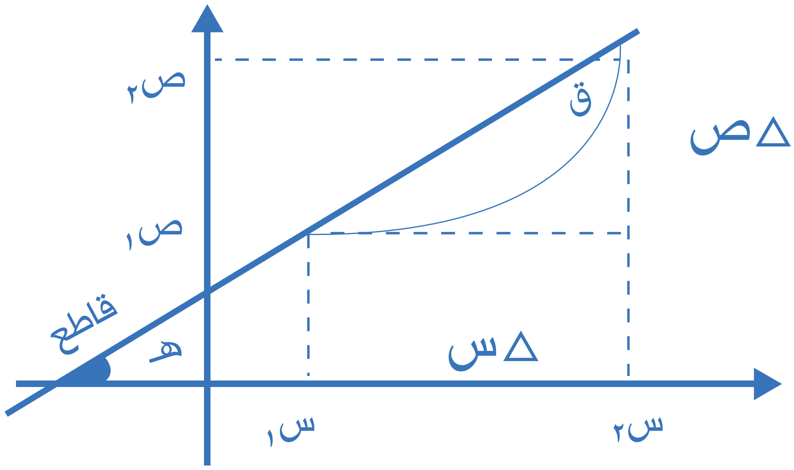
الرياضيات

حساب التفاضل

(الفصل الأول)



د.محمود الكسجي

محمد صالح

عمر الجبر

مركز زهرة الإتحاد الثقافي
الوحدات : 4752403

الأكاديمية الأولى
صويلح: 0791461143

أكاديمية صناع المعرفة
المدينة الرياضية: 0796667058

مركز المدثر الثقافي
الجبيهة: 5330430

أكاديمية العصر الجديد
ابو نصير: 0795651033

Jo Academy.com
0798006679

التقنيات
الهاشمي : 5053230

الأذكياء
الجاردنز : 0795655900

تطلب من مكتبة بلوبرينت : 0791027000

معدل التغير :

* مقدار التغير في السينات ويرمز له بالرمز $\Delta\text{س}$ أو هـ

حيث $\Delta\text{س} = \underbrace{\text{النهاية} - \text{البداية}}_{\text{هـ}}$

$\text{هـ} = \Delta\text{س} = \text{س}_2 - \text{س}_1$ ومنه $\text{س}_2 = \text{س}_1 + \text{هـ}$

* مقدار التغير في الاقتران يرمز له بالرمز $\Delta\text{ص}$

$$\Delta\text{ص} = \text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1) \longrightarrow \text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})$$

$$= \text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})$$

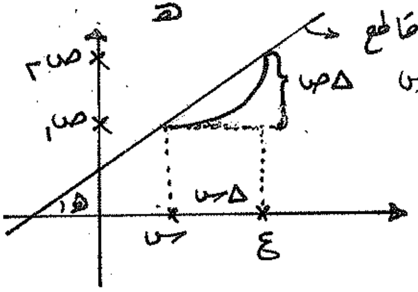
* معدل التغير $= \dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$= \frac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

ملحوظة :-

معدل تغير خطي = معامل س

معدل تغير الثابت = ٠



* التفسير الهندسي لمعدل التغير :

ميل القاطع الواصل بين النقطتين

$(\text{س}_1 ، \text{ق}(\text{س}_1)) ، (\text{س}_2 ، \text{ق}(\text{س}_2)) = \text{ظا هـ} =$ معدل التغير

حيث هـ الزاوية المحصورة بين القاطع والاتجاه السيني الموجب

* التفسير الفيزيائي لمعدل التغير :

$\dfrac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}} =$ معدل التغير في المسافة (ف) بالفترة الزمنية $[\text{ن}_1 ، \text{ن}_2]$ تساوي السرعة المتوسطة

$$\bar{\text{ع}} = \frac{\Delta\text{ف}}{\Delta\text{ن}} = \frac{\text{ف}(\text{ن}_2) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{ن}_2 - \text{ن}_1}$$

$$= \frac{\text{ف}(\text{ن}_1 + \text{هـ}) - \text{ف}(\text{ن}_1)}{\text{هـ}}$$

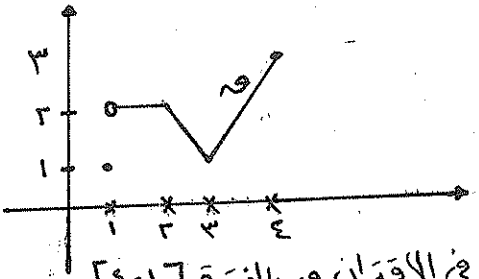
أمثلة :

① اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} - \text{س}^2$ وتغيرت س من ٣ إلى ٥ جد معدل التغير في الاقتران ق .

الحل: $\dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \dfrac{\text{ق}(\text{س}_2) - \text{ق}(\text{س}_1)}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

$$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-٢٠ - (-٦)}{٢} = -٧$$

② بالاعتماد على الشكل الذي يمثل منحنى ق



أوجد معدل التغير في الاقتران ق بالفترة [١، ٤]

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١} = \frac{٣ - ١}{٣} = \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$$

③ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2 + \text{هـ}(\text{س})$ حيث :

$$\text{هـ}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 + ١ ، & ١ \le \text{س} < ٥ \\ ١٠ ، & ٥ \le \text{س} \le ٧ \end{cases}$$

ما معدل التغير في الاقتران ق(س) في [١، ٥]

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(١)}{٥ - ١}$$

$$= \frac{(٢٥ + \text{هـ}(٥)) - (١ + \text{هـ}(١))}{٤}$$

$$= \frac{(٢٥ + ١٠) - (١ + ٢)}{٤} = \frac{٣٥ - ٣}{٤} = \frac{٣٢}{٤} = ٨$$

④ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \dfrac{١}{\text{س}^2}$ وتغيرت س من $\text{س}_1 = \dfrac{١}{٣}$ وبمقدار $\dfrac{٢}{٣}$ فإن مقدار التغير في الاقتران ق يساوي

أ) -٨ ب) $\dfrac{٨}{٩}$ جـ) -١٢ د) ١

الحل: $\Delta\text{ص} = \text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})$

$$\underbrace{\tfrac{١}{٣} \longrightarrow \text{ع} = ١}_{\tfrac{٢}{٣}}$$

$$= \text{ق}(١) - \text{ق}(\tfrac{١}{٣})$$

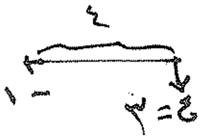
$$= ١ - \frac{١}{\tfrac{١}{٩}} = ١ - ٩ = -٨$$

(أ) ------

⑤ إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} |\text{س} - ٣| ، & -١ \le \text{س} < ٢ \\ \left[\dfrac{\text{س}}{٢} + ١\right] ، & ٢ \le \text{س} \le ٦ \end{cases}$

أوجد معدل التغير في الاقتران عندما تتغير س من −١ بمقدار ٤

الحل: لا نعيد التعريف لأننا نحتاج إلى الصورة فقط



$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(-١+٤) - ق(-١)}{٤}$$

$$= \frac{ق(٣) - ق(-١)}{٤}$$

$$= \frac{[٢,٥] - |-٤|}{٤} = \frac{٣ - ٤}{٤} = \frac{-١}{٢}$$

⑥ اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١، ٥] يساوي (٧) وكان معدل تغير ق على الفترة [٥، ٨] يساوي (١٤) جد معدل التغير في الاقتران على الفترة [١، ٨]

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س}\Big|_{[١،٨]} = \frac{ق(٨) - ق(١)}{٨ - ١}$

$= \frac{ق(٨) - ق(١)}{٧}$ المطلوب

نجد ق(٨) ، ق(١) من المعطيات

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}\Big|_{[١،٥]} = \frac{ق(٥) - ق(١)}{٥ - ١} = ٧$

$ق(٥) - ق(١) = ٢٨ \leftarrow\text{-----}$ ①

$\frac{\Delta ص}{\Delta س}\Big|_{[٥،٨]} = \frac{ق(٨) - ق(٥)}{٨ - ٥} = ١٤$

$ق(٨) - ق(٥) = ٤٢ \leftarrow\text{-----}$ ②

نجمع ① مع ② ينتج أن

$ق(٨) - ق(١) = ٧٠$

$\Leftarrow \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{٧٠}{٧} = ١٠$

⑦ اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [−٢، ١] يساوي (−٣) وكان هـ(س) = ق(س) − س² جد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [−٢، ١]

