} + ٣جـ - ٤ = ٠$

$(جـ-١)(جـ+٤) = ٠ \leftarrow$ جـ = ١ ، جـ = -٤ تحمل

المعادلة عندما جـ = ١ $\leftarrow (ص-١)^{٢} = -٤(س-٤)$

Scanned with CamScanner

⑥ ما معادلة قطع مكافئ محوره هو محور السينات ويمر بالنقطتين (٨,١٠) , (٤,٤)

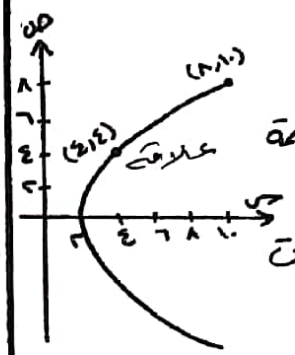
الحل: الرسم أولاً

لاحظ لا نستطيع تحديد جـ على الرسمة

لذلك الرأس (ل,٠)

المحور سيني لذلك التربيع مع إحداثيات

$(ص-٠)^{٢} = ٤ه(س-ل)$



$(٨,١٠) \Leftarrow ٦٤ = ٤جـ(١٠-ل)$ ... ①

$(٤,٤) \Leftarrow ١٦ = ٤جـ(٤-ل)$ ... ②

بقسمة المعادلتين $\Leftarrow ٤ = \frac{١٠-ل}{٤-ل} \Leftarrow ١٦-٤ل = ١٠-ل$

$٦ = ٣ل$

$\boxed{ل = ٢}$

وبتعويض ل بإحدى المعادلتين نجد قيمة $\boxed{جـ = ٢}$

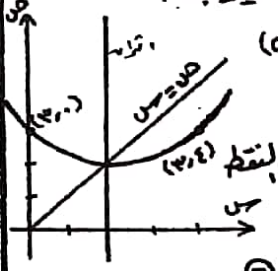
∴ المعادلة $ص^{٢} = ٨(س-٢)$

⑦ ما معادلة قطع مكافئ يقع رأسه على المستقيم $ص = س$ ومحوره يوازي إحداثيات ويمر بالنقط (٣,٠) , (٣,٤)

الحل: نرسم لاحظ الرأس مقابل (٥,٥)

لأنه يقع على المستقيم $ص = س$

$(س-ه)^{٢} = ٤جـ(ص-ه)$ نجد ه, جـ من النقط



$(٣,٠) \Leftarrow ٥ = ٤جـ(٣-ه)$ ... ①

$(٣,٤) \Leftarrow (٤-ه)^{٢} = ٤جـ(٣-ه)$ ... ②

بحل المعادلتين ه = ٣ ، جـ = ١

∴ المعادلة $(س-٣)^{٢} = ٤(ص-٣)$

تمرين (٤): ما معادلة قطع مكافئ محوره ص = صفر ويمر بالنقطتين (٣,٣), (٥,٠=٤)

الجواب: $ص^{٢} = ٤(س-١)$

تمرين (٥): ما معادلة قطع مكافئ محوره يوازي الصادات وبؤرته (١,٣) ويمر بالنقطة (٥,-١)، ويقع رأسه أسفل البؤرة $(ص-١)^{٢} = ١٦(س+٢)$

تمرين (٦): ما معادلة قطع مكافئ يقع رأسه على المستقيم $ص = ٢س$ ومحوره يوازي محور السينات ويمر بالنقطتين (٤,٠), (٤,٨)

$(ص-٤)^{٢} = ٨(س-٢)$

* حالة خاصة * : إيجاد معادلة قطع مكافئ إذا علم نوع المحور أو الدليل وثلاث نقاط تقع عليه:

أولاً: محوره يوازي الصادات أو دليله يوازي السينات

← التربيع مع س، وتكون المعادلة $ص = ا س^{٢} + ب س + جـ$

ثانياً: محوره يوازي السينات أو دليله يوازي الصادات

← التربيع مع ص، وتكون المعادلة $س = ا ص^{٢} + ب ص + جـ$

مثال: ما معادلة قطع مكافئ محوره يوازي الصادات ويمر بالنقط (٣,٢), (-٦,١), (٠,١)

الحل: يوازي الصادات ← التربيع مع س

$ص = ا س^{٢} + ب س + جـ$

$(٣,٢) \Leftarrow ٣ = ٩ا + ٣ب + جـ$ ... ①

$(-٦,١) \Leftarrow ٦ = ٣٦ا - ٦ب + جـ$ ... ②

$(٠,١) \Leftarrow ١ = ٠ + ٠ + جـ$ ... ③

بحل المعادلات ا = ٢ ، ب = -٣ ، جـ = ١

∴ المعادلة: $ص = ٢س^{٢} - ٣س + ١$

* تحليل معادلة القطع المكافئ لإيجاد العناصر الأربعة:

{ رأس، بؤرة، معادلة محور، معادلة دليل }

قبل البدء في التحليل يجب تجهيز المعادلة في طرفيها كما يلي:

* نجعل الطرف الأيمن مربع كامل وذلك باستخدام إكمال مربع إذا لزم الأمر.

* نجعل الطرف الأيسر قوس خطي بحيث معامل الرمز يساوي (١) ويتم ذلك بإخراج عامل مشترك.

* ملاحظة *

إذا طلب السؤال بعض العناصر يفضل أن تكتبهم كلهم (كرصم).

Omar Aljabr
www.omaraljabr.com
Scanned with CamScanner

* سؤال : جد عناصر القطع المكافئ لكل مما يلي :

① $(س-٥)^{٢} = ٨(ص-١)$ (جاهزة)

المحور دائماً من التربيع $س-٥=٠$

∴ المحور $س=٥$ (تبعاً للسينات)

الرأس $(٥,١)$ $٤ه = ٨ \leftarrow \boxed{ه=٢}$

البؤرة $(٥, ١+ج) \leftarrow (٥,٣)$

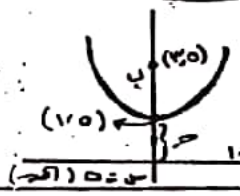
الدليل ص = الرأس $-$ ج

$ص = ١-٢ \leftarrow \boxed{ص=-١}$

حل آخر : من الرسم

المحور $س=٥$

الرأس $(٥,١)$ الدليل $\leftarrow ص=-١$



② $(ص-٣)^{٢} = -١٢(س-٦)$ (غير جاهزة في الأيسر)

الحل : $(ص-٣)^{٢} = -١٢(س-٦)$

المحور $ص=٣$ (تبعاً للصادات)

الرأس $(٦,٣)$ $٤ه = ١٢ \leftarrow \boxed{ه=-٣}$

البؤرة $(٩+ج, ٣) \leftarrow (٣,٣)$

الدليل $س$ = الرأس $+$ ج $\leftarrow س = ٦+٣ \leftarrow س = ٩$

③ $ص^{٢} - ٤س + ٦ = ٠$ (غير جاهزة)

الحل : $ص^{٢} = ٤س - ٦$

$ص^{٢} = ٤(س - \frac{٦}{٤}) \leftarrow (ص-٠)^{٢} = ٤(س - \frac{٣}{٢})$

المحور $ص=$ صفر (تبعاً للصادات)

الرأس $(\frac{٣}{٢}, ٠)$ $٤ه = ٤ \leftarrow \boxed{ه=١}$

البؤرة $(\frac{٣}{٢}+ج, ٠) \leftarrow (\frac{٥}{٢}, ٠)$

الدليل $س$ = الرأس $-$ ج $\leftarrow س = \frac{٣}{٢} - ج \leftarrow س = \frac{١}{٢}$

④ $ص = (٢س-٣)^{٢}$ (غير جاهزة)

$ص = (٢(س-\frac{٣}{٢}))^{٢} \leftarrow ص = ٤(س-\frac{٣}{٢})^{٢}$

$(س-\frac{٣}{٢})^{٢} = \frac{١}{٤}(ص-٠)$

المحور $س = \frac{٣}{٢}$ (تبعاً للسينات)

الرأس $(\frac{٣}{٢}, ٠)$ $٤ه = \frac{١}{٤} \leftarrow \boxed{ه = \frac{١}{١٦}}$

البؤرة $(\frac{٣}{٢}, صفر+ج) \leftarrow (\frac{٣}{٢}, \frac{١}{١٦})$

الدليل ص = الرأس $-$ ج $\leftarrow ص = صفر - ج \leftarrow ص = \frac{١}{١٦}$

تمرين (٧) : $(٢ص+٣)^{٢} - ٨س - ٤ = صفر$

الدليل $س = -١$ ، البؤرة $(٠,-١)$

⑤ $(٣-س)^{٢} = ١٢ - ٦ص$ (غير جاهزة)

$(س-٣)^{٢} = -٦(ص-٢)$

المحور $س=٣$ (تبعاً للسينات)

الرأس $(٣,٢)$ $٤ج = ٦ \leftarrow ه = \frac{٦}{٤} = \frac{٣}{٢}$

البؤرة $(٣, ٢-ج) \leftarrow (٣, \frac{١}{٢})$

الدليل ص = الرأس $+$ ج $\leftarrow ص = ٢ + \frac{١}{٢} \leftarrow ص = ٢,٥$

⑥ $س^{٢} - ٤س - ١٢ص - ٨ = ٠$ (غير جاهزة)

الحل : $س^{٢} - ٤س = ١٢ص + ٨$

إكمال مربع للأيمن بإضافة $(\frac{١}{٢}$ معامل $س)^{٢}$ للطرفين

$س^{٢} - ٤س + ٤ = ١٢ص + ٨ + ٤$

$(س-٢)^{٢} = ١٢ص + ١٢ \leftarrow (س-٢)^{٢} = ١٢(ص+١)$

المحور $س=٢$ (تبعاً للسينات)

الرأس $(٢,-١)$ $٤ج = ١٢ \leftarrow \boxed{ه=٣}$

البؤرة $(٢, -١+ج) \leftarrow (٢,٢)$

الدليل ص = الرأس $-$ ج $\leftarrow ص = -١ - ٣ \leftarrow ص = -٤$

⑦ $٢ص^{٢} - ٤ص + ٤س + ٢ = ٠$ (غير جاهزة)

الحل : بالقسمة على ٢ أولاً $\leftarrow ص^{٢} - ٢ص + ٢س + ١ = ٠$

$ص^{٢} - ٢ص = -٢س - ١$ إكمال مربع للصادات

$ص^{٢} - ٢ص + ١ = -٢س - ١ + ١$

$(ص-١)^{٢} = -٢(س-٠)$

المحور $ص=١$ (تبعاً للصادات)

الرأس $(١,٠)$ $٤ه = ٢ \leftarrow \boxed{ه = \frac{١}{٢}}$

البؤرة $(٠+ج, ١) \leftarrow (-\frac{١}{٢}, ١)$

الدليل $س$ = الرأس $+$ ج $\leftarrow س = \frac{١}{٢}$

واجب : جد معادلة الدليل ، الرأس ، البؤرة ، معادلة المحور لقطع مكافئ ، معادلة $٨س - ٩ص^{٢} + ١٨ص - ٣٣ = صفر$

$٨س - ٣٣ = ٩ص^{٢} - ١٨ص$ "نؤجل العشرة على ٩ ونقوم بإكمال مربع داخلي"

$٩(ص^{٢} - ٢ص) = ٨س - ٣٣$

$٩(ص^{٢} - ٢ص + ١) = ٨س - ٣٣ + ٩$

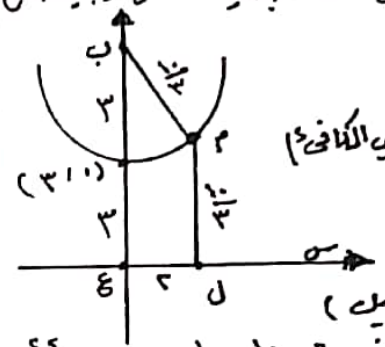
$٩(ص-١)^{٢} = ٨س - ٢٤$ إكمال $\leftarrow$ المحور $ص=١$ ، الرأس $(٣,١)$

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

① في الشكل قطع مكافئ رأسه النقطة (٠، ٢) وبؤرته النقطة (ب) ودليله محور السينات، والنقطة م (٢، $\frac{١}{٢}$) تقع على منحناه. جد محيط الشكل الرباعي أ م ع ل



الحل:

أ ل = م ل = $\frac{١}{٢}$ (تعريف الكافئ)

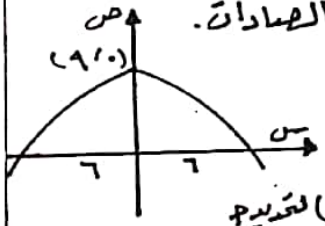
ل ع = ٢

ب ع = ٢ ف

(بعد البؤرة عن الدليل)

∴ المحيط = مجموع الأضلاع = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ + ٣ + ٦ = $\frac{٤٤}{٣}$

② قاعدة قوس على شكل قطع مكافئ تقع على أرض مستوية، طولها ١٢ متراً ورأس القوس يرتفع ٩ أمتار فوق سطح الأرض، اكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس علماً أنه متماثل حول محور الصادات.



الحل: الرأس (٠، ٩)

المحور الصادي: يتربع مع س

نستفيد من النقطة (٦، ٠) لتحديد ف

المعادلة: (س - ٠)^{٢} = -٤ ف (ص - ٩)

(٦، ٠) تحقق ← ٣٦ = ٣٦ ف ← ف = ١

المعادلة: $\boxed{\text{س}^{٢} = -٤ (\text{ص} - ٩)}$

③ إذا كانت بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته (ص + ١)^{٢} = -٨ (س + د) هي (٣، -١) فأوجد د

الحل:

ف = $\frac{٨}{٤}$ = ٢

الرأس (-د، -١)

البؤرة (-د - ٢، -١) = (٣، -١)

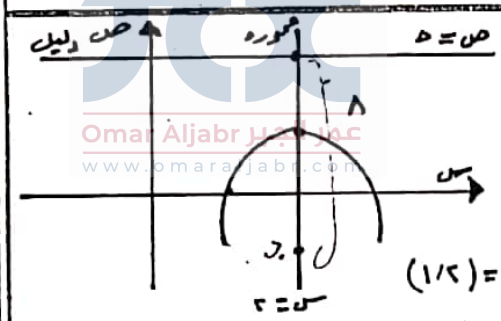
-د - ٢ = ٣ ← -د = ٥ ← د = -٥

④ جد معادلة القطع المكافئ المقعر لأسفل الذي محوره س = ٢، دليله ص = ٥ وتبعد بؤرته (٨) وحدات عن دليله

الحل:

ف = ٨

ف = ٤



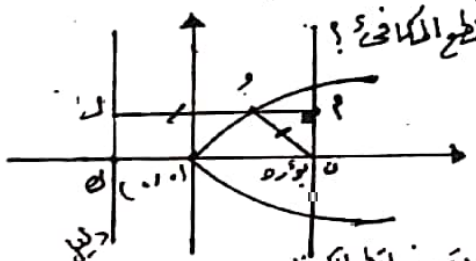
ل (٢، ٥ - ٤) = (١، ٢)

محوره عمودي: التربيع على س

(س - ٢)^{٢} = -٤ × ٤ (ص - ١)

(س - ٢)^{٢} = -١٦ (ص - ١)

⑤ يمثل الشكل قطع مكافئ والنقطة (س، ص) تتحرك على منحنى القطع بحيث يبقى المثلث و م ن قائم الزاوية في م، وكان م و + و ن = ٤ وحدات فما معادلة القطع المكافئ؟