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(١) - هـ(-٢)}{٣}$

$= \frac{(ق(١) - ١) - (ق(-٢) - ٤)}{٣}$

$= \frac{ق(١) - ق(-٢) - ١ + ٤}{٣}$

$= \frac{-٩ + ٣}{٣} = -٢$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(١) - ق(-٢)}{٣}$

$-٣ = \frac{ق(١) - ق(-٢)}{٣}$

$-٩ = ق(١) - ق(-٢)$

تمرين محلول ①: اذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [−١، ٣] يساوي (٤)، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ٢ق(س) + ٣س في الفترة [−١، ٣]

أ) ٥ ب) ٢ جـ) ١١ د) ٤

الحل:

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = ٢ \times \frac{\Delta ص}{\Delta س}\Big|_{ق} + \frac{\Delta ص}{\Delta س}\Big|_{(٣س)}$$

$$٢ \times ٤ + ٣ = ١١$$

تمرين محلول ②: اذا كان معدل تغير الاقتران ق(س) في الفترة [١، ٤] يساوي (٥) وكان ق(٤) + ق(١) = ٣ ، هـ(س) = ق²(س²) فإن معدل تغير هـ في الفترة [−١، ٢] تساوي:

أ) ٢٢٥ ب) ٩ جـ) $\frac{٨}{٣}$ د) ١٥

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢) - هـ(-١)}{٢ - -١}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق^{٢}(٤) - ق^{٢}(١)}{٢ - (-١)}$

$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣}$

$٥ = \frac{ق(٤) - ق(١)}{٣}$

$١٥ = ق(٤) - ق(١)$

$$= \frac{\left(ق(٤) - ق(١)\right)\left(ق(٤) + ق(١)\right)}{٣}$$

$$= \frac{١٥ \times ٣}{٣} = ١٥$$

⑧ اذا كان ق(س) = $\sqrt{س}$ ، وكان معدل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [١، جـ] يساوي ($\frac{١}{٣}$) ، ما قيمة الثابت جـ ؟

الحل: $\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ق(جـ) - ق(١)}{جـ - ١} = \frac{١}{٣}$

$\frac{\sqrt{جـ} - ١}{جـ - ١} = \frac{١}{٣}$ ضرب تبادلي

$٣\sqrt{جـ} - ٣ = جـ - ١$

$٣\sqrt{جـ} = جـ + ٢$ تربيع الطرفين

$٩جـ = جـ^{٢} + ٤جـ + ٤$

$جـ^{٢} - ٥جـ + ٤ = ٠ \Leftarrow (جـ - ١)(جـ - ٤) = ٠$

$جـ \cancel{=} ١ ، \boxed{جـ = ٤}$

تمرين ① : اذا كان ق(س) = $\frac{1}{\text{س}}$ وكان معدل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من جـ إلى هـ+١ يساوي $\frac{-١}{٣٠}$ جد قيمة هـ

الاجابة: هـ = {-٦، ٥}

تمرين ② : اذا كان معدل التغير للاقتران ق(س) = ٤س² - هـ في الفترة [ب، ٢] يساوي (-٤) ما قيمة ب ؟

الاجابة: (-٣)

تمرين ③ :

$$\text{ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^٢ & \text{، س} \geq ١ \\ ٢\text{س} - ١ & \text{، س} < ١ \end{cases}$$

وكان معدل التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من ٣ إلى ٣+هـ يساوي (٧) جد قيمة هـ حيث هـ > ٠.

الاجابة: (٣)

⑨ اذا كان ق(س) = ٢س² - ١ ، ما ميل العمودي على القاطع لمنحنى الاقتران المار بالنقطتين (٢، ق(٢))، (-١، ق(-١)) ؟

الحل: $\text{م القاطع} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

$= \frac{\text{ق}(-١) - \text{ق}(٢)}{-١ - ٢} = \frac{١ - ٧}{-٣} = ٢$

$\text{م}_{\text{عمودي}} \times \text{م}_{\text{قاطع}} = -١$

$\text{م}_{\text{عمودي}} \times ٢ = -١ \Leftarrow \text{م}_{\text{عمودي}} = -٢$

⑩ اذا كان القاطع المار بالنقطتين (١، ق(١))، (٣، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وكان ق(١) = ٢ ، أوجد ق(٣).

الحل: $\text{م} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \text{ظا هـ}$

$= \frac{\text{ق}(٣) - \text{ق}(١)}{٣ - ١} = \text{ظا } ١٣٥°$

$= \frac{\text{ق}(٣) - ٢}{٢} = -١$

$\text{ق}(٣) - ٢ = -٢$

$\text{ق}(٣) = ٠$

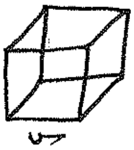
⑪ يتحرك جسم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٤ن² - ٣ن + ٤٠ ، حيث ف بُعد الجسم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية [١، ٣]

$\bar{\text{ع}} = \frac{\text{ف}(٣) - \text{ف}(١)}{٣ - ١}$

$= \frac{(٣٦ - ٩ + ٤٠) - (٤ - ٣ + ٤٠)}{٢}$

$= \frac{٦٧ - ٤١}{٢} = \frac{٢٦}{٢} = ١٣$

⑫ مكعب يزداد طول ضلعه من ٣سم إلى ٥سم
أوجد ① مقدار التغير في مساحته الجانبية
② معدل التغير في حجمه



الحل: ① ق(س) = م.ج = ٤س²

Δص = ق(٥) - ق(٣)

١٠٠ - ٣٦ = ٦٤

② ق(س) = ح = س³

$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٣)}{٥ - ٣} = \frac{١٢٥ - ٢٧}{٢} = ٤٩$

تمرين : قذف جسم رأسياً للأعلى بحيث يكون بُعد (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بعد (ن) ثانية ف(ن) = ٣٠ن - ٥ن² ، جد السرعة المتوسطة اذا تغيرت ن من صفر إلى Δن

٣٠ - ٥Δن

تمرين : إذا تغير نصف قطر دائرة من ٥سم إلى ٥,١سم فما مقدار التغير في مساحة الدائرة؟

١,٠١ π

تمرين إذا تغير طول ضلع مربع من س إلى س + Δس اوجد معدل التغير في مساحته

أ) ٣س
ب) ٢س + Δس
جـ) ٢س Δس + (Δس)²
د) Δس

المشتقة الأولى :-

يرمز للمشتقة الأولى بأحد الرموز التالية :-

$\text{قَ}(\text{س})$ أو صَ أو $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ أو $\dfrac{\text{د}}{\text{دس}}\big(\text{ق}(\text{س})\big)$

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\dfrac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$ (نهاية $\overset{\text{متوسط}}{\underset{\text{معدل}}{}}$ التغير)

$$\boxed{\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}}$$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$ للعلم

تقسم الأسئلة إلى قسمين

أ) المشتقة الأولى بشكل عام

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

ب) المشتقة بشكل خاص عند س = أ

$\text{قَ}(\text{أ}) = \underset{\text{ع}\to\text{أ}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

ملحوظة :-

ق قابل للاشتقاق عند س = أ ، فإن قَ(أ) موجودة

ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ ، فإنه قَ(أ) غير موجودة

أمثلة :

① ق(س) = س² + ٣س ، جد قَ(٢) باستخدام التعريف .

$\text{قَ}(\text{٢}) = \underset{\text{ع}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{٢})}{\text{ع} - \text{٢}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ع}^{\text{٢}} + \text{٣ع} - \text{١٠}}{\text{ع} - \text{٢}} = \underset{\text{ع}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{(\text{ع}-\text{٢})}(\text{ع}+\text{٥})}{\cancel{(\text{ع}-\text{٢})}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{٢}}{\text{نهــا}}(\text{ع} + \text{٥}) = \text{٧}$

② ق(س) = س² + ٣س جد قَ(س) باستخدام التعريف

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ع}^{\text{٢}} + \text{٣ع} - \text{س}^{\text{٢}} - \text{٣س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ع}^{\text{٢}} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{٣ع} - \text{٣س}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{(\text{ع}-\text{س})}(\text{ع}+\text{س})}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{٣}\cancel{(\text{ع}-\text{س})}}{\cancel{\text{ع}-\text{س}}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{٢س} + \text{٣}$

③ ق(س) = √(س² + ٥) ، جد قَ(س) باستخدام التعريف

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}+\text{٥}} - \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}}{\text{ع} - \text{س}} \times \dfrac{\sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}+\text{٥}} + \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}}{\sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}+\text{٥}} + \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ع}^{\text{٢}} + \cancel{\text{٥}} - \text{س}^{\text{٢}} - \cancel{\text{٥}}}{(\text{ع} - \text{س})\left(\sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}+\text{٥}} + \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}\right)}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}(\text{ع} + \text{س})}{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\left(\sqrt{\text{ع}^{\text{٢}}+\text{٥}} + \sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}\right)}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\text{٢}}\text{س}}{\cancel{\text{٢}}\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}} = \dfrac{\text{س}}{\sqrt{\text{س}^{\text{٢}}+\text{٥}}}$

④ ق(س) = س⁴ + س جد قَ(١) باستخدام التعريف

$\text{قَ}(\text{١}) = \underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{١})}{\text{ع} - \text{١}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ع}^{\text{٤}} + \text{ع} - \text{٢}}{\text{ع} - \text{١}}$

	ع⁴	ع³	ع²	ع	عدد
1	١	٠	٠	١	-٢
		١	١	١	٢
	١	١	١	١	٠

$\underset{\text{ع}\to\text{١}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{(\text{ع}-\text{١})}(\text{ع}^{\text{٣}} + \text{ع}^{\text{٢}} + \text{ع} + \text{٢})}{\cancel{\text{ع}-\text{١}}} = \text{٥}$

⑤ ق(س) = س/(س+١) ، جد قَ(س) باستخدام التعريف.

$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\dfrac{\text{ع}}{\text{ع}+\text{١}} - \dfrac{\text{س}}{\text{س}+\text{١}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{\text{عس}} + \text{ع} - \cancel{\text{سع}} - \text{س}}{(\text{ع}+\text{١})(\text{س}+\text{١})} \times \dfrac{\text{١}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\dfrac{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}{(\text{ع}+\text{١})(\text{س}+\text{١})} \times \dfrac{\text{١}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = \dfrac{\text{١}}{(\text{س}+\text{١})^{\text{٢}}}$

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}} + \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{س} > ٠$. باستخدام تعريف المشتقة جد $\text{قَ}(١)$

$$\text{قَ}(١) = \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}} + \frac{١}{\text{ع}} - ٢}{\text{ع} - ١}$$

البسط نكد
طرح واضافة (١)

$$= \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - ١}{\text{ع} - ١} + \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{ع}} - \frac{١}{١}}{\text{ع} - ١}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ١)}}{\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ١)}(\sqrt{\text{ع}} + ١)} + \underset{\text{ع}\to ١}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - \text{ع}}}}{\text{ع} \times \cancel{(\text{ع} - ١)}}$$

$$= \frac{١}{٢} + -١ = \frac{-١}{٢}$$

تمرين ① باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة جد المشتقة الأولى عند $\text{س} = ٣$ للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \frac{\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٣}$ **الإجابة : (-٧)**

② $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$ جد $\text{قَ}(\text{س})$ باستخدام التعريف

الإجابة : ($\frac{١}{٣}$)

③ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}} + ١}$ جد $\text{قَ}(٩)$ باستخدام التعريف

الإجابة : ($\frac{-١}{٩٦}$)

⑦ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \frac{١}{\text{س}} & ، \ ٠ < \text{س} < ١ \\ \sqrt{\text{س}} & ، \ ١ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$

باستخدام تعريف المشتقة ابحث قابلية الاشتقاق للاقتران ق عند $\text{س} = ١$

لأن (١) تحول نجد $\text{قَ}_{+}(١)$ ، $\text{قَ}_{-}(١)$

$$\text{قَ}_{+}(١) = \underset{\text{ع}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{ع}} - ١}{\text{ع} - ١} = \underset{\text{ع}\to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{\sqrt{\text{ع}} - ١}}{(\sqrt{\text{ع}} + ١)\cancel{(\sqrt{\text{ع}} - ١)}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{قَ}_{-}(١) = \underset{\text{ع}\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(١)}{\text{ع} - ١}$$

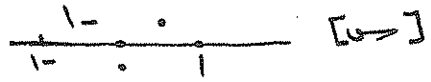
$$= \underset{\text{ع}\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\frac{١}{\text{ع}} - ١}{\text{ع} - ١} = \underset{\text{ع}\to ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\overset{-١}{\cancel{١ - \text{ع}}}}{\text{ع}} \times \frac{١}{\cancel{\text{ع} - ١}} = -١$$

لأن $\text{قَ}_{+}(١) \neq \text{قَ}_{-}(١)$ ∴ ق غير قابل للاشتقاق عند $\text{س} = ١$

تمرين محلول :

$\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}|^{٢}[\text{س}]$ جد $\text{قَ}(٠)$ باستخدام التعريف

نعيد التعريف $|\text{س}|^{٢} = \text{س}^{٢}$



$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} -\text{س}^{٢} & ، \ -١ \le \text{س} < ٠ \\ ٠ & ، \ ٠ \le \text{س} < ١ \end{cases}$

لأن (٠) تحول نجد $\text{قَ}_{+}(٠)$ ، $\text{قَ}_{-}(٠)$

$$\text{قَ}_{+}(٠) = \underset{\text{ع}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٠)}{\text{ع} - ٠}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٠^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٠ - ٠}{\text{ع}} = ٠$$

$$\text{قَ}_{-}(٠) = \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٠)}{\text{ع} - ٠}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} \frac{-\text{ع}^{٢} - ٠}{\text{ع}} = \underset{\text{ع}\to ٠^{-}}{\text{نهـا}} -\text{ع} = ٠$$

لأن $\text{قَ}_{+}(٠) = \text{قَ}_{-}(٠) \Leftarrow$ ∴ $\text{قَ}(٠) = ٠$

⑧ $\text{ق}(\text{س}) = |٣\text{س}| + |١ - \text{س}|$ جد $\text{قَ}(٢)$ باستخدام التعريف .

الحل: نعيد التعريف شفوي

$\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س} + \text{س} - ١$

$= ٤\text{س} - ١$

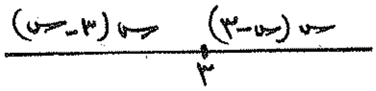
$$\text{قَ}(٢) = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$$

$$= \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{ع} - ١ - ٧}{\text{ع} - ٢} = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\text{ع} - ٨}{\text{ع} - ٢}$$

$$\text{قَ}(٣) = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نهـا}} \frac{٤\cancel{(\text{ع} - ٢)}}{\cancel{\text{ع} - ٢}} = ٤$$

⑨ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}|\text{س} - ٣|$ جد $\text{قَ}(٣)$ باستخدام التعريف .

الحل: نعيد التعريف



$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣\text{س} - \text{س}^{٢} & ، \ \text{س} < ٣ \\ \text{س}^{٢} - ٣\text{س} & ، \ \text{س} \ge ٣ \end{cases}$

لأن (٣) تحول نجد $\text{قَ}_{+}(٣)$ ، $\text{قَ}_{-}(٣)$

$$\text{ق}'_{+}(٣) = \underset{\text{ع} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣} = \underset{\text{ع} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}^{٢} - ٣\text{ع} - ٠}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع} \to ٣^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\cancel{(\text{ع} - ٣)}}{\cancel{\text{ع} - ٣}} = ٣$$

$$\text{ق}'_{-}(٣) = \underset{\text{ع} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٣)}{\text{ع} - ٣} = \underset{\text{ع} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٣\text{ع} - \text{ع}^{٢} - ٠}{\text{ع} - ٣}$$

$$= \underset{\text{ع} \to ٣^{-}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\cancel{(٣ - \text{ع})}^{-١}}{\cancel{\text{ع} - ٣}} = -٣$$

لأن $\text{ق}'_{+}(٣) \neq \text{ق}'_{-}(٣)$ ⟸ ∴ $\text{ق}'(٣)$ غير موجودة

تمرين ①: $\text{ق}(\text{س}) = [\frac{١}{٢}\text{س} + ٣]$ باستخدام التعريف

جد $\text{ق}'(١)$ ، $\text{ق}'(٢)$

تمرين ②: $\text{ق}(\text{س}) = |\text{س}^{٢} - \text{س}|$ جد $\text{ق}'(١)$ باستخدام التعريف

تمرين محلول:

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٢ & -١ \le \text{س} < ١ \\ ٢\text{س} & ١ \le \text{س} < ٣ \end{cases}$$

جد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف.

الحل: نجد $\text{ق}'(\text{س})$ لكل قاعدة.