الحل:

و ن = و ل (تعريف القطع الكافئ)

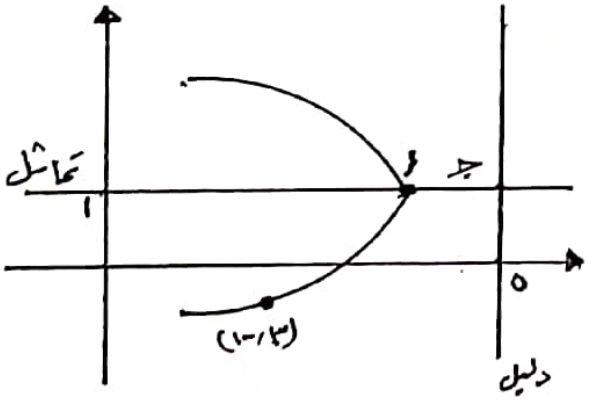
م و + و ل = ٢ ف (م ن ك ل مستطيل)

٢ ف = م و + و ن = ٤ ← ف = ٢

المعادلة:

ص^{٢} = ٤ × ٢ س ← $\boxed{\text{ص}^{٢} = ٨\text{س}}$

⑥ جد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته على المستقيم ص = ١ ومعادلة الدليل س = ٥ ويمر منحناه بالنقطة (٣، -١)



Scanned with CamScanner

محوره سيني :: التربيع ص

الرأس (٥- ، ١)

المعادلة:

$(ص-١)^{٢} = -٤ أ (س - ٥ + أ)$

$(٣-١)$ تحقق $(-١-١)^{٢} = -٤أ(٣-٥+أ)$

$٤ = -٤أ(-٢+أ)$

$٤ = ٨أ - ٤أ^{٢}$

$٤أ^{٢} - ٨أ + ٤ = ٠$ بالقسمة ٤

$أ^{٢} - ٢أ + ١ = ٠$

$(أ-١)^{٢} = ٠$ $\boxed{أ = ١}$

المعادلة: $(ص-١)^{٢} = -٤(س-٥+١)$

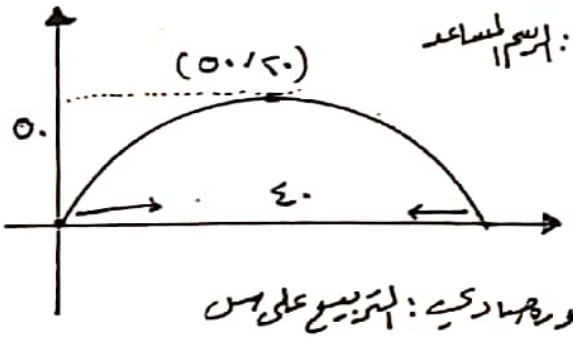
$(ص-١)^{٢} = -٤(س-٤)$

(٧) أُطلقت قذيفة من مستوى سطح الأرض أفقية إلى الأعلى، وعادت إلى نفس المستوى وكان مسارها على منحنى قطع مكافئ فإذا كان أعلى ارتفاع وصلته القذيفة (٥٠) مترًا وأقصى مدى أفقي لها هو (٤٠) مترًا اعتبر نقطة انطلاق القذيفة النقطة (٠،٠) جد ما يلي:

أ) معادلة القطع المكافئ.

ب) ارتفاع القذيفة عند سطح الأرض عندما يكون هذا الارتفاع مساويًا للمسافة بين نقطة انطلاق القذيفة ومسقطها على الأرض.

الحل: الرسم المساعد



محوره رأسي: التربيع على س

الرأس (٢٠، ٥٠)

$أ = ؟؟$

المعادلة: $(س-٢٠)^{٢} = -٤ \times أ (ص-٥٠)$

(٠،٠) تحقق $(٠-٢٠)^{٢} = -٤أ(٠-٥٠)$

$\frac{٤٠٠}{٤٠٠} = \frac{٤٠٠أ}{٤٠٠} \leftarrow$ $\boxed{أ = ١}$

(١) المعادلة: $(س-٢٠)^{٢} = -٤ \times ٢ (ص-٥٠)$

$(س-٢٠)^{٢} = -٨(ص-٥٠)$

(٢) قيمة ص عندما س = ص

$(ص-٢٠)^{٢} = -٨(ص-٥٠)$

$ص^{٢} - ٤٠ص + ٤٠٠ = -٨ص + ٤٠٠$

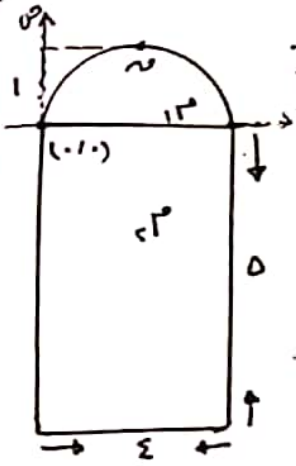
$ص^{٢} - ٤٠ص + ٨ص = ٠$

$ص^{٢} - ٣٢ص = ٠$

$ص(ص-٣٢) = ٠ \leftarrow$ ص = ٠ ، ص = ٣٢

(٨) الشكل يمثل المدخل الجنوبي لوزارة التربية والتعليم وهو على شكل مستطيل يعلوه قوس على شكل قطع مكافئ، جد مساحة واجهة هذا المدخل.

الحل: نرسم المحاور الإحداثية



معادلة قه هي معادلة قطع مكافئ

الرأس (١٣، ١)

$أ = ؟؟$

المعادلة:

$(س-١٣)^{٢} = -٤أ(ص-١)$

(٠،٠) تحقق $(٠-١٣)^{٢} = -٤أ(٠-١)$

$١٦٩ = ٤أ$

$أ = ٤٢.٢٥$

المعادلة:

$(س-١٣)^{٢} = -١٦٩(ص-١)$

$س^{٢} - ٢٦س + ١٦٩ = -١٦٩ص + ١٦٩$

$ص = \frac{س^{٢} - ٢٦س}{-١٦٩}$

Omar Aljabri عمر الجابري
www.omaraljabr.com
Scanned with CamScanner

$م = م_١ + م_٢$

$م_٢ = ٥ \times ٤ = ٢٠$

$م_١ = \int_{٠}^{٤} ق(س)\ د س$

$م_١ = \int_{٠}^{٤} \frac{س^٢ - ٤س}{-٤}\ د س$

$م_١ = -\frac{١}{٤}\left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{٤س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤}$

$م_١ = -\frac{١}{٤}\left(\frac{٦٤}{٣} - \frac{٣٢ \times ٤}{٣ \times ١}\right)$

$م_١ = -\frac{١}{٤}\left(\frac{٦٤ - ٩٦}{٣}\right)$

$م_١ = -\frac{١}{٤} \times \frac{-٣٢}{٣} = \frac{٨}{٣}$

$\therefore م = م_١ + م_٢$

$= \frac{٨}{٣} + \frac{٢٠ \times ٣}{١ \times ٣} = \frac{٦٨}{٣}$

---

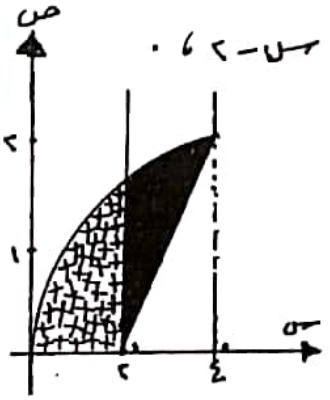
⑨ ما مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول والمحصورة بين منحنى $ص^٢ = س$ والمستقيم $ص = س - ٢$ ومحور السينات

الحل: $ص^٢ = س$ إقترانين حيث

$ص = \sqrt{س}$ ، $ص = -\sqrt{س}$ تهمل لأنه تحت السينات

أعمدة: ×

إقترانات: $\sqrt{س}$ ، $س - ٢$ ، ٠



$\sqrt{س} = ٠ \Leftarrow س = ٠$

$س - ٢ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

$\sqrt{س} = س - ٢$

$س = س^٢ - ٤س + ٤$

$س^٢ - ٥س + ٤ = ٠$

$(س - ١)(س - ٤) = ٠$ تهمل $\Leftarrow س = ١$ ، $س = ٤$

$م_١ = \int_{٢}^{٤} (\sqrt{س} - ٠)\ د س$

$= \left[\frac{٢ س^{\frac{٣}{٢}}}{٣}\right]_{٢}^{٤} = \frac{٢}{٣}\sqrt{٨}$

$م = \int_{٢}^{٤} (\sqrt{س} - (س - ٢))\ د س$

$= \frac{١٦}{٣} - \frac{٢}{٣}\sqrt{٨} - ٢$

م الكلية $= \frac{١٠}{٣}$

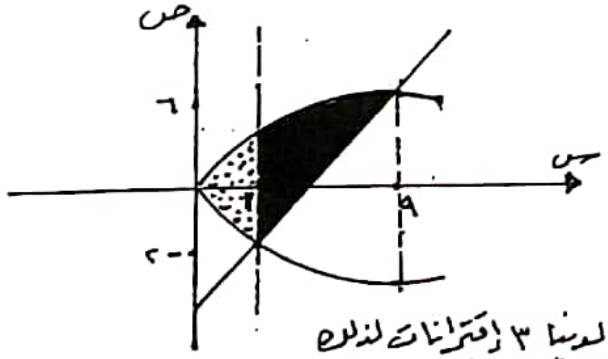
---

⑰ جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة $ص^٢ = ٤س$ والمستقيم $س - ص = ٣$

الحل: أعمدة إقترانات ثلاثة:

$\sqrt{س}$ ، $-\sqrt{س}$ ، $س - ٣$

$\sqrt{س} = س - ٣$	$\sqrt{س} = -\sqrt{س}$	$-\sqrt{س} = س - ٣$
$٤س = س^٢ - ٦س + ٩$	$٤\sqrt{س} = ٠$	$٤س = س^٢ - ٦س + ٩$
$س^٢ - ١٠س + ٩ = ٠$	$س = ٠$	$س^٢ - ١٠س + ٩ = ٠$
$(س - ١)(س - ٩) = ٠$		$(س - ١)(س - ٩) = ٠$
$س = ١$ ، ٩ ✗		$س = ١$ ، ٩ ✗



لدينا ٣ إقترانات لذلك لو جد منطقتين.

$م_١ = \int_{٠}^{١} (\sqrt{س} + ٢\sqrt{س})\ د س = \int_{٠}^{١} ٤\sqrt{س}\ د س$

$م_١ = \frac{٨}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{٠}^{١} = \frac{٨}{٣}\sqrt{١}^{٣} = \frac{٨}{٣}$

$م_٢ = \int_{١}^{٩} (٢\sqrt{س} - (س - ٣))\ د س$

$م_٢ = \int_{١}^{٩} (٢ س^{\frac{١}{٢}} - س + ٣)\ د س$

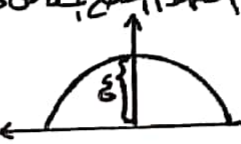
$م_٢ = \frac{٤}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} - \frac{س^٢}{٢} + ٣س \Big|_{١}^{٩} = \frac{٥٦}{٣}$

م الكلية $= \frac{٨}{٣} + \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com
Scanned with CamScanner

Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

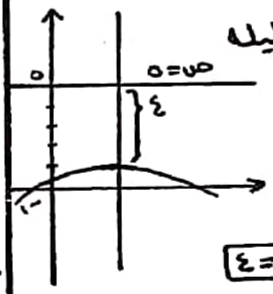
① تقوم لعبور السيارات على شكل قطع مكافئ معادلته
٢ص = ٨س - ٢س٢، باستخدام مفهوم القطع المكافئ
جد أقصى ارتفاع للنفق.



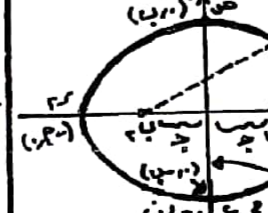
الحل: لاحظ أن المطلوب الاحداثي
الصادي لرأس القطع
نجهز المعادلة بالقسمة على ٢ ثم إكمال مربع
ص = ٤س - س٢ ⇐ س٢ - ٤س = - ص
س٢ - ٤س + ٤ = - ص + ٤
(س - ٢)٢ = - (ص - ٤)
الرأس (٢، ٤)
∴ أقصى ارتفاع = ٤ متر.

② ما معادلة دائرة مركزها بؤرة القطع المكافئ
الذي معادلته ص٢ - ٤ص + ٨س + ٤ = ٠
وتمس دليله.
(س + ١)٢ + (ص - ٢)٢ = ١٦

③ قطع مكافئ محوره يوازي الصادات ورأسه (١، ٣)
ويمر بالنقطة (-١، ٠) جد معادلة دليله
الحل: نجد معادلة القطع أولاً
(التربيع مع السينات)
(س - ١)٢ = - ٤جـ (ص - ٣)
(-١، ٠) ⇐ مشكورة ⇐ ١ = - ٤جـ ⇐ جـ = - ١/٤
انتبه أن الدليل أمام الرأس ⇐ الدليل ص = ٦



* القطع الناقص :-
هو المحل الهندسي لنقطة متحركة م (س، ص) وتبقى مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (بؤرتين) يساوي مقدار ثابت (٢أ)

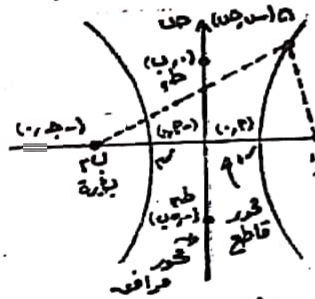


التعريف بالرموز:
م ب + م ب' = ٢أ
خصائص وميزات:-
* له رأسان نأخذهما من أ ويبعد بينهما ٢أ = مجموع البعدين
* له بؤرتان نأخذهما من جـ ويبعد بينهما ٢جـ (البعد البؤري)
* العلاقة بين أ، ب، جـ هي جـ٢ = أ٢ - ب٢
لها تشبه الاسم

* له محوران هما: أ. المحور الأكبر طوله ٢أ ويقع عليه الرأسان والبؤرتان
ب. المحور الأصغر طوله ٢ب.
* مساحة القطع الناقص = أ ب π تشبه الدائرة
* الاختلاف المركزي هـ حيث هـ = جـ/أ < ١
* لتحديد نوع القطع سيني أو صادي نعتمد على البعد الأكبر حيث:
أ. إذا كان الأكبر (أ٢) تحت س٢ يكون سيني.
ب. إذا كان الأكبر (أ٢) تحت ص٢ يكون صادي.
* نوعاه هما سيني أو صادي حيث المعادلة كالتالي:

السيني مركزه (م، ن)	الصادي مركزه (م، ن)
(س - م)٢/أ٢ + (ص - ن)٢/ب٢ = ١	(ص - ن)٢/أ٢ + (س - م)٢/ب٢ = ١

* القطع الزائد :-
هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك م (س، ص) وتبقى الفرق المطلق لبعديها عن نقطتين ثابتتين (بؤرتين) يساوي مقدار ثابت (٢أ)



التعريف بالرموز
| م ب - م ب' | = ٢أ
خصائص وميزات:-
* له رأسان نأخذهما من أ ويبعد بينهما ٢أ
* له بؤرتان نأخذهما من جـ ويبعد بينهما ٢جـ (البعد البؤري)
* العلاقة بين أ، ب، جـ هي جـ٢ = أ٢ + ب٢ ← تشبه الاسم
* له محوران هما: أ. المحور الرئيسي (القاطع/العرضي) طوله ٢أ ويقع عليه الرأسان والبؤرتان
ب. المحور الرافعة وطوله ٢ب = ط ط'
* الاختلاف المركزي هـ = جـ/أ > ١
* لتحديد نوع القطع سيني أو صادي نعتمد البعد الأول (الموجب) بحيث:
أ. إذا كان الأول س٢ فالنوع سيني وتحت أ٢
ب. إذا كان الأول ص٢ فالنوع صادي وتحت أ٢
نوعاه هما سيني أو صادي حيث المعادلة كالتالي:

السيني مركزه (م، ن)	الصادي مركزه (م، ن)
(س - م)٢/أ٢ - (ص - ن)٢/ب٢ = ١	(ص - ن)٢/أ٢ - (س - م)٢/ب٢ = ١

Scanned with CamScanner

إيجاد العناصر الأساسية للقطع الناقص أو الزائد

يجب تجهيز المعادلة على الصورة العامة .