* القاعدة الأولى: $\text{ق}_{١}(\text{س}) = ٢$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٢}{\text{ع} - \text{س}} = ٠$$

* القاعدة الثانية: $\text{ق}_{٢}(\text{س}) = ٢\text{س}$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع} - ٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}} = ٢$$

عند س = ١ نحول يمين ، يسار

$$\text{ق}'_{+}(١) = \underset{\text{ع} \to ١^{+}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{ع} - ٢}{\text{ع} - ١} = ٢$$

⟸ $٢ \neq ٠$

$$\text{ق}'_{-}(١) = \underset{\text{ع} \to ١^{-}}{\text{نهـا}} \frac{٢ - ٢}{\text{ع} - ١} = ٠$$

$\text{ق}'(١)$ غير موجودة ، عند الأطراف −١ ، ٣ غير موجودة

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} ٠ & ، \ -١ < \text{س} < ١ \\ ٢ & ، \ ١ < \text{س} < ٣ \\ \text{غير موجودة} & ، \ \text{س} = -١ ، ١ ، ٣ \end{cases}$$

⑪ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جا}٢\text{س}$

أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف

$$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}٢\text{ع} - \text{جا}٢\text{س}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{٢\text{جتا}\frac{٢\text{ع} + ٢\text{س}}{٢} \times \text{جا}\frac{٢\text{ع} - ٢\text{س}}{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} ٢\text{جتا}(\text{ع} + \text{س}) \times \underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{جا}(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$٢\text{جتا}٢\text{س} \times \underset{\text{ص} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{جتا}٢\text{س} \times ١ = ٢\text{جتا}٢\text{س}$$

تمرين: $\text{ق}(\text{س}) = \text{ظاس}$

أوجد $\text{ق}'(\text{س})$ باستخدام التعريف

الاجابة: $(\text{قا}^{٢}\text{س})$

⑫ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - \text{أ}) \times \text{هـ}(\text{س})$ ، $\text{هـ}(\text{س})$ متصل عند س = أ اثبت أن $\text{ق}'(\text{أ}) = \text{هـ}(\text{أ})$ باستخدام تعريف المشتقة.

الحل: $\text{ق}'(\text{أ}) = \underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{أ})}{\text{ع} - \text{أ}}$

$$= \underset{\text{ع} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \frac{\cancel{(\text{ع} - \text{أ})}\,\text{هـ}(\text{ع}) - ٠}{\cancel{\text{ع} - \text{أ}}}$$

لأن هـ متصل عند س = أ ∴ $\text{هـ}(\text{أ}) = \underset{\text{ع} \to \text{أ}}{\text{نهـا}} \text{هـ}(\text{ع})$

$$\text{ق}'(\text{أ}) = \text{هـ}(\text{أ})$$

⑬ اذا كان ق قابلاً للاشتقاق فاثبت أن

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})}{\text{هـ}} = ٤\text{ق}'(\text{س})$$

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ}) + \text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{٢\big(\text{ق}(\text{س} + ٢\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})\big)}{٢\text{هـ}} + \underset{\text{هـ} \to ٠}{\text{نهـا}} \frac{-٢\big(\text{ق}(\text{س}) - \text{ق}(\text{س} - ٢\text{هـ})\big)}{-٢\text{هـ}}$$

$$= ٢\text{ق}'(\text{س}) - ٢ \times -\text{ق}'(\text{س})$$

$$= ٢\text{ق}'(\text{س}) + ٢\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{ق}'(\text{س})$$

⑭ اذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق اثبت

$$\underset{\text{ع} \to \text{س}}{\text{نهـا}} \frac{\text{ع}\,\text{ق}(\text{ع}) - \text{س}\,(\text{ق}(\text{س}))}{\text{ع} - \text{س}} = \text{س}\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})$$

لأن ق قابل للاشتقاق ∴ ق متصل

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \text{ق}(\text{ع}) = \text{ق}(\text{س})$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ع ق}(\text{ع}) - \text{س ق}(\text{س}) + \text{س ق}(\text{ع}) - \text{س ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ع ق}(\text{ع}) - \text{س ق}(\text{ع})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س ق}(\text{ع}) - \text{س ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق}(\text{ع})(\text{ع} - \text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}\left(\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})\right)}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{ق}(\text{س}) + \text{س قَ}(\text{س})$$

تمرين ① اذا كان ق اقتراناً قابلاً للاشتقاق اثبت أن

$$\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق}(٣ - ٢\text{هـ}) - \text{ق}(٣ + ٤\text{هـ})}{\text{هـ}} = -٦\ \text{قَ}(٣)$$

تمرين ② اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢}\,\text{جتا س}$ ،

جد قَ(س) باستخدام التعريف

$\boxed{\text{قَ}(\text{س}) = -\text{س}^{٢}\text{جا س} + ٢\text{س جتا س}}$

العلاقة بين معدل التغير والمشتقة الأولى :

$$* \quad \text{قَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$$

$$* \quad \text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$* \quad \text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

أمثلة :

① اذا كان معدل التغير للاقتران ق(س) يساوي $(\text{س}^{٢}\Delta\text{س} + ٢\text{س})$ ، فإن قَ(س) تساوي

أ) ٢ ب) ٢س جـ) ٠ د) ٢س + ٢

الحل : $\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}}$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ (\text{س}^{٢}\Delta\text{س} + ٢\text{س}) = ٢\text{س}$$

(ب)

② اذا كان مقدار التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى ع يساوي $(\text{س ع}^{٢} - \text{ع س}^{٢})$ أوجد قَ(٣) .

$$\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{س ع}^{٢} - \text{ع س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س ع}^{٢} - \text{ع س}^{٢}}{\text{ع} - \text{س}}$$

$$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س ع}\,\cancel{(\text{ع} - \text{س})}}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}} = \text{س}^{٢}$$

$$\therefore \text{قَ}(٣) = ٣^{٢} = ٩$$

③ اذا كان مقدار التغير للاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + Δس يساوي $\text{س}^{٢}\Delta\text{س} + ٣(\Delta\text{س})^{٢}$ جد قَ(س) .

الحل : $\frac{\Delta\text{ص}}{\Delta\text{س}} = \frac{\text{س}^{٢}\Delta\text{س} + ٣(\Delta\text{س})^{٢}}{\Delta\text{س}}$

$$\text{قَ}(\text{س}) = \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{س}^{٢}\Delta\text{س} + ٣(\Delta\text{س})^{٢}}{\Delta\text{س}}$$

$$= \underset{\Delta\text{س}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\cancel{\Delta\text{س}}(\text{س}^{٢} + ٣\Delta\text{س})}{\cancel{\Delta\text{س}}} = \text{س}^{٢}$$

④ اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - ٣\text{س}^{٢}\text{هـ}$ حيث (هـ التغير في السينات) جد قَ(س) .

الحل : $\text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - ٣\text{س}^{٢}\text{هـ}$

$$\frac{٣\text{س}^{٢}\text{هـ}}{\text{هـ}} = \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$\underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}}\ ٣\text{س}^{٢} = \underset{\text{هـ}\to 0}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق}(\text{س} + \text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$$

$$٣\text{س}^{٢} = \text{قَ}(\text{س}) .$$

تمرين : اذا كان مقدار التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ تساوي $\text{س}^{٢}\text{هـ} + ٣\text{هـ}^{٢}$ ، أوجد قَ(س)

$\boxed{\text{الاجابة : } (\text{س}^{٢})}$

نظرية الإتصال والاشتقاق :

* اذا كان ق(س) قابلاً للإشتقاق عند س = جـ فإن ق متصل عند س = جـ .

البرهان مهم فيما بعد

أمثلة :

① اذا كان قَ(٢) = ٥ ، ق(٢) = ٣ جد $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهــا}}\ (\text{ق}^{٣}(\text{س}) + ٥\text{س}^{٣})$.