سؤال : جد عناصر كل من القطوع التالية ثم ارسمها :-

١) $\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{25} = 1$ ..... جاهزة

الاسم : ناقص (عكس اشارة المنصرف)
المركز : (٠،٠)
النوع : صادي من الرقم الأكبر حيث $م^2 = 25$ فتح ص

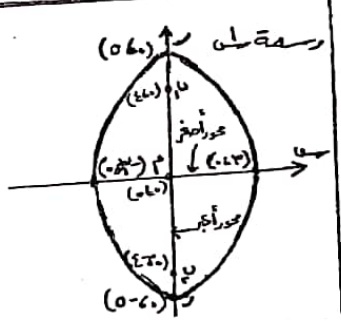
نفس	عكس	نفس
$م^2 = 25 \leftarrow م = 5$	$ع = 9 \leftarrow ب = 3$	$حـ^2 = م^2 - ب^2 = 16$
الرأسان (٠،٥) (٠،-٥)	طرفي المحور الأصغر (٣،٠) (-٣،٠)	$حـ = 4$
طول الأكبر $= 2م = 10$	طول الأصغر $2ب = 6$	البؤرتان (٠،٤) (٠،-٤)
معادلته $س = 0$	معادلته $ص = 0$	البعد البؤري $2حـ = 8$
		الاختلاف المركزي $هـ = \frac{حـ}{م} = \frac{4}{5}$

٢) $\frac{س^2}{9} - \frac{ص^2}{25} = 1$ .... جاهزة

الاسم : زائد (عكس الإشارة)
المركز : (٠،٠)
النوع : سيني من الأولى (الموجب)

نفس	عكس	نفس
$م^2 = 9 \leftarrow م = 3$	$ع^2 = 25 \leftarrow ب = 5$	$حـ^2 = م^2 + ب^2 = 34$
الرأسان (٣،٠) (-٣،٠)	طرفي المرافق (٠،٥) (٠،-٥)	$حـ = \sqrt{34}$
طول القاطع $2م = 6$	طول المرافق $2ب = 10$	البؤرتان $(\sqrt{34}، 0)$ $(-\sqrt{34}، 0)$
معادلته $ص = 0$	معادلته $س = 0$	البعد البؤري $2حـ = 2\sqrt{34}$
		$هـ = \frac{حـ}{م} = \frac{\sqrt{34}}{3} > 1$

الرسمة الحقيقية :-



٣) جد الاختلاف المركزي للقطع $4س^2 = 9 - ص^2$

الحل :- $4س^2 + ص^2 = 9 \leftarrow \frac{4س^2}{9} + \frac{ص^2}{9} = 1$

$\frac{س^2}{\frac{9}{4}} + \frac{ص^2}{9} = 1$

الاسم : ناقص ـ أكبر
المركز : (٠،٠)
النوع : صادي لأكبر

$م^2 = 9 \leftarrow م = 3$	$ع = \frac{9}{4} \leftarrow ب = \frac{3}{2}$

ناقص
$حـ^2 = م^2 - ع$
$حـ^2 = 9 - \frac{9}{4}$
$حـ^2 = \frac{27}{4}$
$حـ = \frac{\sqrt{27}}{2}$

$\therefore$ الاختلاف المركزي
$هـ = \frac{حـ}{م} = \frac{\frac{\sqrt{27}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{27}}{6}$
$= \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

للحظ ترتيب الحل
رغم ان المطلوب فقط هـ

تمرين (١) : $4ص^2 + س^2 = 1$ ، جد الرأسان والاختلاف المركزي
الجواب الرأسان $(\pm 1، 0)$ ، $هـ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

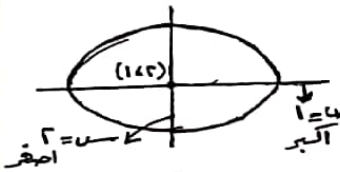
Omar Aljabr عمر الجبر

٤) $(س-3)^2 + (ص-5)^2 = 225$ ... غير جاهزة

الحل :- $(س-3)^2 + (ص-5)^2 = 225$

$9(س-2)^2 + 25(ص-1)^2 = 225$ ... بالقسمة على ٢٢٥

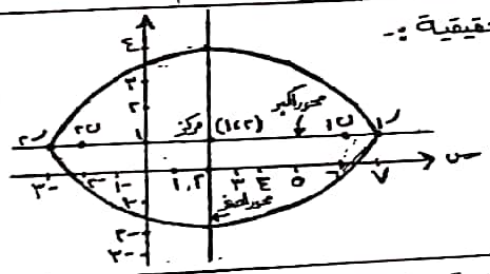
$\Leftarrow \frac{(س-2)^2}{25} + \frac{(ص-1)^2}{9} = 1$



الاسم : ناقص ـ أكبر
المركز : (٢،١)
النوع : سيني من الأكبر

نفس	عكس	نفس
$م^2 = 25 \leftarrow م = 5$	$ع = 9 \leftarrow ب = 3$	$حـ^2 = م^2 - ب^2 = 16$
الرأسان (٢،٦) (٢،-٤)	طرفي المحور الأصغر (٥،١) (-١،١)	$حـ = 4$
طول الأكبر $2م = 10$	طول الأصغر $2ب = 6$	البؤرتان (٢،٥) (٢،-٣)
معادلته $ص = 1$	معادلته $س = 2$	البعد البؤري $2حـ = 8$
		$هـ = \frac{حـ}{م} = \frac{4}{5} < 1$

الرسمة الحقيقية :-



٥) $7س^2 - 9ص^2 - 14س - 54ص - 137 = 0$ جد حاليا
① الرأسان ② طول المحور المرافق ③ الاختلاف المركزي

الحل :- نجهز المعادلة باكمال مربعين للسينات والصادات .

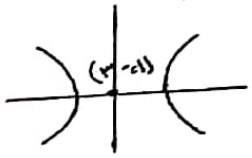
$7س^2 - 14س - 9ص^2 - 54ص = 137$

$7(س^2 - 2س) - 9(ص^2 + 6ص) = 137$

$7(س^2 - 2س + 1) - 9(ص^2 + 6ص + 9) = 137 + 7 - 81$

$7(س-1)^2 - 9(ص+3)^2 = 63$ ← رقم حلو

$\frac{(س-1)^2}{9} - \frac{(ص+3)^2}{7} = 1$



الاسم : زائد
المركز : (١،-٣)
النوع : سيني من الأولى

نفس	عكس	نفس
$م^2 = 9 \leftarrow م = 3$	$ع = 7 \leftarrow ب = \sqrt{7}$	$حـ^2 = م^2 + ب^2 = 16$
الرأسان (٤،-٣) (-٢،-٣)	طول المرافق $2ب = 2\sqrt{7}$	$حـ = 4$
		$هـ = \frac{حـ}{م} = \frac{4}{3} > 1$

تمرين (٢) : $س^2 + 2ص^2 + 2س - 4ص - 1 = 0$
جد المركز والاختلاف المركزي والرأسان .
الجواب المركز $(-1، 1)$ ، $هـ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، الرأسان $(1، 1)$ ، $(-3، 1)$

مسميات (٣٢) ① طول الأكبر ② طول القاطع
③ البعد بين الرأسين $ر_1 ر_2$
④ مجموع بعدي نقطة عن بؤرتي القطع $= 2م$ أو $= 2س$.
⑤ الفرق المطلق لبعدي نقطة عن بؤرتي القطع .
⑥ المسافة بين ابعد نقطتين في القطع الناقص .

Scanned with CamScanner

تمارين متنوعة : موضوعية على الأغلب

١ ما طول المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{س^2}{9} - \frac{ص^2}{16} = -1$

أ) ٦ ب) ٨ ج) ١٨ د) ٣٢

الحل :- نجهز المعادلة بالضرب في -١ ثم نعيد الترتيب .

$-\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{16} = 1 \Leftarrow \frac{ص^2}{16} - \frac{س^2}{9} = 1$

الاسم : زائد
المركز : (٠،٠)
النوع : صادي

المطلوب $2أ$
حيث $أ^2 = 16 \leftarrow أ = 4$
$2أ = 8$

٢ النقطة ه (س،ص) تقع على منحنى القطع الناقص $\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$ جد مجموع بعدي النقطة ه عن بؤرتي القطع

أ) ١٠ ب) ٥ ج) ٤ د) ٦

الحل : نذكر تعريف القطع الناقص فالمطلوب $2أ$

الاسم : ناقص
المركز : (٠،٠)
النوع : سيني

$أ^2 = 25 \leftarrow أ = 5$
$2أ = 10$

٣ ما الفرق المطلق لبعدي النقطة (٢،٠) عن بؤرتي القطع الزائد $4ص^2 - 9س^2 = 36$.

الحل : نتأكد أن النقطة تحقق المعادلة لذلك المطلوب $2أ$

$\frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{4} = 1$

$أ^2 = 9 \leftarrow أ = 3 \leftarrow 2أ = 6$

٤ ما الاختلاف المركزي للقطع $4س^2 - 5ص^2 = -20$

الحل : نجهز المعادلة أولاً وذلك بالقسمة على (-٢٠) ثم الترتيب

$-\frac{س^2}{5} + \frac{ص^2}{4} = 1 \Leftarrow \frac{ص^2}{4} - \frac{س^2}{5} = 1$

الاسم : زائد
المركز : (٠،٠)
النوع : صادي

المطلوب $هـ = \frac{جـ}{أ}$
$أ^2 = 4 \leftarrow أ = 2$
$ب^2 = 5$
$جـ^2 = 9 \leftarrow جـ = 3$
$هـ = \frac{3}{2} > 1$ (زائد)

٥ قطع مخروطي معادلته $س^2 - 2ص = \frac{4}{س + 2ص}$ جد الاختلاف المركزي .

الحل : نجهز المعادلة لأنها غير طبيعية وذلك بالضرب التبادلي

$(س - 2ص)(س + 2ص) = 4 \Leftarrow س^2 - 4ص^2 = 4 \div 4$

$\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{1} = 1$

الاسم : زائد
المركز : (٠،٠)
النوع : سيني

$أ^2 = 4 \leftarrow أ = 2$
$ب^2 = 1$
$جـ^2 = أ^2 + ب^2 = 5$
$جـ = \sqrt{5}$
$\therefore هـ = \frac{\sqrt{5}}{2}$

٦ ما الاختلاف المركزي لقطع ناقص البعد بين بؤرتيه يساوي طول محوره الأصغر

الحل :- لدينا قطع ناقص و المطلوب $هـ = \frac{جـ}{أ}$

ولدينا $2جـ = 2ب \Leftarrow جـ = ب$ ..... ①

لكن من كلمة ناقص $\Leftarrow جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ..... ②

بالتعويض بعلاقة ب في المعادلة الثانية

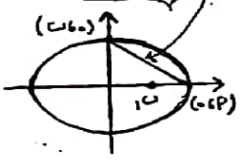
$جـ^2 = أ^2 - جـ^2 \Leftarrow 2جـ^2 = أ^2$ بالقسمة على $أ^2$

$\frac{جـ^2}{أ^2} = \frac{1}{2} \Leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

٧ ما الاختلاف المركزي للقطع الناقص الذي فيه البعد بين بؤرتيه يساوي البعد بين طرفي محوريه الأصغر والأكبر

الحل :- لدينا قطع ناقص و المطلوب $هـ = \frac{جـ}{أ}$

سوف نرسم كي نجد البعد بين طرفي الأصغر والأكبر



$2جـ = \sqrt{ب^2 + ب^2}$ ← مسافة بين نقطتين أو فيثاغورس

تربيع

$4جـ^2 = ب^2 + ب^2$ ..... ①

من كلمة ناقص $جـ^2 = أ^2 - ب^2$ ..... ②

بجمع المعادلتين $\Leftarrow 5جـ^2 = 2أ^2 \Leftarrow \frac{جـ^2}{أ^2} = \frac{2}{5} \Leftarrow \frac{جـ}{أ} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

ملاحظة : يجوز أن نرسم القطع صادي لأن المسافات لا تتأثر بالنوع ولا تتأثر بالمركز .

٨ النقطة ه (س،ص) تقع على منحنى قطع ناقص وكان مجموع بعديها عن النقطتين الثابتتين (١،٣) ، (-١،٥) يساوي ١٢ فما طول المحور الأصغر ؟

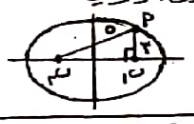
الاسم : ناقص
المركز : (-١،١)
النوع : سيني

مجموع البعدين $2أ = 12 \leftarrow أ = 6$
النقط الثابتة هما البؤرتان لذلك
البعد بينهما $2جـ = 8 \leftarrow جـ = 4$

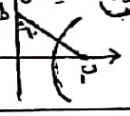
لكن $جـ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow 16 = 36 - ب^2 \Leftarrow ب^2 = 20$

$ب = \sqrt{20} \Leftarrow ب = \sqrt{4 \times 5} \Leftarrow ب = 2\sqrt{5}$ ∴ طول الأصغر $= 4\sqrt{5}$

تمرين : في كل من الحالات التالية جد الاختلاف المركزي .