ق قابل للاشتقاق عند س = ٢ ∴ ق متصل عند س = ٢

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) = ٣، ق(٢) = ٣

$\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ (ق^{٣}(س) + ٥ س^{٢})

= (ق(٢))^{٣} + ٥ × ٢^{٢} = ٢٧ + ٢٠ = ٤٧

② اذا كان قَ(١) موجودة وكان منحنى ق يمر بالنقطة (١،٤) جد $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ (٣ق(س) + [$\frac{س}{٢}$ − ١] + |س − ٣|)

الحل

ق قابل للاشتقاق عند س = ١ ∴ ق متصل عند س = ١

$\underset{س \leftarrow ١}{نها}$ ق(س) = ق(١) = ٤ (وذع النهاية لوجود [ ] ١، ١)

٣ × $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ ق(س) + $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ [$\frac{س}{٢}$ − ١] + $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ |س − ٣|

٣ × ٤ + $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ − ١ + $\underset{س \leftarrow ١^{+}}{نها}$ (٣ − س)

١٢ − ١ + ٢ = ١٣

نتيجة هامة جداً:

* اذا كان ق غير متصل عند س = أ فإن ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ

أمثلة:

① ق(س) = $\frac{٥}{س - ٧}$ ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٧

الحل: نبحث الاتصال عند س = ٧

ق(٧) = $\frac{٥}{٠}$ (غير معرفة)

∴ ق غير متصل عند س = ٧

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٧

② ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ٤ ، & ٠ \le س < ٣ \\ ٦س - ٢ ، & ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٣

الحل: نبحث الاتصال عند س = ٣ ، ق(٣) = ١٦

$\underset{س \leftarrow ٣^{+}}{نها}$ ق(س) = ١٦ ، $\underset{س \leftarrow ٣^{-}}{نها}$ ق(س) = ١٣

∴ $\underset{س \leftarrow ٣}{نها}$ ق(س) غير موجودة ∴ ق غير متصل عند س = ٣

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣

③ ق(س) = $\begin{cases} [س] & ١ \le س < ٢ \\ |س - ٢| & ٢ \le س \le ٦ \end{cases}$

ابحث قابلية الاقتران للاشتقاق عند س = ٢

الحل: نبحث الاتصال عند س = ٢ ، ق(٢) = ٠

$\underset{س \leftarrow ٢^{+}}{نها}$ ق(س) = ٠ ، $\underset{س \leftarrow ٢^{-}}{نها}$ ق(س) = ١

∴ $\underset{س \leftarrow ٢}{نها}$ ق(س) غير موجودة

∴ ق غير متصل عند س = ٢

∴ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٢

قواعد الاشتقاق:

$\boxed{١}$ مشتقة الثابت لوحده = صفر

الثابت ← الأرقام ٣، ٥، $\sqrt{٧}$، $\frac{١}{٢}$، ٦^{٢}

← الحروف (أ، ب، ......)

← π وتوابعها، جتا π، ظا $\frac{\pi}{٤}$ .....

← هـ النيبيري وتوابعه هـ^{٣}، $\sqrt{هـ}$

$\boxed{٢}$ مشتقة س^{ن} = ن س$^{ن-١}$

$\boxed{٣}$ مشتقة ثابت × اقتران = الثابت كما هو × مشتقة الاقتران

$\boxed{٤}$ مشتقة الجمع والطرح = مشتقة كل اقتران لوحده

(ق ± هـ)َ(س) = قَ(س) ± هـَ(س).

$\boxed{٥}$ مشتقة ضرب اقترانين = الأول × م. الثاني + الثاني × م. الأول

(ق.هـ)َ(س) = ق(س) × هـَ(س) + هـ(س) × قَ(س)

$\boxed{٦}$ مشتقة قسمة اقترانين = $\frac{\text{المقام × م. البسط − البسط × م. المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

نتائج:

* مشتقة $\frac{\text{اقتران}}{\text{ثابت}}$ = $\frac{\text{مشتقة الاقتران}}{\text{الثابت كما هو}}$

* مشتقة $\frac{\text{ثابت}}{\text{اقتران}}$ = $\frac{\text{− الثابت × م. المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

أمثلـــة : جد المشتقة الأولى لما يلي :

① ق(س) = ٥ ⟵ قَ(س) = صفر

② ق(س) = ٥س ⟵ قَ(س) = ٥

③ ق(س) = ٥أ حيث أ ثابت ⟵ قَ(س) = صفر

④ ق(س) = س^{٥} ⟵ قَ(س) = ٥س^{٤}

⑤ ق(س) = ٥^{٣} ⟵ قَ(س) = صفر

⑥ ق(س) = أ^{٥} حيث أ ثابت ⟵ قَ(س) = صفر

⑦ ق(س) = س$^{\frac{٣}{٥}}$ ⟵ قَ(س) = $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{-٢}{٥}}$

⑧ ق(س) = س$^{\frac{-٣}{٥}}$ ⟵ قَ(س) = - $\frac{٣}{٥}$ س$^{\frac{-٨}{٥}}$

⑨ ق(س) = $\frac{١}{س^{٤}}$ ⟵ نجهز ق(س) = س$^{-٤}$

⟵ قَ(س) = -٤س$^{-٥}$

⑩ ص = ٥س ⟵ $\frac{دص}{دس}$ = ٥

⑪ ع = ٥س ⟵ $\frac{دع}{دس}$ = ٥

⑫ ف = ٥ن ⟵ $\frac{دف}{دن}$ = ٥

⑬ ق(س) = س^{٢}+٤س-٥ جد قَ(٢) ، (ق(٢))′

الحل : قَ(س) = ٢س + ٤

قَ(٢) = ٤ + ٤ = ٨

لإيجاد (ق(٢))′ ⟵ نعوض ثم نشتقه

ق(٢) = ٧ ⟵ (ق(٢))′ = (٧)′ = صفر

ملحوظة : (ق(عدد))′ = صفر

⑭ ق(س) = أ^{٢}+٥ب حيث أ، ب ثوابت

قَ(س) = ٠ + ٠ = صفر

⑮ ق(س) = أ^{٢}س^{٢} + ٥ب س حيث أ، ب ثوابت

قَ(س) = أ^{٢}×٢س + ٥ب = ٢أ^{٢}س + ٥ب

⑯ ق(س) = π^{٢} + ٢π ⟵ قَ(س) = صفر

⑰ ق(س) = π^{٢}س^{٢} + ٢πس + ٢π

قَ(س) = π^{٢}٢س + ٢π + ٠ = ٢π^{٢}س + ٢π

⑱ ق(س) = أ(س^{٢}+٥أ) حيث أ ثابت

⟵ ثابت × اقتران

قَ(س) = أ(٢س+٠) = ٢أس ⟵ حل آخر فك القوس

⑲ ص = س$^{-٢}$ + س$^{-١}$ + س + ٧ ، جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$

$\frac{دص}{دس}$ = -٢س$^{-٣}$ + -١س$^{-٢}$ + ١

= $\frac{-٢}{س^{٣}}$ + $\frac{-١}{س^{٢}}$ + ١

لا نعوض في القوة السالبة

$\frac{دص}{دس}\Big|_{س=٢}$ = $\frac{-٢}{٨}$ + $\frac{-١}{٤}$ + ١ = $\frac{١}{٢}$

⑳ جد $\frac{د}{دس}$(٥س^{٣}) = ١٥س^{٢}

㉑ جد $\frac{د}{دس}$(هـ^{٣}) حيث هـ ثابت = صفر

㉒ جد $\frac{د}{دس}$(ظا$\frac{π}{٤}$) = صفر ، لأن ظا$\frac{π}{٤}$ = ١

㉓ جد $\frac{د}{دس}$(س^{٣}-٢س+٧) = ٣س^{٢} - ٢

㉔ ق(س) = س^{٣}+٤س^{٢} ، جد نهـا$_{ع \leftarrow ١}$ $\frac{ق(ع)-ق(١)}{ع-١}$

الحل : المطلوب قَ(١)

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٨س ⟵ قَ(١) = ١١

㉕ ق(س) = س^{٢}(س-٣) ، جد نهـا$_{هـ \leftarrow ٠}$ $\frac{ق(٢+هـ)-ق(٢)}{هـ}$

الحل : ق(س) = س^{٣} - ٣س^{٢} المطلوب قَ(٢)

قَ(س) = ٣س^{٢} - ٦س ⟵ قَ(٢) = صفر

㉖ ق(س) = (٣-٢س)(س^{٢}+١) جد قَ(٢) .

⟵ إما نفك الأقواس أو قاعدة الضرب

قَ(س) = الأول × م.الثاني + الثاني × م.الأول

= (٣-٢س)(٢س) + (س^{٢}+١)(-٢)

قَ(٢) = (-١)(٤) + (٥)(-٢) = -١٤

㉗ ق(س) = ٢هـ(س) × س^{٢} ، جد قَ(٣) .

حيث ق(٣) = ٩ ، هـَ(٣) = -١

قَ(س) = الأول × م.الثاني + الثاني × م.الأول

= (٢هـ(س))(٢س) + (س^{٢}) × (٢هـَ(س))

قَ(٣) = ٢$\underbrace{هـ(٣)}$ × ٦ + ٩ × ٢هـَ(٣)

⟵ نجدها بالعودة للأصل والاستفادة من ق(٣)

ق(٣) = ٢هـ(٣) × ٩

٩ = ١٨ هـ(٣) ⟸ هـ(٣) = $\frac{١}{٢}$

∴ قَ(٣) = ١٢ × $\frac{١}{٢}$ + ٩×٢(-١) = -١٢

(٢٨) ق(س) = س^{٢}(٢ + س)(٤س + ١)، جد ق'(-١)

الحل: ضرب ثلاثي نحوله لثنائي .

ق(س) = (٢س^{٢} + س^{٣})(٤س + ١)

ق'(س) = الأول × م.الثاني + الثاني × م.الأول

= (٢س^{٢} + س^{٣})(٤) + (٤س + ١)(٤س + ٣س^{٢})

ق'(-١) = ١ × ٤ + -٣ × -١

٤ + ٣ = ٧

(٢٩) ق(س) = $\underbrace{\text{س}^{٢}.\text{هـ(س)}}_{\text{الأول}}$. $\underbrace{\text{ل(س)}}_{\text{الثاني}}$ ، جد ق'(٣)

علماً أن هـ(٣) = ل(٣) = -١ ، هـ'(٣) = ٣ ، ل'(٣) = $\frac{١}{٢}$

ق'(س) = (س^{٢}. هـ(س)) ل'(س) + ل(س) [س^{٢} هـ'(س) + هـ(س) × ٢س]

ق'(٣) = (٤ × -١)($\frac{١}{٢}$) + -١ × (٤ × ٣ + -١ × ٤)

ق'(٣) = -٢ + -(١٢ - ٤)

ق'(٣) = -٢ + -٨ = -١٠

حل آخر: مشتقة ضرب ثلاثي (٩ أقواس)

ق'(س) = س^{٢}(هـ(س).ل'(س)) + (س^{٢}هـ'(س).ل(س)) + (٢س . هـ(س).ل(س))

تمرين : ص = ق(س) × هـ(س) × ل(س)

اثبت أن $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = $\frac{\text{ق}'\text{(س)}}{\text{ق(س)}}$ + $\frac{\text{هـ}'\text{(س)}}{\text{هـ(س)}}$ + $\frac{\text{ل}'\text{(س)}}{\text{ل(س)}}$

(٣٠) ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} + ٢\text{س}}{٥ - \text{س}}$ ، جد ق'(٣)

الحل: ق'(س) = $\frac{\text{المقام × م.البسط − البسط × م.المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

ق'(س) = $\frac{(٥ - \text{س})(٢\text{س} + ٢) - (\text{س}^{٢} + ٢\text{س})(-١)}{(٥ - \text{س})^{٢}}$

ق'(٣) = $\frac{(٣)(٦) - (٨)(-١)}{(٣)^{٢}}$ = $\frac{١٨ + ٨}{٩}$ = $\frac{٢٦}{٩}$

(٣١) هـ(س) = $\frac{-٦}{٤ - \text{س}}$ ، جد هـ'(-٢)

هـ'(س) = $\frac{-\text{الثابت × م.المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$ = $\frac{-(-٦) × (-١)}{(٤ - \text{س})^{٢}}$

هـ'(-٢) = $\frac{-٦}{٣٦}$ = $-\frac{١}{٦}$

(٣٢) ق(س) = $\frac{\text{س}}{٥}$ − $\frac{٥}{\text{س}}$ − $\frac{٥}{٣}$ ، جد ق'(س)

ق'(س) = $\frac{١}{٥}$ − $\frac{-٥}{\text{س}^{٢}}$ = $\frac{١}{٥}$ + $\frac{٥}{\text{س}^{٢}}$

(٣٣) ق(س) = $\frac{(\text{س} - ٢)(\text{س} + ١)}{(\text{س}^{٢} + ٣)}$ ، جد ق'(١)

الحل: لدينا قسمة داخلها ضرب لذلك فك الأقواس

ق(س) = $\frac{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢}{(\text{س}^{٢} + ٣)}$

ق'(س) = $\frac{\text{المقام × م.البسط − البسط × م.المقام}}{(\text{المقام})^{٢}}$

ق'(س) = $\frac{(\text{س}^{٢} + ٣)(٢\text{س} - ١) - (\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢)(٢\text{س})}{(\text{س}^{٢} + ٣)^{٢}}$

ق'(١) = $\frac{(٤)(١) - (-٢)(٢)}{(٤)^{٢}}$ = $\frac{٨}{١٦}$ = $\frac{١}{٢}$

(٣٤) اذا كان ق(س) = $\frac{\text{م(س)}}{\text{ل(س)}(\text{س}^{٢} + ١)}$

وكان م(١) = -٢ ، م'(١) = ل(١) = -١

ق'(١) = ٣ ، فجد ل'(١) .

الحل: ق(س).ل(س).(س^{٢} + ١) = م(س)

ل(س) = $\frac{\text{م(س)}}{\text{ق(س)}(\text{س}^{٢} + ١)}$ { ق(١) = $\frac{-٢}{-١ × ٢}$ = ١

ل'(س) = $\frac{(\text{ق(س)}(\text{س}^{٢} + ١))\text{م}'\text{(س)} - \text{م(س)}[\text{ق(س)} × ٢\text{س} + (\text{س}^{٢} + ١)\text{ق}'\text{(س)}]}{(\text{ق(س)}(\text{س}^{٢} + ١))^{٢}}$

ل'(١) = $\frac{١ × ٢ × -١ - -٢ × (٢ + ٢ × ٣)}{(١ × ٢)^{٢}}$ = $\frac{-٢ + ١٦}{٤}$ = $\frac{١٤}{٤}$

تمرين محلول: ق(س) = س ق(س) + ١ ، جد ق'(٣)

الحل: ق(س) − س ق(س) = ١

$\frac{\text{ق(س)}\cancel{(١ - \text{س})}}{\cancel{١ - \text{س}}}$ = $\frac{١}{١ - \text{س}}$

ق'(س) = $\frac{-١ × -١}{(١ - \text{س})^{٢}}$ = $\frac{١}{(١ - \text{س})^{٢}}$

ق'(٣) = $\frac{١}{١}$ = ١

نريد حل آخر

تمارين :

(١) ق(س) = $\frac{٥\text{س} - ٤}{\text{هـ(س)}}$ ، جد هـ'(٣) اذا كان

ق'(٣) = ٢ق(٣) = -٢

الإجابة : (٧)

(٠٢) $ق(س) = \frac{\text{س . هـ(س)}}{\text{٣ - س}}$ ، جد ق'(١) حيث هـ(١) = ٢ ، هـ'(١) = -٣

الاجابة: صفر

(٠٣) $ق(س) = \left(\frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{٢}\right)\left(\frac{\text{س} + ١}{\text{س} - ١}\right)$ ، جد ق'(٣)

نريد ٣ حلول

الاجابة: $\frac{٥}{٢}$

منوعات رياضية مهمة :

① اذا كان ق'(٣) = ٣ ، ق(٣) = ٤

هـ'(٣) = ١ ، هـ(٣) = -٣

جد مايلي :-

* (٢ق - ٣هـ + ٧)'(٣) = ٢ق'(٣) - ٣هـ'(٣) + صفر

= ٢(٣) - ٣(١) = ٦ - ٣ = ٣

* (٢ق(٣) - ٣هـ + ٧)'(٣) = صفر - ٣هـ'(٣) + صفر

= -٣ × ١ = -٣

* $\underbrace{(ق.هـ)}_{\text{ضرب}}$'(٣) = ق(٣) × هـ'(٣) + هـ(٣) × ق'(٣)

= ٤ × ١ + -٣ × ٣ = -٣

* (ق(٣) . هـ(٣))' = (عدد)' = صفر

* $\underbrace{(ق(٣)}_{\text{ثابت ملزوه}}$. هـ(س))'(٣) = ٤ هـ'(٣)

= ٤ × ١ = ٤

* $\underbrace{\left(\frac{ق}{هـ}\right)}_{\text{قسمة}}'(٣) = \frac{\text{هـ(٣) ق'(٣) - ق(٣) هـ'(٣)}}{(\text{هـ(٣)})^٢}$

$= \frac{(-٣)(٣) - (٤)(١)}{(-٣)^٢} = \frac{-١٠}{٤}$

* $\left(\frac{\text{ق(٣)}}{\text{هـ(٣)}}\right)'$ = (عدد)' = صفر

* خطير $\left(\frac{\text{ق(٣)}}{هـ}\right)'(٣)$ ← نجد ق(٣) أولاً

$\left(\frac{٤}{هـ}\right)'(٣) = \frac{-٤ \times \text{هـ'(٣)}}{(\text{هـ(٣)})^٢} = \frac{-٤ \times ١}{(-٣)^٢} = -١$

② ق(س) = س^٣ - ٣س^٢

جد أصفار المشتقة الأولى حيث س ∈ [٠، ٣]

الحل: ق'(س) = ٣س^٢ - ٦س = ٠ ، س ∈ (٠، ٣)

٣س (س - ٢) = ٠

يهمل لأنه طرف هنا $\cancel{س = ٠}$ ، س = ٢

③ ق(س) = أ س^٣ + ٦س ، جد قيمة الثابت أ ، حيث العدد (-١) جذراً او صفراً للمشتقة الأولى.