$أ = 3$
$P = 5$
الجواب $\frac{4}{5}$



إيجاد معادلة القطع الناقص أو الزائد :-

* نحدد إسم القطع زائد أو ناقص وذلك من خلال الاختلاف المركزي
* نجد المركز ويكون في المنتصف بين زوجين مرتبين متماثلين بين الرأسين أو بين البؤرتين أو بين طرفي الأصغر والأكبر .
* نحدد نوع القطع سيني أو صادي كما يلي :-

أ) في البؤرتين او الرأسين نعتمد الاحداثي المتغير (نفس)

ب) في طرفي الأصغر أو المرافق نعتمد الاحداثي الثابت . (عكس)

ملاحظة :- اذا تعقدت الأمور نرسم ونتخيل

١ ما معادلة قطع ناقص رأساه $(\pm 5، 0)$ وطول الأصغر = ٨

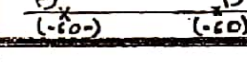
الحل : الإسم : ناقص

المركز : $(\frac{مجـ س}{2}، \frac{مجـ ص}{2}) \Leftarrow (0،0)$

النوع : سيني من خلال المتغيرات في الرأسين

∴ المعادلة $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

* يمكن تحديد النوع من الرسم



Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

نجد P^2 ، b^2

من الرأسين $2P = 10$ ⟵ $P = 5$ ⟵ $P^2 = 25$

طول الاصغر $2b = 8$ ⟵ $b = 4$ ⟵ $b^2 = 16$

∴ المعادلة $\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$ ⟵ $25b^2 + 16P^2 = 400$

٣ ما معادلة قطع زائد بؤرتاه (٥،٠) وطول محوره المرافق ٨ ؟

الحل: الاسم: زائد

المركز: (٠،٠) ⟵ $\frac{ص^2}{P^2} - \frac{س^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من البؤرتين $2d = 10$ ⟵ $d = 5$ ⟵ $d^2 = 25$

طول المرافق $2b = 8$ ⟵ $b = 4$ ⟵ $b^2 = 16$

لكن $d^2 = P^2 + b^2$ ⟵ $25 = P^2 + 16$ ⟵ $P^2 = 9$

المعادلة $\frac{ص^2}{9} - \frac{س^2}{16} = 1$

٤ ما معادلة قطع زائد بؤرتاه (٥،٠) ، (-٥،٠) وطول محوره الأكبر (٦)

الحل: الاسم: ناقص

المركز: (٠،٠) ⟵ $\frac{(ص-٠)^2}{P^2} + \frac{(س-٠)^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من البؤرتين $2d = 10$ ⟵ $d = 5$ ⟵ $d^2 = 25$

طول الأكبر $2P = 6$ ⟵ $P = 3$ ⟵ $P^2 = 9$

لكن $d^2 = P^2 - b^2$ ⟵ $25 = 9 - b^2$ ⟵ $b^2 = 16$

∴ المعادلة $\frac{ص^2}{9} + \frac{(س-٠)^2}{16} = 1$

٥ ما معادلة قطع زائد بؤرتاه (٠،٥) ، (٠،-٥) وطول محوره المرافق (٦)

الحل: الاسم: زائد

المركز: (٠،٠) ⟵ $\frac{ص^2}{P^2} - \frac{س^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من البؤرتين $2d = 10$ ⟵ $d = 5$ ⟵ $d^2 = 25$

طول المرافق $2b = 6$ ⟵ $b = 3$ ⟵ $b^2 = 9$

لكن $d^2 = P^2 + b^2$ ⟵ $25 = P^2 + 9$ ⟵ $P^2 = 16$

المعادلة $\frac{ص^2}{16} - \frac{س^2}{9} = 1$

٦ ما معادلة قطع زائد بؤرتاه (٠،٥) ، (٠،-٥) وطول محوره الأكبر (٦)

الحل: الاسم: ناقص

المركز: (٠،٠) ⟵ $\frac{(ص-٠)^2}{P^2} + \frac{(س-٠)^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من البؤرتين $2d = 10$ ⟵ $d = 5$ ⟵ $d^2 = 25$

طول الأكبر $2P = 6$ ⟵ $P = 3$ ⟵ $P^2 = 9$

لكن $d^2 = P^2 - b^2$ ⟵ $25 = 9 - b^2$ ⟵ $b^2 = 16$

∴ المعادلة $\frac{ص^2}{9} + \frac{س^2}{16} = 1$

٧ ما معادلة قطع مخروطي مركزه (٢،-١) والبعد بين بؤرتيه (١٦) والبعد بين رأسيه (١٢)

الحل: الاسم: مجهول لكن $2d = 16$ ⟵ $d = 8$

المركز: (٢،-١) $2P = 12$ ⟵ $P = 6$

النوع: لاستطيع $\frac{d}{P} = \frac{8}{6} < 1$ ∴ قطع زائد

لانه لايحدد لانه لدينا مسافات فقط (سؤال فارغ من الأزواج)

$d^2 = P^2 + b^2$ ⟵ $64 = 36 + b^2$ ⟵ $b^2 = 28$

القطع السيني $\frac{(س-٢)^2}{36} - \frac{(ص+١)^2}{28} = 1$

القطع الصادي $\frac{(ص+١)^2}{36} - \frac{(س-٢)^2}{28} = 1$

٨ ما معادلة مخروطي اختلافه المركزي $\frac{٤}{٣}$ ورأساه (٠،±٦).

الجواب $\frac{ص^2}{36} - \frac{س^2}{28} = 1$

٩ جد معادلة قطع زائد رأساه (٠،±٤) ويمر بالنقطة (٦،١)

الحل: الاسم: زائد

المركز: (٠،٠) ⟵ $\frac{ص^2}{P^2} - \frac{س^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من الرأسين $2P = 8$ ⟵ $P = 4$ ⟵ $P^2 = 16$

من النقطة (٦،١) ⟵ $\frac{36}{16} - \frac{1}{b^2} = 1$ ⟵ $b^2 = \frac{16}{20}$

∴ المعادلة $\frac{ص^2}{16} - \frac{س^2}{\frac{16}{20}} = 1$ ⟵ $\frac{ص^2}{16} - \frac{20س^2}{16} = 1$

١٠ ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه (-٢،٢) ، (٢،٢) ويمر منحناه بالنقطة (٥،٢)

الحل: الإسم: ناقص

المركز: (٠،٢)

النوع: سيني

$\frac{س^2}{P^2} + \frac{(ص-٢)^2}{b^2} = 1$

بؤرتاه ⟵ $2d = 4$ ⟵ $d = 2$

(٥،٢) تحقق $\frac{4}{P^2} + \frac{9}{b^2} = 1$ ⟵ $4b^2 + 9P^2 = P^2b^2$

لكن $d^2 = P^2 - b^2$ ⟵ $4 = P^2 - b^2$ ⟵ $4 + b^2 = P^2$

نعوض

$4b^2 + 36 + 9b^2 = 4b^2 + b^4$

$b^4 - 9b^2 - 36 = 0$ صفر

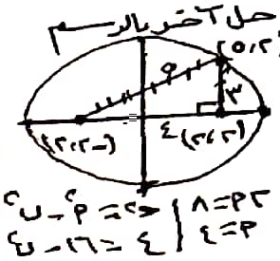
$(b^2 - 12)(b^2 + 3) = 0$ صفر

$b^2 = 12$

$b^2 = -3$ تهمل

المعادلة $\frac{س^2}{16} + \frac{(ص-٢)^2}{12} = 1$

حل آخر بالرسم



$2P = 8$ ⟵ $P = 4$

$P^2 - b^2 = 4$ ⟵ $16 - b^2 = 4$

$b^2 = 12$

١١ ما معادلة قطع زائد مركزه (٠،٠) والبعد بين بؤرتيه يساوي ١٦ والبعد بين رأسيه يساوي ١٢ ومحوره المرافق هو محور الصادات

الجواب $\frac{س^2}{36} - \frac{ص^2}{28} = 1$

١٢ ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{5}{3}$ وبؤرتاه (٩،١) ، (-٣،١).

الحل: الاسم: ناقص لان $d < 1$

المركز: (٣،١) ⟵ $\frac{(ص-٣)^2}{P^2} + \frac{(س-١)^2}{b^2} = 1$

النوع: من المتغيرات (صادي)

من البؤرتين $2d = 12$ ⟵ $d = 6$ ⟵ $d^2 = 36$

$d = \frac{5}{3}P$ ⟵ $\frac{6}{P} = \frac{5}{3}$ ⟵ $18 = 5P$ ⟵ $P = 3.6$ ⟵ $P^2 = 12.96$

Scanned with CamScanner

Omar Alabrualabr
www.omaralabr.com

١١ ما معادلة قطع ناقص مركزه (٣،٢) واحدى بؤرتيه (٣،٤) وطول محوره الاكبر ٦

الجواب $\frac{(س-٣)^٢}{٥}+\frac{(ص-٢)^٢}{١}=١$

١٢ ما معادلة قطع مخروطي احداثيات محوره المرافق (٣،١)، (٣،٥) والبعد بين رأسيه (٨).

الاسم : زائد مختلف مرافقه

المركز : (٣،١) $\Leftarrow \frac{(س-١)^٢}{ب^٢}-\frac{(ص+١)^٢}{ب^٢}=١$

النوع : من النوع سيني (او رأسي)

من المرافق ٢ب = ٨، ب = ٤ ← ب^٢ = ١٦

البعد بين رأسيه ٢أ = ٨ ← أ = ٤ ← أ^٢ = ١٦

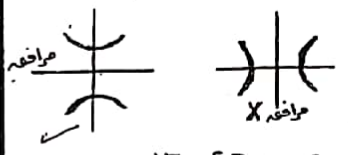
$\frac{(س-١)^٢}{١٦}-\frac{(ص+١)^٢}{١٦}=١$

١٣ ما معادلة قطع زائد مركزه (-٢،١) ومحوره المرافق يوازي محور السينات وطول القاطع ٨ والبعد بين بؤرتيه (١٠).

الحل : الاسم : زائد

المركز : (-٢،١)

النوع : صادي بعد الرسم



طول القاطع ٢أ = ٨ ← أ = ٤ ← أ^٢ = ١٦

البعد بين بؤرتيه ٢جـ = ١٠ ← جـ = ٥ ← جـ^٢ = ٢٥

لكن جـ^٢ = أ^٢+ب^٢ ← ٢٥ = ١٦+ب^٢ ← ب^٢ = ٩

$\frac{(ص-١)^٢}{١٦}-\frac{(س+٢)^٢}{٩}=١$

١٤ ما معادلة قطع مخروطي في وضعه القياسي واختلافه المركزي $\frac{٤}{٣}$ والبعد بين بؤرتيه يزيد ٤ وحدات عن البعد بين رأسيه.

الحل : الاسم : زائد لأن هـ > ١

المركز : (٠،٠) من كلمة قياسي

النوع : لاستطلاع المتحديد لذلك سيني وصادي .

هـ = $\frac{جـ}{أ}=\frac{٤}{٣}$ ← ① لاحظ اني جـ = ٤، أ = ٣ بل هي النسبة بينهم

لكن لدينا ٢جـ = ٢أ+٤ ← جـ = أ+٢ ---②

بتعويض ② في ① ← $\frac{أ+٢}{أ}=\frac{٤}{٣}$ ← ٣أ+٦ = ٤أ

∴ أ = ٦ ← جـ = ٨ ، أ^٢ = ٣٦

لكن جـ^٢ = أ^٢+ب^٢ ← ٦٤ = ٣٦+ب^٢ ← ب^٢ = ٢٨

المعادلة ١) سيني $\frac{س^٢}{٣٦}-\frac{ص^٢}{٢٨}=١$

٢) صادي $\frac{ص^٢}{٣٦}-\frac{س^٢}{٢٨}=١$

١٥ ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه (٢،١)، (٢،٥) وطول محوره الاكبر يساوي ٦ أمثال البعد البؤري

الجواب $\frac{(س-٢)^٢}{١٤٤}+\frac{(ص-٣)^٢}{١٤٠}=١$

١٦ قطع ناقص معادلته $\frac{س^٢}{١٦}+\frac{ص^٢}{ك^٢}=١$

احدى بؤرتيه (٢،٠) ما قيمة الثابت ك ؟؟ .

الاسم : ناقص

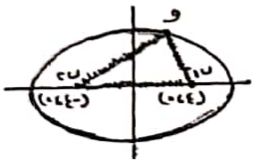
المركز : (٠،٠)

النوع : صادي من المتغيرات في البؤرة

بما انه صادي فان أ^٢ تحت ص^٢ ∴ أ^٢ = ك^٢

∴ ب^٢ = ١٦

١٧ ما معادلة قطع ناقص بؤرتاه ب(٠،٤)، ب'(٠،-٤) والنقطة و(س،ص) تقع على منحنى القطع فجيت محيط المثلث وب،ب' يساوي ٢٤



الحل : الاسم : ناقص

المركز : (٠،٠)

النوع : سيني من المتغيرات

بؤرتاه ٢جـ = ٨ ← جـ = ٤ ← جـ^٢ = ١٦

محيط المثلث = ٢٤ ← انظر الرسمة

٢أ + ٢جـ = ٢٤ ← أ + جـ = ١٢ ← أ+٤ = ١٢

أ = ٨ ← أ^٢ = ٦٤

لكن جـ^٢ = أ^٢-ب^٢ ← ١٦ = ٦٤-ب^٢ ← ب^٢ = ٤٨

∴ المعادلة $\frac{س^٢}{٦٤}+\frac{ص^٢}{٤٨}=١$

١٨ ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{٣}{٢}$ وأحد رأسيه (١،٢) والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي (١،١)

الحل : الاسم : ناقص لأن هـ < ١

المركز : نصفه مجهول (؟،١) ← (١،٥)

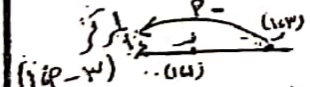
النوع : سيني من المتغيرات

$\frac{(س-٥)^٢}{أ^٢}+\frac{(ص-١)^٢}{ب^٢}=١$

هـ = $\frac{جـ}{أ}$ ← $\frac{٣}{٢}=\frac{جـ}{أ}$ ← ٢جـ = ٣أ ---①

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة = ٢

أ - جـ = ٢ ---② ب ر$_١$ = ٢



بحل المعادلتين أ = ٦ ، جـ = ٤

∴ أصبح المركز (٢-،٦-١) ← (١،٣-)

أ^٢ = ٣٦ ، جـ^٢ = ١٦

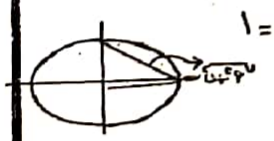
لكن جـ^٢ = أ^٢-ب^٢ ← ١٦ = ٣٦-ب^٢ ← ب^٢ = ٢٠

∴ المعادلة $\frac{(س+٣)^٢}{٣٦}+\frac{(ص-١)^٢}{٢٠}=١$

١٩ ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي (٢) واحد رأسيه (-٣،١) والبؤرة البعيدة عن ذلك الرأس (-٩،١)

الجواب $\frac{(ص-١)^٢}{٤}-\frac{(س+٥)^٢}{١٢}=١$

٢٠ ما معادلة قطع ناقص سيني مركزه (٠،٠) واختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$ والمسافة بين طرفي محوريه الاكبر والاصغر = $\sqrt{١٤}$



الحل : الاسم : ناقص
المركز : (٠،٠)
النوع : سيني
$\Leftarrow \frac{س^٢}{أ^٢}+\frac{ص^٢}{ب^٢}=١$

هـ = $\frac{جـ}{أ}=\frac{١}{٢}$ ← أ = ٢جـ ---①

المسافة بين الطرفين = $\sqrt{١٤}$

$\sqrt{أ^٢+ب^٢}=\sqrt{١٤}$

أ^٢+ب^٢ = ١٤ ---②

لكن جـ^٢ = أ^٢-ب^٢ ---③

بحل المعادلات ①، ②، ③

فإن أ^٢ = ٨ ب^٢ = ٦

∴ المعادلة $\frac{س^٢}{٨}+\frac{ص^٢}{٦}=١$

Scanned with CamScanner

المعادلة العامة للقطوع هي:

$أ س^2 + ب ص^2 + جـ س + د ص + هـ = ٠$

حيث $أ ، ب ، جـ ، د ، هـ$ ثوابت $أ ، ب \neq ٠$ معاً

تمييز القطوع المخروطية:

① في الدائرة كل من $س^2$، $ص^2$ ومعاملاتهم متساوية والإشارة بينهم (+) وتخلو من الحد س ص أي $أ = ب$

② في المكافئ لا تجتمع $س^2$ مع $ص^2$ أي أن $أ \times ب = ٠$

③ في الناقص كل من $س^2$، $ص^2$ والإشارة بينهم (+) والمعاملات مختلفة أي $أ \times ب > ٠$

④ في القطع الزائد كل من $س^2$، $ص^2$ والإشارة بينهم (−) ولا يهم المعاملات أي $أ \times ب < ٠$

ملاحظات حول الاختلاف المركزي

* في الدائرة $هـ = ٠$ * في المكافئ $هـ = ١$

* في الناقص $هـ < ١$ * في الزائد $هـ > ١$

سؤال: صنف كل من المعادلات التالية:

ملاحظة: قبل الحل يجب أن تكون المعادلة جاهزة بحيث يكون الطرف الأيسر = صفر (نجعل $س^2$ بجانب $ص^2$)

① $س^2 + ٣ ص - ص^2 = ٥ + ٢ س$ ( )

② $٢ س^2 = ٤ - ٢ ص + ٦ س$ ( )

③ $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٨} = ٧$ ( )

④ $٤ س^2 = ٥ ص - ٤ ص^2 + ١$ ( )

⑤ $٢ ص^2 - ٢ س^2 = ٤$ ( )

⑥ $\frac{١}{٤} ص^2 = ٦ س + \frac{١}{٤} س^2 - ١$ ( )

⑦ $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٩} = ١$ ( )

⑧ $\frac{س^2}{٨} - \frac{ص}{٨} = ١$ ( )

⑨ $(س - ٢)^2 + (ص + ١)^2 = (س + ١)^2 - (ص - ٢)^2$ ( )

* **سؤال:** ما قيم $ك$ التي تجعل المعادلة $٢ س^2 + ك ص^2 = ٨$ ← المعادلة جاهزة لأنه الإشارة ⊕

تمثل ① قطع زائد ② قطع ناقص

الحل: ① في الزائد $أ \times ب < ٠$ ⇐ $٢ \times ك <$ صفر

∴ قيم $ك < ٠$

② في الناقص $أ \times ب > ٠$ ⇐ $٢ \times ك >$ صفر ⇐ $ك > ٠$

سؤال: $(م - ٣) س^2 + (م - ٤) ص^2 + ٦ س + ٨ ص + ٢٠ = ٠$

جد قيم $م$ التي تجعل القطع ① مكافئ ② ناقص ③ زائد.