الحل: نحتاج معادلة وهي

ق'(-١) = صفر (كلمة جذر المشتقة)

ق'(س) = ٣أ س^٢ + ٦ ← ق'(-١) = ٣أ + ٦ = ٠

٣أ = -٦ ⇐ $\boxed{أ = -٢}$

④ ق(س) = س + $\frac{جـ}{س}$ ، س ≠ ٠ ، ماقيمة الثابت جـ

حيث $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{٤هـ}{\text{ق(٢+هـ) - ق(٢)}} = ٨$

الحل: لدينا ٤ × $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{هـ}{\text{ق(٢+هـ) - ق(٢)}} = ٨$

٤ × $\frac{١}{\text{ق'(٢)}}$ = ٨ ⇐ ق'(٢) = $\frac{١}{٢}$

ق'(س) = ١ + $\frac{-جـ}{\text{س}^٢}$ ← ق'(٢) = ١ + $\frac{-جـ}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$

← $\frac{١}{٢}$ = $\frac{جـ}{٤}$ ← $\boxed{جـ = ٢}$

تمرين: ق(س) = جـ س^٣ + ٣س ، جـ ثابت

وكان $\lim\limits_{هـ \to ٠} \frac{\text{ق(٢+هـ) - ق(٢)}}{هـ} = -٩$ ، ماقيمة جـ؟

الاجابة : (-١)

⑤ مامعدل التغير في حجم المكعب بالنسبة لطول ضلعه عندما يكون طول الضلع ٥ سم؟

الحل: كلمة "معدل التغير" تعني المشتقة

حجم المكعب = (الضلع)^٣ ← ح = س^٣

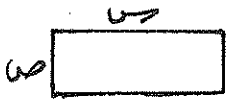
∴ المطلوب $\frac{دح}{دس}$ عندما س = ٥

$\frac{دح}{دس}$ = ٣س^٢ ← $\left.\frac{دح}{دس}\right|_{س=٥}$ = ٣(٥)^٢ = ٧٥ سم^٣

⑥ صفيحة مستطيلة الشكل طولها = ٣ أمثال عرضها تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها ، مامعدل التغير في مساحتها بالنسبة لطولها عندما يكون طولها ١٥ سم؟

الحل: المساحة = الطول × العرض

م = س × ص



نترجم المطلوب : $\left.\frac{دم}{دس}\right|_{س=١٥}$

المشكلة هي ص لذلك نتخلص من ص بدلالة س

حيث $س = ٣ص \longrightarrow ص = \frac{س}{٣}$

أصبح السؤال : $م = س \times \frac{س}{٣} \longrightarrow م = \frac{١}{٣}س^{٢}$

$\frac{دم}{دس} = \frac{١}{٣} \times ٢س \longrightarrow \frac{دم}{دس}\Big|_{س=١٥} = \frac{١}{٣} \times ٢ \times (١٥) = ١٠$

* ملاحظة لو كان المطلوب معدل تغير المساحة بالنسبة للعرض $\Leftarrow م = س \times ص \longrightarrow م = ٣ص \times ص$

$م = ٣ص^{٢} \longrightarrow \frac{دم}{دص} = ٦ص \longrightarrow \Big|_{\substack{س=١٥ \\ ص=٥}}$

$\frac{دم}{دص}\Big|_{ص=٥} = ٦ \times ٥ = ٣٠$

⑦ اذا كان $ق(س) = \frac{ل(س)}{هـ(س)}$ ، $هـ(س) \neq ٠$.

وكان كلاً من ل(س)، هـ(س) قابلان للاشتقاق عند $س = أ$ ، $ق'(أ) = ٠$ ، اثبت أن $ق(أ) = \frac{ل'(أ)}{هـ'(أ)}$

الحل : $ل(س) = ق(س) \times هـ(س)$

$ل'(س) = ق(س) \times هـ'(س) + هـ(س) \times ق'(س)$

$ل'(أ) = ق(أ) \times هـ'(أ) + هـ(أ) \times ق'(أ)$

$\frac{ل'(أ)}{هـ'(أ)} = \frac{ق(أ) \times \cancel{هـ'(أ)}}{\cancel{هـ'(أ)}} + ٠$

$\therefore ق(أ) = \frac{ل'(أ)}{هـ'(أ)}$ وهو المطلوب .

نريد حل آخر

قاعدة $\boxed{٧}$ مشتقة الاقترانات المتشعبة :

قبل البدء بالاشتقاق يجب التأكد من الاتصال وعند عملية الاشتقاق نشتق كل قاعدة لوحدها مع إزالة اشارات المساواة كي تدرس لوحدها .

وذلك حسب المبادئ التالية :

* نقط التحول نجد المشتقة من اليمين واليسار
* نقط الأطراف تكون عندها المشتقة غير موجودة .

أمثلة :

① $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$ ، جد $ق'(١)$

الحل : ق(س) غير متصل عند $س = ١ \Leftarrow \therefore ق'(١)$ غير موجودة

② $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & ، س \geq ١ \\ ٢س^{٣} & ، س < ١ \end{cases}$ ، جد $ق'(١)$

الحل : أولاً : الاتصال ق متصل عند $س = ١$

ثانياً : الاشتقاق مع ازالة المساواة كي تدرس

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ١ \\ ٦س^{٢} & ، س < ١ \end{cases}$

$ق'_{+}(١) \neq ق'_{-}(١)$

$٢ \neq ٦$ لذلك $ق'(١)$ غير موجودة

③ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+١ & ، س \geq ١ \\ ٢س & ، س < ١ \end{cases}$ ، جد $ق'(١)$

الحل : أولاً : الاتصال ق متصل عند $س = ١$

ثانياً : الاشتقاق مع ازالة المساواة كي تدرس

$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & ، س > ١ \\ ٢ & ، س < ١ \end{cases}$

$ق'_{+}(١) = ق'_{-}(١)$

$٢ = ٢ \Leftarrow$ لذلك $ق'(١) = ٢$

④ $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٢ \\ ٤س & ، س < ٢ \end{cases}$

جد ① $ق'_{+}(٢)$ ② $ق'_{-}(٢)$

الحل : أولاً : الاتصال عند ٢^{+}

$ق(٢) \overset{?}{=} \lim_{س \to ٢^{+}} ق(س)$

$٤ = ٤ \longrightarrow \therefore$ ق متصل عند ٢^{+}

$ق'(س) = ٢س$ ، $س > ٢$

$\therefore ق'_{+}(٢) = ٤$

الاتصال عند ٢^{-}

$ق(٢) \overset{?}{=} \lim_{س \to ٢^{-}} ق(س)$

$٤ \neq ٨ \longrightarrow \therefore$ ق غير متصل عند ٢^{-}

$\therefore ق'_{-}(٢)$ غير موجودة .