الحل: ① في المكافئ $أ \times ب =$ صفر ⇐ $(م - ٣)(م - ٤) = ٠$

لمعادلة جاهزة لأن ⊕ $م = ٣$ $م = ٤$

② في الناقص $أ \times ب > ٠$

$+++ \; ٣ \; --- \; ٤ \; +++$

$م \in (-\infty ، ٣) \cup (٤ ، \infty)$

③ في الزائد $م \in (٣ ، ٤)$

③ ما قيم $م$ التي تجعل المعادلة $\frac{س^2}{٧ - م} + \frac{ص^2}{٤ - م} = ١$ تمثل قطع زائد.

الحل: $(٧ - م)(٤ - م) < ٠$ أو $\frac{١}{٧ - م} \times \frac{١}{٤ - م} <$ صفر

$+++ \; ٤ \; --- \; ٧ \; +++$ ⇐ $م \in (٤ ، ٧)$

④ ما قيم $ك$ التي تجعل المعادلة $٢ س^2 + ك ص^2 = ٨$ تمثل قطع ناقص صادي.

الحل: أولاً: ناقص عندما $ك >$ صفر

ثانياً: صادي بعد التجهيز

$\frac{٢ س^2}{٨} + \frac{ك ص^2}{٨} = ١$ ⇐ $\frac{س^2}{٤} + \frac{ص^2}{\frac{٨}{ك}} = ١$

∴ $\frac{٨}{ك} > ٤$ ⇐ $٨ > ٤ ك$ ⇐ $ك < ٢$

∴ $ك \in (٠ ، ٢)$

$\rightarrow \; ٢ \; \leftarrow \; ك \; \rightarrow \; ٠$

⑤ إذا كانت $\frac{(س - ٣)^2}{م^2 - ٢} + \frac{(ص - ٥)^2}{٦ + م ٢} = ١$ تمثل معادلة دائرة فما مجموعة قيم $م$؟

الحل: $م^2 - ٢ = ٦ + م ٢$ ← $م^2 - ٢ م - ٨ = ٠$

$(م - ٤)(م + ٢) = ٠$ ← $م = ٤ ، -٢$

تدريب: قطع مخروطي معادلته $٢ س^2 - ٣ ص^2 + ١٨ ص = ك$ ما قيمة الثابت $ك$ التي تجعل محوره القاطع يوازي محور السينات

الحل: تجهيز المعادلة بحيث الطرف الأيسر = ١

وذلك بإكمال المربع ...

$\frac{٢ س^2}{ك - ٢٧} - \frac{٣ (ص - ٣)^2}{ك - ٢٧} = ١$

الجواب $ك > ٢٧$

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

صنف كل من القطوع التالية وجد عناصرها الأساسية

① $\frac{1}{4}س^2 + س + 2ص + 3 =$ صفر

الحل : قطع مكافئ لكنه غير حاهز بالضرب في ٤
ثم إكمال المربع لتصبح المعادلة :

$(س+2)^2 = -8(ص+1)$

المحور $س = -2$ — شعب السينات
الرأس $(-2، -1)$ — $4ل = 8 \Leftarrow ل = 2$
البؤرة $(-2، -1-ل)$ — الدليل $ص = 1$
∴ البؤرة $(-2، -3)$ — $ص =$ الرأس $+ ل$

② $9س^2 + 4ص^2 = 8ص + 32$ ← نجهزها

الحل : $9س^2 + 4ص^2 - 8ص = 32$

$9س^2 + 4(ص^2 - 2ص + 1) = 32 + 4$

$9س^2 + 4(ص-1)^2 = 36$ بالقسمة على ٣٦

$\frac{س^2}{4} + \frac{(ص-1)^2}{9} = 1$

الشكل ناقص	المركز $(1، 0)$	النوع إهليلجي
$ل^2 = 9 \leftarrow ل = 3$	$ب^2 = 4 \leftarrow ب = 2$	$ج^2 = 9-4 = 5 \leftarrow ج = \sqrt{5}$
الرأسان $(4، 0)، (-2، 0)$	طرفي الأصغر $(1، 2)، (1، -2)$	البؤرتان $(1، \sqrt{5})، (1، -\sqrt{5})$
طول الأكبر $2ل = 6$	طول الأصغر $2ب = 4$	البعد البؤري $2ج = 2\sqrt{5}$
معادلته $س = 0$	معادلته $ص = 1$	$هـ = \frac{ج}{ل} = \frac{\sqrt{5}}{3} < 1$

③ $2س^2 - 12س - (2ص-4)^2 = -20$ نجهزها

$2(س^2 - 6س + 9) - 2^2(ص-2)^2 = -20 + 18$

$2(س-3)^2 - 4(ص-2)^2 = -2$ ← بالقسمة على -2

$\frac{(س-3)^2}{-1} + 2(ص-2)^2 = 1$ ← نعيد الترتيب

$\frac{(ص-2)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(س-3)^2}{1} = 1$

الشكل : زائد	المركز $(3، 2)$	النوع : إهليلجي
$ل^2 = \frac{1}{2} \leftarrow ل = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$ب^2 = 1 \leftarrow ب = 1$	$ج^2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$
الباقي ...		$هـ = \frac{ج}{ل} =$ الباقي ...

الحل الهندسي :

هو الشكل الناتج عن حركة نقطة في المستوى البياني وليتم التعامل معه بإحدى ٣ طرق :-

أولاً : عندما ينطبق النص تماماً على تعريف القطع عند ذلك نجد معادلة ذلك القطع .

ثانياً : عندما لا ينطبق النص على إحدى التعريفات عندئذ نعتمد على الهندسة والترجمة .

ثالثاً : عندما يكون لدينا معادلات مثلثية عندئذ نحتاج مطابقات

① ما معادلة الحل الهندسي لمجموعة النقط $ن(س، ص)$ المتحركة في المستوى بحيث مجموع بعدها عن النقطتين الثابتتين $أ(4، 0)$، $ب(-4، 0)$ يساوي ١٠ وحدات .

الحل : الحل الهندسي هو قطع ناقص بؤرتاه $(\pm 4، 0)$
وطول محوره الأكبر $2ل = 10$

الشكل : ناقص — المركز $(0، 0)$ — النوع : إهليلجي

$2ل = 10 \Leftarrow ل = 5 \Leftarrow ل^2 = 25$ — $ج = 4 \Leftarrow ج^2 = 16$

$ب^2 = ل^2 - ج^2 \Leftarrow 16 = 25 - ب^2 \Leftarrow ب^2 = 9$

∴ المعادلة $\frac{ص^2}{25} + \frac{س^2}{9} = 1$

② ما معادلة الحل الهندسي لمجموعة النقط $ن(س، ص)$ المتحركة في المستوى بحيث بعدها عن النقطة $(4، -1)$ يساوي بعدها عن المستقيم $س = -2$.

الحل : هذا تعريف قطع مكافئ بؤرته $(4، 0)$ ودليله $س = -2$

نرسم القطع

الرأس $(1، 0)$ — $ل = 3$ — $س$ — $(0، 1)$ — $(0، 4)$ — $ص$ — $ن$ — $س = -2$

المعادلة $(ص-0)^2 = 12(س-1)$

$ص^2 = 12(س-1)$ يمكنك الحل بالترجمة .

تمرين محلول : أوجد معادلة الحل الهندسي لمجموعة النقط المستوية $ن(س، ص)$ إذا كان الفرق المطلق بين بُعدي $ن(س، ص)$ عن النقطتين الثابتتين $(1، 5)$، $(-1، 5)$ يساوي ٨ وحدات

الحل : عن التعريف : القطع زائد

البؤرتان هما $(1، 5)$، $(-1، 5)$ ومنهما نجد النوع الإهليلجي (سيني)

المركز $= (\frac{5+5}{2}، \frac{1+1}{2}) = (0، 1)$

البعد البؤري $2ج = 5 - (-5) = 10 \Leftarrow ج = 5$

$2ل = 8 \leftarrow ل = 4$

$ب^2 = ج^2 - ل^2$

$ب^2 = 25 - 16 = 9$

المعادلة : $\frac{(ص-1)^2}{16} - \frac{(س-0)^2}{9} = 1$

المعادلة : $\frac{(ص-1)^2}{9} - \frac{(س-0)^2}{16} = 1$

③ جد معادلة الحل الهندسي لنقطة متحركة $ن(س، ص)$ بحيث تبعدها عن النقطة $(-2، 3)$ يساوي ٥ وحدات دائماً

الحل : الحل الهندسي دائرة مركزها $(-2، 3)$ ونصف

Omar Al-Jabr
www.omaraljabr.com
عمر الجبر

Scanned with CamScanner

وطولها (٥) . $(س+٢)^{٢} + (ص-٣)^{٢} = ٢٥$

② ما معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط (س، ص) المتحركة في المستوى بحيث بعدها عن النقطة (٤، ٠) يساوي $\frac{٤}{٣}$ بعدها عن المستقيم ٤ص = ٩ ؟

الحل: النص لا ينطبق على أي تعريف

بُعد و عن (٠، ٤) = $\frac{٤}{٣}$ بُعد و عن المستقيم

$\sqrt{(س-٠)^{٢} + (ص-٤)^{٢}} = \frac{٤}{٣} \times \frac{|٤ص - ٩|}{\sqrt{١٦+٠}}$ ← تربيع ونفك

$(س^{٢} + ص^{٢} - ٨ص + ١٦) = \frac{١}{٩} (٤ص - ٩)^{٢} \times ٩$ للجميع

$٩س^{٢} + ٩ص^{٢} - ٧٢ص + ١٤٤ = ١٦ص^{٢} - ٧٢ص + ٨١$

$٩س^{٢} - ٧ص^{٢} = -٦٣$ ⇐

$\frac{ص^{٢}}{٩} - \frac{س^{٢}}{٧} = ١$ زائد

تمرين محلول: ما معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط د(س، ص) المتحركة في المستوى بحيث مجموع مربعي بُعديها عن النقطتين الثابتتين P (٤، ٠) ، ب (-٤، ٠) يساوي ٨٢

الحل: النص لا ينطبق على أي تعريف

$(\text{بُعد د عن } (٤، ٠))^{٢} + (\text{بُعد د عن } (-٤، ٠))^{٢} = ٨٢$

$(\sqrt{(س-٤)^{٢} + (ص-٠)^{٢}})^{٢} + (\sqrt{(س+٤)^{٢} + (ص-٠)^{٢}})^{٢} = ٨٢$

$(س-٤)^{٢} + ص^{٢} + (س+٤)^{٢} + ص^{٢} = ٨٢$

$س^{٢} - ٨س + ١٦ + ص^{٢} + س^{٢} + ٨س + ١٦ + ص^{٢} = ٨٢$

$٢س^{٢} + ٢ص^{٢} + ٣٢ = ٨٢$

$٢س^{٢} + ٢ص^{٢} = ٥٠$ ⇐

$س^{٢} + ص^{٢} = ٢٥$ دائرة

⑤ جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك على بُعدين متساويين من محوري الإحداثيين (السينات والصادات).

الحل:

بُعد (س، ص) عن السينات (ص = ٠) = بُعد (س، ص) عن الصادات (س = ٠)

$\frac{|ص|}{١} = \frac{|س|}{١}$

$|\frac{ص}{س}| = ١$ ← ص = س أو ص = -س

حل آخر: من الرسم أو الخيال.

⑥ جد المحل الهندسي لنقطة متحركة و(س، ص) في المستوى بحيث تبعد عن المستقيم ٤ص = ٣س + ٥ بُعدًا ثابتًا مقداره (١) وحدة وتمر أثناء حركتها بأحد القطع ص^{٢} = ٨س

الحل: بُعد (س، ص) عن المستقيم -٣س + ٤ص - ٥ = ٠ يساوي (١)

$\frac{|-٣س + ٤ص - ٥|}{\sqrt{٩+١٦}} = ١ \Leftarrow |-٣س + ٤ص - ٥| = ٥$

تذكر المطلق له قاعدتين

إما $-٣س + ٤ص - ٥ = ٥$ ⇐

$-٣س + ٤ص = ١٠$ تحل لأنه (٠، ٠) لا تحققها

أو $-٣س + ٤ص - ٥ = -٥$

$-٣س + ٤ص = ٠$ وهي المعادلة المطلوبة.

∴ المحل الهندسي مستقيم يوازي المستقيم الأصلي

⑦ تتحرك نقطة و(س، ص) على منحنى بحيث يتحدد موقعها في اللحظة ن

س = ٣ جتا ن ، ص = ٤ جا ن

جد معادلة المسار وما نوعه؟

الحل: هذا النوع الذي يحتوي على معادلات مثلثية سوف نقوم بعمليات رياضية على المعادلتين لنحصل على معادلة ما لوفة.

$س = ٣ \text{ جتا } ن$ ، $ص = ٤ \text{ جا } ن$ ... (نحصل معادلة المثلثي ١)

$\frac{س}{٣} = \text{جتا } ن$ ، $\frac{ص}{٤} = \text{جا } ن$ ... (تربيع)

Omar Aljabr عمر الجابر www.omaraljabr.com

Scanned with CamScanner

$\frac{س^2}{9} = جتا^2 هـ$ ... ① ، $\frac{ص^2}{16} = جا^2 هـ$ ... ②

بجمع ① و ② $\frac{س^2}{9} + \frac{ص^2}{16} = 1$ قطع ناقص

(الحل الآخر) نبدأ بالمطابقة $جا^2 هـ + جتا^2 هـ = 1$ (المطلوب)

$(\frac{ص}{4})^2 + (\frac{س}{3})^2 = 1$

$\frac{ص^2}{16} + \frac{س^2}{9} = 1$

---

⑤ تتحرك نقطة و (س ، ص) بحيث $س = 2 جا هـ + جتا هـ$

$ص = 2 جا هـ جتا هـ$ حيث هـ زاوية متغيرة .

اثبت أن النقطة تتحرك على منحنى قطع زائد .

الحل : $(س = 2 جا هـ + جتا هـ)$ نربع

$+ \quad س^2 = 4 جا^2 هـ + 4 جا هـ جتا هـ + جتا^2 هـ$

$\Leftarrow س^2 = 1 + 4 جا هـ جتا هـ$ ..... ①

$* (ص = 2 جا هـ جتا هـ)$ نربع

$ص^2 = 4 جا^2 هـ جتا^2 هـ \Leftarrow$

$\frac{ص^2}{4} = جا^2 هـ جتا^2 هـ$ ..... ②

نعوض ② في ①

$س^2 = 1 + \frac{ص^2}{4} \Leftarrow س^2 - \frac{ص^2}{4} = 1$ قطع زائد

(تمرين محلول) تتحرك نقطة و (س ، ص) بحيث

$س = 3 + 2 قا هـ$ ، $ص = 4 + 3 ظا هـ$

جد معادلة المسار وحدد نوعه .

الحل : $\frac{س - 3}{2} = قا هـ$ ، $\frac{ص - 4}{3} = ظا هـ$

$قا^2 هـ - ظا^2 هـ = 1$

$\frac{(س-3)^2}{4} - \frac{(ص-4)^2}{9} = 1$ قطع زائد

(تمرين محلول) تتحرك نقطة و (س ، ص) بحيث

$س = 5 + 3 جا هـ$ ، $ص = 2 + 3 جتا هـ$

ما معادلة المحل الهندسي وما نوعه ؟

الحل $\frac{س - 5}{3} = جا هـ$ ، $\frac{ص - 2}{3} = جتا هـ$

$جا^2 هـ + جتا^2 هـ = 1$

$\frac{(س-5)^2}{9} + \frac{(ص-2)^2}{9} = 1$ دائرة

تمارين متنوعة على القطوع :-

① قطع ناقص سيني معادلته $ل: س + 5 ص = 17$

اثبت أن $ل = \frac{17}{س^2 + ص^2}$

الحل : نجهز المعادلة أولاً وذلك بالقسمة على 17

$\frac{س^2}{\frac{17}{5}} + \frac{ص^2}{\frac{17}{1}} = 1$

المركز (0 ، 0)
البؤرة سيني
البعد : ناقص

بما أن القطع سيني فإن

$ب^2 = \frac{17}{5}$ لكن $ب$ طولة ناقص $\Rightarrow ب^2 = أ^2 - جـ^2$

$\frac{17}{5} - جـ^2 = \frac{17}{ل} \Leftarrow أ^2 + جـ^2 = \frac{17}{ل}$

$\Leftarrow ل = \frac{17}{أ^2 + جـ^2}$

---

② النقطة و (س ، ص) تقع على منحنى القطع الناقص الذي معادلته $4 س^2 - 16 س + 9 ص^2 - 54 ص + 61 = 0$

جد محيط المثلث و ل ، ل حيث ل ، ل هما بؤرتي القطع

الحل : التبيه أن المطلوب $2أ + 2جـ$

نجهز المعادلة

$4 س^2 - 16 س + 9 ص^2 - 54 ص = -61$

$4 (س^2 - 4 س) + 9 (ص^2 - 6 ص) = -61$

$4 (س^2 - 4 س + 4) + 9 (ص^2 - 6 ص + 9) = -61 + 16 + 81$

$4 (س - 2)^2 + 9 (ص - 3)^2 = 36$ ... بالقسمة على 36

$\frac{(س-2)^2}{9} + \frac{(ص-3)^2}{4} = 1$

البسم : ناقص
المركز (2 ، 3)
النوع : سيني

$أ^2 = 9$ ، $ب^2 = 4$

$جـ^2 = 9 - 4 = 5$

$جـ = \sqrt{5}$

المطلوب $2أ + 2جـ = 6 + 2\sqrt{5}$

---

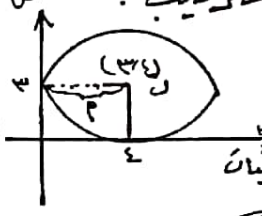
③ ما معادلة قطع ناقص محوريه الأكبر والأصغر هما محوري الإحداثيات والمسافة بين البؤرتين تساوي ١٢ والمساحة 18π وحدة مربعة

Omar Gabr Gabr
www.maraljabr.com

Scanned with CamScanner

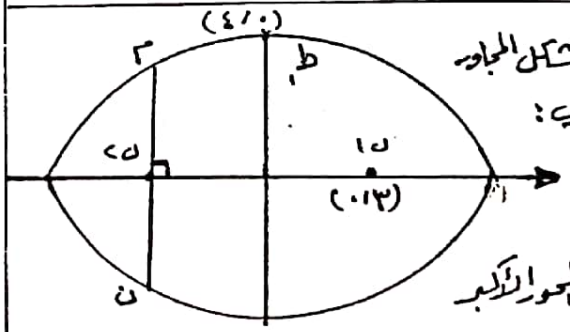
الحل:
الدليل ناقص
المركز : (٠،٠) نقطة تقاطع محوريه
النوع : صادي لأن البعد الأكبر على الصادات
$٢ب = ١٢ \leftarrow ب = ٦$
المساحة $= ب \times أ \times \pi$
$١٨\pi = ٦ \times أ \times \pi \Leftarrow أ = ٣$
∴ المعادلة :
$\frac{ص^٢}{٣٦} + \frac{س^٢}{٩} = ١$

④ ما معادلة قطع ناقص يمس محوري السينات والصادات في النقطتين (٤،٠)، (٠،٣) على الترتيب.



الحل : الدليل : ناقص
المركز : (٤،٣) بعد الرسم
النوع : سيني لأن البعد الأكبر على السينات
$ب = ٤$ ، $أ = ٣$ من الرسم
∴ المعادلة : $\frac{(س-٤)^٢}{١٦} + \frac{(ص-٣)^٢}{٩} = ١$

⑤ من الشكل المجاور جد ما يلي :



ⓐ طول المحور الأكبر

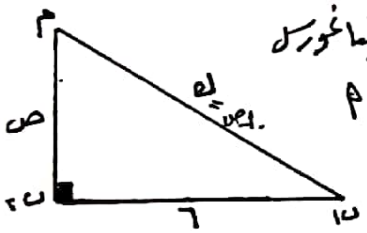
ⓑ طول القطعة المستقيمة $\overline{م ك}$

الحل : لاحظ لدينا قطع ناقص سيني مركزه (٠،٠)
$أ = ٣$ ، $ب = ٤$ لكن
$ج^٢ = ب^٢ - أ^٢$
$٩ = ب^٢ - ١٦ \Leftarrow ب^٢ = ٢٥ \Leftarrow ب = ٥$
∴ طول المحور الأكبر $٢ب = ١٠$

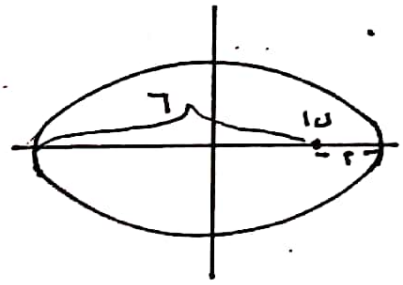
ب) لإيجاد طول $\overline{م ك}$ نجد م كزوج مرتب

وبما أن (-٣، ص) ، وسوف نجد معادلة القطع لأن النقطة م تحقق المعادلة:
والمعادلة هي $\frac{س^٢}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$
النقطة (-٣، ص) تحقق $\frac{٩}{٢٥} + \frac{ص^٢}{١٦} = ١$
$\frac{ص^٢}{١٦} = ١ - \frac{٩}{٢٥}$
$ص^٢ = \frac{١٦}{٢٥} \times ١٦ \leftarrow ص = \frac{٤}{٥} \times ٤$
$\leftarrow ص = \frac{١٦}{٥} = ٣,٢$
∴ طول $\overline{م ك} = ٢ \times ٣,٢ = ٦,٤$ (من التماثل)

حل آخر
نجدها عن طريق فيثاغورس
حيث $ل + ص = ٢ب$
$ل + ص = ١٠$
$ل = ١٠ - ص$



⑦ الشكل المجاور يمثل قطع ناقص مركزه (-١، ٢) جد معادلته.



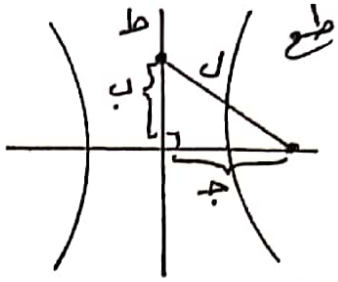
الدليل : ناقص
المركز : (-١، ٢)
النوع : سيني
لاحظ من الرسم أن $٢ب = ٨$
$ب = ٤$
مفتاح الحل أن ترسم البؤرة الأخرى
حيث المسافة بين البؤرتين $٢جـ = ٤$
$جـ = ٢ \Leftarrow جـ^٢ = ٤$
لكن $جـ^٢ = ب^٢ - أ^٢$
$٤ = ١٦ - أ^٢ \leftarrow أ^٢ = ١٢$
المعادلة $\frac{(س+١)^٢}{١٦} + \frac{(ص-٢)^٢}{١٢} = ١$

Omar Aljabr
www.omaraljabr.com
Scanned with CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

⑦ ما الاختلاف المركزي لقطع زائد فيه البعد بين أحد بؤرتيه وطرف محوره المرافق = طول محوره القاطع

الحل:



$ل = \sqrt{ل^2 + ﺟ^2}$

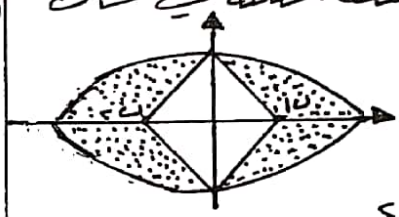
$ل = ٢ ﺃ$

$\therefore ٢ﺃ = \sqrt{ل^2 + ﺟ^2}$

$٤ ﺃ^2 = ل^2 + ﺟ^2$ لكن

$ﺟ^2 = ﺃ^2 + ل^2$ ... $\frac{ﺟ}{ﺃ} = \sqrt{\frac{٥}{٢}}$

⑧ ما مساحة المنطقة المظللة في الشكل المجاور علمًا بأن ل ، ك هما بؤرتي القطع الناقص



$\frac{س^2}{١٠٠} + \frac{ص^2}{٦٤} = ١$

الحل : $أ^2 = ١٠٠ \Leftarrow أ = ١٠$

$ب^2 = ٦٤ \Leftarrow ب = ٨$

$ﺟ^2 = ١٠٠ - ٦٤ = ٣٦ \leftarrow ﺟ = ٦$

مساحة القطع الناقص $= \pi أ ب = \pi \times ١٠ \times ٨ = ٨٠ \pi$

مساحة المثلثين $= ٢ \times (\frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨) = ٩٦$

مساحة المنطقة المظللة = م القطع - م المثلثين

$= ٨٠ \pi - ٩٦$

⑨ جد معادلة المحل الهندسي لمجموعة النقط المتحركة و (س ، ص) بحيث قياس الزاوية أ ل ق دائمًا حيث أ (-٢ ، ٥) ، ل (٤ ، -٣)

الحل: من فيثاغورس $(أ ل)^2 = (ل و)^2 + (أ و)^2$

$٣٦ + ٦٤ = (س - ٤)^2 + (ص + ٣)^2 + (س + ٢)^2 + (ص - ٥)^2$

$٢ س^2 + ٢ ص^2 - ٤ س - ٤ ص - ٤٦ = ٠$

∴ دائرة يوجد حل آخر من المعادلة

⑩ جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تمر على بعدين متساويين من النقطتين (٢ ، ٠) ، (-٢ ، ٠)

الحل: بُعد (س ، ص) عن (٢ ، ٠) = بُعد (س ، ص) عن (-٢ ، ٠)

$\sqrt{(س - ٢)^2 + ص^2} = \sqrt{(س + ٢)^2 + ص^2}$

نربع ونختصر

$س^2 - ٤ س + ٤ + ص^2 = س^2 + ٤ س + ٤ + ص^2$

$-٨ س = ٠ \longleftarrow س = ٠$ (محور الصادات)

⑪ ما معادلة قطع مخروطي بؤرتاه (٣ ، ٢) ، (٣ ، ٨) والبعد بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة منه (١) وحدة

الحل: الاحتمال غير محدود لذلك نأخذ الحالتين.

أولاً: الناقص

المركز: (٣ ، ٥)

النوع: أفقي

$\frac{(س - ٣)^2}{ب^2} + \frac{(ص - ٥)^2}{أ^2} = ١$

من البؤرتين $\Rightarrow ﺟ = ٣$

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة = ١

$أ - ﺟ = ١ \Leftarrow أ - ٣ = ١ \Leftarrow أ = ٤$

لكن $ﺟ^2 = أ^2 - ب^2 \Leftarrow ٩ = ١٦ - ب^2 \Leftarrow$

$ب^2 = ٧$

$\therefore$ المعادلة $\frac{(س - ٣)^2}{٧} + \frac{(ص - ٥)^2}{١٦} = ١$

ثانيًا: الزائد

المركز: (٣ ، ٥)

النوع: أفقي

$\frac{(س - ٣)^2}{ب^2} - \frac{(ص - ٥)^2}{أ^2} = ١$

من البؤرتين $\Rightarrow ﺟ = ٣$

المسافة بين الرأس والبؤرة القريبة = ١

$ﺟ - أ = ١ \Leftarrow ٣ - أ = ١ \Leftarrow أ = ٢$

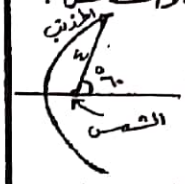
لكن $ﺟ^2 = أ^2 + ب^2 \Leftarrow ٩ = ٤ + ب^2 \Leftarrow ب^2 = ٥$

$\therefore$ المعادلة $\frac{(س - ٣)^2}{٥} - \frac{(ص - ٥)^2}{٤} = ١$

Scanned with CamScanner

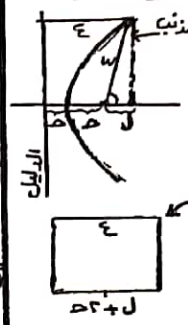
عمر الجبر Omar Alijabr www.omaraljabr.com

(١٣) الشكل المجاور يمثل مسار مذنب حول الشمس التي تقع في بؤرة القطع جد اقل مسافة بين المذنب والشمس علماً بأنه الزاوية بين المذنب والشمس ٦٠° وكان البعد بينهما في تلك اللحظة ٤ وحدات فلكية



الحل : اقرب مسافة عندما يصل المذنب الى رأس القطع حيث المسافة هي ﻫ

سوف نرسم دليل القطع ونعتمد على تعريف القطع المكافئ من التعريف بُعد المذنب عن الشمس (البؤرة) يساوي بُعد المذنب عنه الدليل ويساوي (٤) سوف نستخدم الزاوية لايجاد ل .



ظا ٦٠ = المحاور / الوتر ⇐ √٣ / ١ = ل / ٤ ⇐ ل = ٤√٣

لكن ل + ﻫ = ٤ من الشكل المستطيل

ل + ٢ﻫ = ٤ ⇐ ٤√٣ + ٢ﻫ = ٤

٢ﻫ = ٤ - ٤√٣ ⇐ ﻫ = ٢ - ٢√٣

(١٤) $\frac{س^2}{100} + \frac{ص^2}{36} = 1$ قطع ناقص جد مايلي

أ) احداثيات البؤرتين ب١ ، ب٢ ب) المقدار ب١ ب٢

ﺟ) ب١ م + م ب٢ حيث م نقطة تقع على المنحنى

الحل : الرسم : ناقص المركز (٠،٠) النوع : سيني

* أ٢ = ١٠٠ ، ب٢ = ٣٦ ، ﻫ٢ = أ٢ - ب٢ = ٦٤

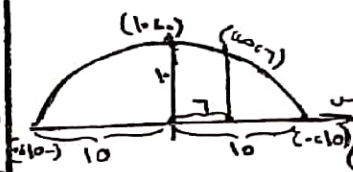
ﻫ = ٨ ← البؤرتان ب١ (٨،٠) ، ب٢ (-٨،٠)

* المقدار ب١ ب٢ = ٢ﻫ = ١٦

* ب١ م + م ب٢ = ٢أ = ٢٠

(١٥) نفق لعبور السيارات على شكل نصف قطع ناقص طول قاعدته (عرضه) ٣٠ متر وأقصى ارتفاع له عن الارض ١٠ متر جد ارتفاع النفق على بعد ٦ متر من مركز النفق

الحل : سوف نجد معادلة قطع ناقص لان النقطة (٦،ص) تحقق المنحنى والمطلوب ص (ارتفاع النفق عن بعد ٦)



$\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

أ = ١٥ ⇐ أ٢ = ٢٢٥ ⇐ $\frac{س^2}{225} + \frac{ص^2}{100} = 1$

ب = ١٠ ⇐ ب٢ = ١٠٠

النقطة (٦،ص) ⇐ $\frac{36}{225} + \frac{ص^2}{100} = 1$ ⇐ ص = √٨٤

(١٦) ما معادلة قطع زائد مركزه (٠،٠) وبؤرتاه على محور السينات ويمس المستقيم ص = √٣ س - ٢ في النقطة (٢√٣ ، ٤)

الحل :- الاسم : زائد المركز (٠،٠) النوع : سيني

$\frac{س^2}{أ^2} - \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ ولكن

النقطة (٢√٣ ، ٤) تحقق المعادلة ⇐ $\frac{12}{أ^2} - \frac{16}{ب^2} = 1$ ... ①

لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس

	هامش
$\frac{3ب^2}{2أ^2} = \sqrt{3}$	$\frac{2س}{أ^2} - \frac{2ص}{ب^2} \cdot \frac{ص}{س} = 0$
⇐ أ٢ = ب٢ ... ②	$\frac{ص}{س} = \frac{ب^2}{أ^2 ص}$ ⇐ $\frac{3ب^2}{أ^2} = \frac{ب^2}{أ^2 ص}$

∴ المعادلة $\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{8} = 1$

(١٧) ما معادلة قطع زائد اختلافه المركزي ٢ وبؤرتاه هما نفس بؤرتا القطع الناقص ٩س٢ = ٢٢٥ - ٢٥ص٢

الحل : نبدأ أولاً ببؤرتي القطع الناقص .

٩س٢ = ٢٢٥ - ٢٥ص٢ ⇐ $\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{9} = 1$

المركز (٠،٠) النوع : سيني

أ٢ = ٢٥ ← أ = ٥ ، ب٢ = ٩ ← ب = ٣ ﻫ٢ = ٢٥ - ٩

∴ البؤرتان (٤،٠) ، (-٤،٠) ﻫ٢ = ١٦ ⇐ ﻫ = ٤

ثانياً : ايجاد المعادلة للقطع الزائد

الاسم : زائد المركز (٠،٠) النوع : سيني

$\frac{س^2}{م^2} - \frac{ص^2}{ن^2} = 1$

⇐ من البؤرتين ﻫ = ٤ ⇐ ﻫ٢ = ١٦

لدينا اختلافه = ﻫ / م = ٢ ⇐ ٤ / م = ٢ ⇐ م = ٢ ⇐ م٢ = ٤

لكن ﻫ٢ = م٢ + ن٢ ⇐ ١٦ = ٤ + ن٢ ⇐ ن٢ = ١٢

∴ المعادلة $\frac{س^2}{4} - \frac{ص^2}{12} = 1$

(١٨) يدور القمر حول الارض في مدار على شكل قطع ناقص بحيث تقع الارض في احدى بؤرتي المدار (انظر الشكل) اثبت ان الاختلاف المركزي يساوي $\frac{م - ن}{م + ن}$

الحل :- ارسم البؤرة الاخرى

نلاحظ ان م - ن = ٢ﻫ ... ①

م + ن = ٢أ ... ②

بقسمة ① على ② ⇐ $\frac{م - ن}{م + ن} = \frac{2ﻫ}{2أ}$ ⇐ $\frac{م - ن}{م + ن} = \frac{ﻫ}{أ}$

لوجود ٢أ نفكر بـ ٢ﻫ

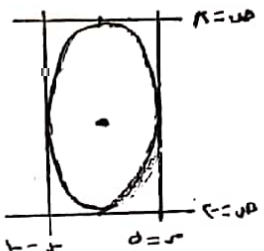
(١٩) قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{5}{4}$ والبعد بين بؤرتيه يزيد عن البعد بين رأسيه بمقدار ٤ وحدات وبؤرتاه اليمنى (٣،٥) ومحوره القاطع يوازي محور السينات جد معادلته .

الجواب $\frac{(س+5)^2}{64} - \frac{(ص-3)^2}{36} = 1$

Scanned with CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omar-aljabr.com

(٣٩) ما معادلة قطع ناقص تمس كل من المستقيمات التالية $س = -١$ ، $س = ٥$ ، $ص = -٣$ ، $ص = ٨$



الحل : ممر الرسم
الاسم : ناقص
المركز : $(\frac{-١+٥}{٢} ، \frac{-٣+٨}{٢})$
$(٣ ، ٢)$
النوع : رأسي

$٢ب = ١٠ \leftarrow ب = ٥$ ، $٢أ = ٦ \leftarrow أ = ٣$

$\frac{(ص-٢)^{٢}}{٢٥} + \frac{(س-٢)^{٢}}{٩} = ١$

(٤٠) قطع مخروطي معادلته :

$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ اختلافه المركزي $هـ_{١}$

قطع مخروطي معادلته :

$\frac{س^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{ص^{٢}}{ب^{٢}} = ١$ اختلافه المركزي $هـ_{٢}$

اثبت أن $هـ_{١}^{-٢} + هـ_{٢}^{-٢} = ٢$

الحل :

القطع الأول قطع زائد حيث

$هـ_{١} = \frac{جـ_{١}}{أ}$ ، $جـ_{١}^{٢} = أ^{٢} + ب^{٢}$

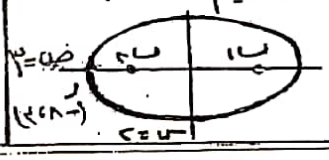
القطع المخروطي قطع ناقص

$هـ_{٢} = \frac{جـ_{٢}}{أ}$ ، $جـ_{٢}^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$هـ_{١}^{-٢} + هـ_{٢}^{-٢} = \frac{جـ_{١}^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{جـ_{٢}^{٢}}{أ^{٢}}$

$= \frac{أ^{٢} + ب^{٢} + أ^{٢} - ب^{٢}}{أ^{٢}} = \frac{٢أ^{٢}}{أ^{٢}} = ٢$

(٤١) ما معادلة قطع مخروطي اختلافه المركزي $\frac{١}{٢}$ ويمر بالنقطة $(-٨ ، ٣)$ ويقع مركزه على المستقيم $س = ٣$ وتقع بؤرتاه على المستقيم $ص = ٣$



الاسم : ناقص
المركز : $(٣ ، ٣)$ بعد الرسم
النوع : رأسي

$\frac{(س-٢)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص-٣)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

$\frac{ج}{أ} = \frac{٦}{١٠} \Leftarrow ج = ٦ ، أ = ١٠$ ①

$(-٨ ، ٣)$ تحقق المعادلة

$\frac{١٠٠}{ب^{٢}} + \frac{صفر}{أ^{٢}} = ١ \Leftarrow ب^{٢} = ١٠٠ \leftarrow ب = ١٠$

$\therefore ٢أ = ٦٠ \leftarrow أ = ٣٠$

$ج^{٢} = أ^{٢} - ب^{٢}$

$٣٦ = ١٠٠ - ب^{٢} \leftarrow ب^{٢} = ٦٤$

$\frac{(س-٢)^{٢}}{١٠٠} + \frac{(ص-٣)^{٢}}{٦٤} = ١$

(٤٢) ما معادلة قطع زائد احد رأسيه مركز الدائرة $(س-٨)^{٢} + (ص-٦)^{٢} = ١٦$ وطول محوره المرافق يساوي طول قطر الدائرة ويقع مركزه على المستقيم $س = -١$

الحل : نجد مركز الدائرة بعد تجهيزها .

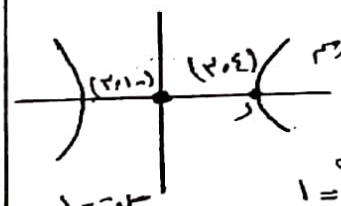
$٢^{٢}(س-٤)^{٢} + ٢^{٢}(ص-٣)^{٢} = ١٦$

$(س-٤)^{٢} + (ص-٣)^{٢} = ٤$

المركز $(٤ ، ٣)$ ، $ر = ٤$ ، $ر = ٢$

أصبح السؤال

ما معادلة قطع زائد أحد رأسيه $(٤ ، ٣)$ وطول المرافق $= ٤$ ويقع المركز على $س = -١$



الاسم : زائد
المركز : $(-١ ، ٣)$
النوع : سيني

$\frac{(س+١)^{٢}}{أ^{٢}} - \frac{(ص-٣)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

$٢ب = ٤ \leftarrow ب = ٢ \leftarrow ب = ٤$

$أ = ٥ \leftarrow أ^{٢} = ٢٥$

$\frac{(س+١)^{٢}}{٢٥} - \frac{(ص-٣)^{٢}}{٤} = ١$

Scanned with CamScanner

(٢٣) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، وبؤرتاه تقعان على محور السينات، وبعده البؤري ٦ وحدات والفرق بين طولي محوريه يساوي ٢ وحده.

الحل: ناقص، المركز (٠،٠) سيني

$2أ = 6 \leftarrow أ = 3$

$2أ - 2ب = 2 \leftarrow أ - ب = 1$

$ب = 1 + ب$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow 9 = (1+ب)^2 - ب^2$

$9 = 1 + 2ب + ب^2 - ب^2 \leftarrow ب = 4$

$أ = 5$ ∴ المعادلة

$\frac{س^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$

(٢٤) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات ويمر منحناه بالنقطة (١،٣) وإختلافه المركزي يساوي ٠.٥

الحل: ناقص سيني، م (٠،٠)، (١،٣) النقطة

تحقق $هـ = \frac{1}{2}$

المعادلة $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$

(١،٣) تحقق $\frac{1}{أ^2} + \frac{9}{ب^2} = 1 \ldots\ldots ①$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{1}{2} \leftarrow أ = 2$

$جـ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow \frac{1}{4} أ^2 = أ^2 - ب^2 \leftarrow ب^2 = \frac{3}{4} أ^2$

نعوض في ① $\frac{1}{أ^2} + \frac{9}{\frac{3}{4} أ^2} = 1 \Leftarrow أ^2 = 13$

$\therefore ب^2 = \frac{3}{4} \times 13 = \frac{39}{4}$

المعادلة: $\frac{س^2}{13} + \frac{4ص^2}{39} = 1$

(٢٥) جد معادلة قطع ناقص رأساه النقطتان (٠،٢)، (٠،-٨)، وطول محوره الأصغر يساوي الربعة أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس.

الحل: م (٠،-٣)، النوع: ناقص سيني

$2أ = 10 \leftarrow أ = 5$

$2ب = 4 \times (أ - جـ) \leftarrow ب = 2(5 - جـ)$

$\therefore ب = 2(5 - جـ)$

لكن $ب^2 = أ^2 - جـ^2 \leftarrow 4(5-جـ)^2 = 25 - جـ^2$

$4(25 - 10جـ + جـ^2) = 25 - جـ^2$

$(5جـ^2 - 40جـ + 75 = 0) \div 5$

$جـ^2 - 8جـ + 15 = 0 \leftarrow (جـ - 3)(جـ - 5) = 0$

$جـ = 3 \leftarrow ب = 4$ ، $جـ = 5$ ✗

∴ المعادلة $\frac{(س+3)^2}{25} + \frac{ص^2}{16} = 1$

(٢٦) جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه محوره الأصغر النقطتان $(\pm 3، 0)$ ويمر بالنقطة $(2، \frac{3}{2})$

الحل: م (٠،٠)، النوع: ناقص صادي

$2ب = 6 \leftarrow ب = 3$ ، $(2، \frac{3}{2})$ تحقق

المعادلة $\frac{ص^2}{أ^2} + \frac{س^2}{9} = 1$

$(2، \frac{3}{2})$ تحقق $\frac{9}{أ^2} + \frac{4}{9} = 1 \leftarrow \frac{9}{أ^2} = \frac{5}{9} \leftarrow$

$أ^2 = \frac{81}{5}$ ، المعادلة $\frac{5ص^2}{81} + \frac{س^2}{9} = 1$

(٢٧) جد معادلة القطع الناقص الذي مساحته (40π) وحده مربعة، ورأساه النقطتان $(\pm 8، 0)$

الحل: المركز (٠،٠) ، النوع: ناقص سيني

$2أ = 16 \leftarrow أ = 8$

المساحة $= أ ب \pi \leftarrow 40\pi = 8ب\pi$

$\Leftarrow$ ∴ $ب = 5$

المعادلة: $\frac{س^2}{64} + \frac{ص^2}{25} = 1$

Scanned with CamScanner

(٢٨) جد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{٨١} + \frac{ص^2}{١٦} = ١$

الحل: مساحة القطع الناقص $= \pi أ ب$

$= \pi \times ٩ \times ٤ = ٣٦ \pi$

مساحة الدائرة $= \pi نق^2 = ٣٦ \pi$

$نق^2 = ٣٦ \leftarrow نق = ٦$

(٢٩) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها $(س-٦)^2 + (ص-٤)^2 = ٣٦$، وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة ومعادلة محوره الأصغر هي $س = -١$

الحل: نجد مركز الدائرة

$٤(س-٣)^2 + ٤(ص-٢)^2 = ٣٦$

$(س-٣)^2 + (ص-٢)^2 = ٩$

المركز $(٣، ٢) \leftarrow نق^2 = ٩ \leftarrow نق = ٣$

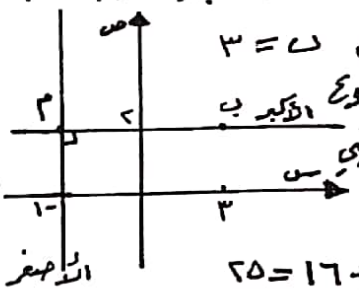
أصبح السؤال: ناقص البؤرة $(٣، ٢)$

$٢ب = ٦ \leftarrow ب = ٣$

الرسم لتحديد المركز والنوع

م $(-١، ٢)$، ناقص سيني

$أ = ٣ - (-١) = ٤$



$أ^2 = ب^2 + جـ^2 = ٩ + ١٦ = ٢٥$

المعادلة: $\frac{(س+١)^2}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^2}{٩} = ١$

(٣٠) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة $(-١، ١)$ وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(ص-١)^2 - ١٢س = ٠$، وطول محوره الأصغر يساوي (١٠) وحدات.

الحل: نجد بؤرة المكافئ

$(ص-١)^2 = ١٢(س-٠)$

الرأس $(٠، ١)$، $ف = ٣$، البؤرة $(٣، ١)$

أصبح السؤال:

ناقص المركز $(١، ١)$، البؤرة $(٣، ١)$

النوع: سيني، $جـ = ٢$، $٢ب = ١٠ \leftarrow ب = ٥$

$أ^2 = ٤ + ٢٥ = ٢٩$

المعادلة: $\frac{(س-١)^2}{٢٩} + \frac{(ص-١)^2}{٢٥} = ١$

(٣١) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي $\frac{(س-ل)^2}{ب^2} + \frac{(ص-ك)^2}{أ^2} = ١$ اثبت أن:

$ب^2 = أ^2(١ - هـ^2)$: حيث هـ: الاختلاف المركزي للقطع الناقص

الحل:

$هـ = \frac{جـ}{أ} \leftarrow جـ = أ هـ$

$ب^2 = أ^2 - جـ^2 = أ^2 - (أ هـ)^2$

$ب^2 = أ^2 - أ^2 هـ^2 = أ^2(١ - هـ^2)$

(٣٢) جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور الصادات وطول محوره المرافق ٢ب وحدة واختلافه المركزي ٣

الحل: زائد صادي، م $(٠، ١٠)$

$٢ب = ٢ \leftarrow ب = ١$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = ٣$

$أ^2 = جـ^2 - ب^2 \leftarrow ٩أ^2 = أ^2 - ١ \leftarrow أ^2 = \frac{١}{٤}$

المعادلة $\frac{ص^2}{\frac{١}{٤}} - \frac{س^2}{١} = ١ \leftarrow ٤ص^2 - س^2 = ١$

(٣٣) قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته $ل س^2 - ك ص^2 = ٩٠$، وطول محوره القاطع $(٢\sqrt{٦})$ وحدة، وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $٩س^2 + ١٦ص^2 = ٥٧٦$ جد قيمة الثابتين ل، ك

Omar Aljabr عمر الجبر
Scanned with CamScanner

الحل : نجد بؤرتي الناقص

$\frac{9س^2}{576} + \frac{16ص^2}{576} = \frac{576}{576}$ ←

$\frac{س^2}{64} + \frac{ص^2}{36} = 1$ النوع فا ناقص سيني

م (٠،٠) ، $ب^2 = 64$ ، $ن^2 = 36$ ← $د^2 = 28$

$د = \sqrt{28}$ ∴ البؤرتين $(\pm\sqrt{28}, 0)$

أصبح السؤال : زائد مركز ه (٠،٠) ،

وبؤرتاه ه $(\pm\sqrt{28}, 0)$

$د = \sqrt{28}$ ← $ا = 6$ ← $ا^2 = 36$ ، $ب^2 = 28 - 18 = 10$ ، نوعه سيني

المعادلة : $\frac{ل س^2}{90} - \frac{ل ص^2}{90} = 1$

$\frac{س^2}{\frac{90}{ل}} - \frac{ص^2}{\frac{90}{ل}} = 1$

$ا^2 = \frac{90}{ل} = 18$ ← $18ل = 90$ ← $ل = 5$

$ب^2 = \frac{90}{ل} = 10$ ← $10ل = 90$ ← $ل = 9$

حلول أسئلة الوحدة ص٢٧٢ - ٢٧٥

س) م) $(س - 0)^2 = 3(ص + \frac{3}{4})$ مكافئ

الرأس $(0، -\frac{3}{4})$ ، $ا = \frac{3}{4}$ ،

معادلة المحور س = ٠ ، البؤرة $(0، -\frac{3}{4} + \frac{3}{4})$

البؤرة $(0، \frac{1}{12})$

معادلة الدليل هي : $ص = -\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{7}{12}$

ب) $2ص^2 + 3ص - س^2 = 0$

$2(ص^2 + \frac{3}{2}ص + \frac{9}{16}) - س^2 = \frac{9}{8}$

$\frac{2(ص + \frac{3}{4})^2}{\frac{9}{8}} - \frac{(س - 0)^2}{\frac{9}{8}} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{9}{8}}$

$\frac{(ص + \frac{3}{4})^2}{\frac{9}{16}} - \frac{(س - 0)^2}{\frac{9}{8}} = 1$

م $(0، -\frac{3}{4})$ نوع : زائد حصادي

م $(0، -\frac{3}{4})$ ، نوع : زائد حصادي

$ب^2 = 64$ ، $ن^2 = 36$ ← $د^2 = 28$

$د = \sqrt{28}$ ∴ البؤرتين $(\pm\sqrt{28}, 0)$

أصبح السؤال : زائد مركز ه (٠،٠) ،

وبؤرتاه ه $(\pm\sqrt{28}, 0)$

$د = \sqrt{28}$ ← $ا = 6$ ← $ا^2 = 36$ ، $ب^2 = 28 - 18 = 10$ ، نوعه سيني

المعادلة : $\frac{ل س^2}{90} - \frac{ل ص^2}{90} = 1$

$\frac{س^2}{\frac{90}{ل}} - \frac{ص^2}{\frac{90}{ل}} = 1$

$ا^2 = \frac{90}{ل} = 18$ ← $18ل = 90$ ← $ل = 5$

$ب^2 = \frac{90}{ل} = 10$ ← $10ل = 90$ ← $ل = 9$

$د^2 = \frac{9}{16}$ ← $د = \frac{3}{4}$ ← الرأسين $(0، \pm\frac{3}{4})$

$ب^2 = \frac{9}{8}$ ← $ب = \frac{3}{\sqrt{8}}$ ← طرفي المرافقة $(\pm\frac{3}{\sqrt{8}}، -\frac{3}{4})$

$د^2 = \frac{7}{16}$ ← $د = \frac{\sqrt{7}}{4}$ ← البؤرتين $(0، -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{7}}{4})$

ج) $\frac{ص^2}{10} + \frac{2س^2}{10} = \frac{10}{10}$ ←

$\frac{(ص - 0)^2}{10} + \frac{(س - 0)^2}{\frac{10}{2}} = 1$

المركز (٠،٠) ، نوعه ناقص حصادي

$د^2 = 10$ ← $د = \sqrt{10}$ ← الرأسين $(0، \pm\sqrt{10})$

$ب^2 = \frac{10}{2}$ ← $ب = \sqrt{\frac{10}{2}}$ ← طرفي الأصغر $(\pm\sqrt{\frac{10}{2}}، 0)$

$د^2 = \frac{10}{2}$ ← $د = \sqrt{\frac{10}{2}}$ ← البؤرتين $(0، \pm\sqrt{\frac{10}{2}})$

د) $س^2 - 2س + ص^2 + 6ص = 6$

$س^2 - 2س + 1 + ص^2 + 6ص + 9 = 16$

$(س - 1)^2 + (ص + 3)^2 = 16$

دائرة المركز (١، -٣) ، ن = ٤

هـ) $9س^2 - 4ص^2 + 8ص = 40$

$9(س - 0)^2 - 4(ص^2 - 2ص + 1) = 36$

$9(س - 0)^2 - 4(ص - 1)^2 = 36$

$\frac{(س - 0)^2}{4} - \frac{(ص - 1)^2}{9} = 1$

المركز (٠،١) ، النوع : زائد سيني

$د^2 = 4$ ← $د = 2$ ← الرأسين $(\pm 2، 1)$

$ب^2 = 9$ ← $ب = 3$ ← طرفي المرافقة $(0، 1 \pm 2)$

$د^2 = 13$ ← $د = \sqrt{13}$ ← البؤرتين $(\pm\sqrt{13}، 1)$

و) $\frac{(س + 2)^2}{\frac{13}{4}} - \frac{(ص + \frac{3}{2})^2}{\frac{39}{4}} = 1$

المركز $(-2، -\frac{3}{2})$ النوع : زائد سيني

$د^2 = \frac{13}{4}$ ← $د = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ← الرأسين $(-2 \pm \frac{\sqrt{13}}{2}، -\frac{3}{2})$

$ب^2 = \frac{39}{4}$ ← $ب = \frac{\sqrt{39}}{2}$ ← طرفي المرافقة $(-2، -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{39}}{2})$

Scanned with CamScanner

$d^2 = \frac{25}{4} \leftarrow d = \frac{\sqrt{25}}{2} \leftarrow$

البؤرتين $(-2 \pm \frac{\sqrt{25}}{2}, -\frac{3}{2})$

(٤) $(س+2)^2 = 4d(ص+1)$ يمر بـ $(0,0)$

$0 = 4d + 2b + d$ ← (١)

$6 = d$ ← $(6,0)$

$3 = 9d + 3b + d$ ← $(3,3)$ ← (٢)

من (١)، (٢) $d = 2$، $b = -7$

$س = 2ص^2 - 7ص + 6$

(٥) ناقص مركزي $م(3,2)$، $d = 2$

$2d = 4$ ← $a = 12$، $b^2 = 140$

$\frac{(س-3)^2}{144} + \frac{(ص-2)^2}{140} = 1$

(٦) زائد محاوره $م(3,1)$

$a = 2$، $جـ = 3$، $b^2 = 5$

$\frac{(ص-1)^2}{4} - \frac{(س-3)^2}{5} = 1$

(٣) $\frac{|س|}{12} = \frac{|ص|}{12}$ او مرسم

$\frac{س}{ص} = 1$، $\frac{س}{ص} = -1$

المعادلة: $ص = \pm س$

(٤) بُعد البؤرة عن الدليل $= \frac{1}{2}(4ل)$

$2d = 20$ ← $d = 10$

الرأس $(10,0)$ مماثل حول $س$

$ص^2 = 40(س - 10)$

يوجد حلول اخرى

(٥) $\frac{|س-17|}{12} = 2\sqrt{(س-1)^2 + ص^2}$

$س^2 - 14س + 49 = 4(س^2 - 2س + 1 + ص^2)$

$3س^2 + 4ص^2 + 6س - 45 = 0$ ناقص

(٦) $س = 1 - 2جا\theta$، $ص = 3جتا\theta$

$س = 1 - 2 \times \frac{ص^2}{9}$ ←

$\frac{2ص^2}{9} + س - 1 = 0$ مكافئ

(٧) $3 = \frac{|3س + 4ص - 5|}{\sqrt{9+16}}$ تمر $(2,4)$

$3س + 4ص - 5 = 15$

أو $3س + 4ص - 5 = -15$ ×

المعادلة $3س + 4ص - 20 = 0$

(٨) ناقص سينى $م(0,-1)$

$d = 2$

$2d = \sqrt{4+1} + \sqrt{4+1}$ ← $2a = \sqrt{10}$

$b^2 = 5 - 4 = 1$

المعادلة

$\frac{(س-0)^2}{5} + \frac{(ص+1)^2}{1} = 1$

الرأسين $(\pm\sqrt{5}, -1)$

البؤرتين $(\pm 2, -1)$

طرفى الأصغر $(0, -1 \pm 1)$

(٩) $\frac{س^2}{\frac{11}{2}} + \frac{ص^2}{\frac{11}{3}} = 1$ ناقص سينى

Scanned with CamScanner

$م^2 = \frac{11}{ل} \leftarrow ل = \frac{11}{م^2}$

لكن $م^2 = ن^2 + ف^2$

$\therefore ل = \frac{11}{ن^2 + ف^2}$

---

(١٠) $م^2 = ل^2$ ، $ف^2 = ل^2 + ك^2$

$هـ_1 = \frac{ف}{م} = \frac{\sqrt{ل^2 + ك^2}}{ل}$

$م^2 = ك^2$ ، $ف^2 = ك^2 + ل^2$

$هـ_2 = \frac{\sqrt{ك^2 + ل^2}}{ك}$

$\therefore \frac{1}{هـ_1^2} + \frac{1}{هـ_2^2} = \frac{ل^2}{ل^2 + ك^2} + \frac{ك^2}{ك^2 + ل^2} = \frac{ل^2 + ك^2}{ل^2 + ك^2} = 1$

---

(١١) ① $٤(س+٢)^2 + ٤(ص-٥)^2 = ٣٦$

$ن^2 = ٩ \Leftarrow ن = ٣$ (م)

② $ص^2 = -٤س + ٨ \leftarrow ص^2 = -٤(س-٢)$

$ف = ١$ ، دليل $س = ٢ + ١ = ٣$ (ب)

③ $ص^2 - ٢س^2 - ٣س = ٠$ زائد (د)

④ $د = -٥$ (م)

⑤ م $(-٢، ٣)$ حينئذٍ نهايتي المرافق

$ب^2 = ١ \Leftarrow ب = ١$ $(-٢، ٣ \pm ١)$ (ب)

---

① $٢ن = ٦$ (ج)

② ف

③ د

---

⑨ $\frac{(ص-٢)^2}{٩} - \frac{(س+١)^2}{١٦} = ١$

$م^2 = ٩$ ، $ن^2 = ١٦$ ، $ف^2 = ٢٥$

$هـ = \frac{ف}{م} = \frac{٥}{٣}$ (ب)

---

⑩ $ف = ٣$ ، $ب = ٤$ ، $م^2 = ٢٥$

$\leftarrow م = ٥$

طول الأكبر $= ١٠$ (ب)

---

⑪ $\frac{س^2}{٩} + \frac{ص^2}{٤} = ١$

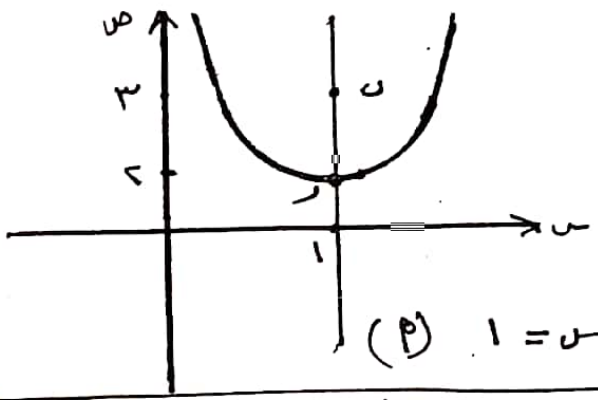
$م^2 = ٩$ ، $ب^2 = ٤$

المساحة $= م ب \pi = ٦\pi$ (ب)

---

⑫ مركز الزائد $(١، ٢)$

مكافئ: الرأس $(١، ٢)$ ، البؤرة $(٣، ١)$



$س = ١$ (م)

---

⑬ تخمين بدائل (د) سؤال باخ

نجد المركز ونصف القطر ونخيف نعوض $ب، د$

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com
Scanned with CamScanner