⑤ $ق(س) = \begin{cases} س^{٣}+١ & ، س \neq ١ \\ ٢س & ، س = ١ \end{cases}$ ، جد $ق'(١)$

الحل : الاتصال عند $س = ١ \Longleftarrow ق(١) \overset{?}{=} \lim_{س \to ١} ق(س)$

$٢ = ٢$

$\therefore$ ق متصل عند $س = ١$

$قَ(س) = ٣س^{٢} \longrightarrow قَ(١) = ٣$

---

⑥ $$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-١}{س-١} & ، س \neq ١ \\ ٣ & ، س = ١ \end{cases}$$ ، جد قَ(١)

الحل : أولاً : الاتصال عند س = ١

$ق(١) \overset{?}{=} \lim_{س \to ١} ق(س)$

$٣ \overset{?}{=} \lim_{س \to ١} \frac{س^{٢}-١}{س-١} = ٢$

$٣ \neq ٢ \Leftarrow$ ∴ ق غير متصل عند س = ١

∴ قَ(١) غير موجودة

---

⑦ $$ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-١}{س-١} & ، س \neq ١ \\ ٢ & ، س = ١ \end{cases}$$ ، جد قَ(١)

الحل : أولاً : الاتصال عند س = ١

$ق(١) \overset{?}{=} \lim_{س \to ١} ق(س)$

$٢ = ٢ \longrightarrow$ ∴ ق متصل عند س = ١

لا نستطيع ايجاد قَ(١) باستخدام القواعد لانه (صفر) مقام فنستخدم التعريف .

$$قَ(١) = \lim_{ع \to ١} \frac{ق(ع) - ق(١)}{ع - ١}$$

$$= \lim_{ع \to ١} \frac{\frac{ع^{٢}-١}{ع-١} - ٢}{ع - ١} = \lim_{ع \to ١} \frac{ع+١-٢}{ع-١} = ١$$

تمرين محلول :

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{حا^{٢}٣س}{س} & ، س \neq ٠ \\ ٠ & ، س = ٠ \end{cases}$$

جد قَ(٠)

الحل : اولاً : الاتصال عند س = ٠

$ق(٠) \overset{?}{=} \lim_{س \to ٠} ق(س)$

$٠ \overset{?}{=} \lim_{س \to ٠} \frac{حا^{٢}٣س}{س}$

$٠ \overset{?}{=} \lim_{س \to ٠} \frac{حا٣س}{س} \times \lim_{س \to ٠} حا٣س$

$٠ = ٣ \times ٠ \Leftarrow ٠ = ٠ \Leftarrow$ متصل عند س = ٠

نجد قَ(٠) بالتعريف لانه صفر مقام

$$قَ(٠) = \lim_{ع \to ٠} \frac{ق(ع) - ق(٠)}{ع - ٠}$$

$$قَ(٠) = \lim_{ع \to ٠} \frac{\frac{حا^{٢}٣ع}{ع} - ٠}{ع}$$

$$= \lim_{ع \to ٠} \frac{حا^{٢}٣ع}{ع^{٢}} = ٩$$

---

⑧ $$ق(س) = \begin{cases} س^{٢}+٥ & ، ١ \leq س < ٣ \\ ٦س-٤ & ، ٣ \leq س < ٦ \end{cases}$$ ، جد قَ(س)

ق(س) متصل على القواعد $س^{٢}+٥$ ، ٦س−٤ على فتراتها المفتوحة ⇐ كثيرات حدود

الحل : $$قَ(س) = \begin{cases} ٢س & ، ١ < س < ٣ \\ ٦ & ، ٣ < س < ٦ \end{cases}$$

الآن نقوم بدراسة المساواة عند س = ٣ (تحول)

أولاً : الاتصال عند س = ٣

$ق(٣) \overset{?}{=} \lim_{س \to ٣} ق(س)$

$$١٤ \overset{?}{=} \underbrace{\underbrace{\lim_{س \to ٣^{+}} ق(س)}_{١٤} \quad \underbrace{\lim_{س \to ٣^{-}} ق(س)}_{١٤}}_{\lim_{س \to ٣} ق(س) = ١٤}$$

∴ ١٤ = ١٤

∴ ق متصل عند س = ٣

ثانياً : الاشتقاق

$قَ_{+}(٣) \overset{?}{=} قَ_{-}(٣)$

$٦ = ٦ \longrightarrow$ ∴ قَ(٣) = ٦

{١ ، ٦} أطراف ← المشتقة غير موجودة عند الاطراف

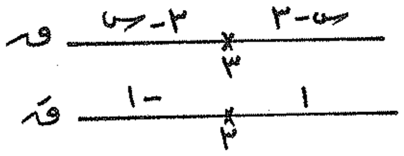
∴ $$قَ(س) = \begin{cases} ٢س & ، ١ < س < ٣ \\ ٦ & ، ٣ \leq س < ٦ \\ غ.م & ، س = ١ ، ٦ \end{cases}$$

---

⑨ ق(س) = |س−٣| − ١ ، جد قَ(٠) ، قَ(٥) ، قَ(٣)

الحل : نعيد التعريف و ليكن على الخط

$\boxed{س = ٣}$



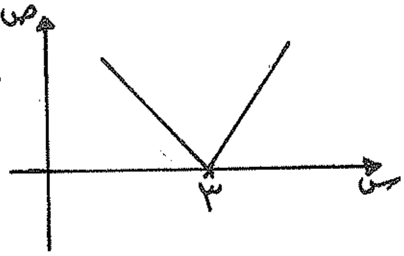
قَ(٠) عادية = −١ ، قَ(٥) عادية = ١

قَ(٣) تحول ← الاتصال : متصل
له الاشتقاق ⇐ $قَ_{+}(٣) \overset{?}{=} قَ_{-}(٣)$

$١ \neq -١$

∴ قَ(٣) غير موجودة

تذكير : الاقتران المطلق دائماً متصل .

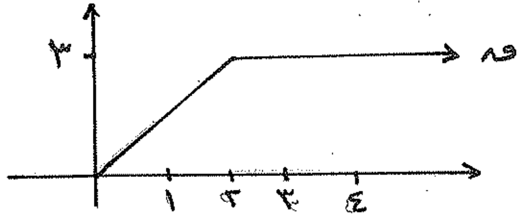


عند س = ٣ (رأس مدبب)
قَ (٣) غ.م

⑩ ق(س) = |٢-س| - |س٢-١|، فإن قَ(٣) :
أ) -٧ ب) -٥ جـ) -٦ د) غير موجودة

الحل : نعيد التعريف شفوي عند س = ٣
ق(س) = س-٢ - (س٢-١) = -س٢+س-١
قَ(س) = -٢س+١
∴ قَ(٣) = -٢(٣)+١ = -٥ (ب)

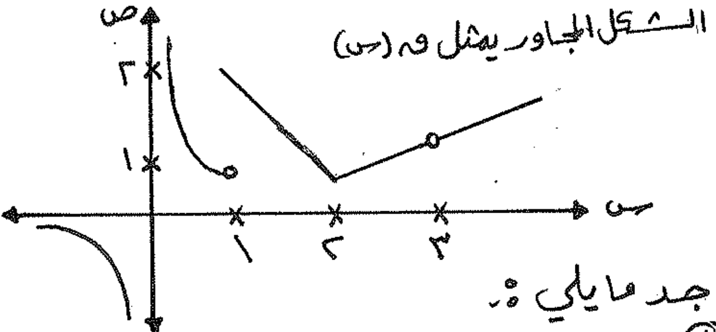
⑪ الرسم المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على الفترة [٠ ، ∞[.



جد ① قَ(٤) ② قَ(٢) ③ قَ(٠) ④ قَ(١)

الحل :
قَ(٤) = ٠ (على ثابت)
قَ(٢) = غير موجودة (رأس مدبب)
قَ(٠) = غير موجودة (طرف)
قَ(١) = م = $\frac{٣-٠}{٢-٠}$ = $\frac{٣}{٢}$ (على مائل) .

الشكل المجاور يمثل ق(س)



جد ما يلي :
① نهـا ق(س) غير موجودة ، ما قيم الثابت أ ؟
س←أ
← عند القفزات ← أ ∈ {٠ ، ١}

② ما قيم س التي يكون عندها الاقتران غير متصل ؟
← عند القفزات + الحلقات ← أ ∈ {٠ ، ١ ، ٣}

③ ما قيم س التي يكون عندها الاقتران غير قابل للاشتقاق؟
← عند القفزات + الحلقات + الرؤوس المدببة + الأطراف
← أ ∈ {٠ ، ١ ، ٢ ، ٣}

④ جد قَ(١,٥)
← قَ(١,٥) = م المستقيم المار بـ (٢،١) ، (١،٢)
م = $\frac{١-٢}{٢-١}$ = -١

ملاحظات : اذا لم يعطى في السؤال فترة فلا يوجد أطراف

⑬ ق(س) = س|س-٣| + ٢س٢ ، جد قَ(س)

الحل : نعيد التعريف

س=٣

ق ـــ ٣-س ـــ ـ ـ ـ ـــ ٣ ـــ س-٣ ـــ + + + ـــ

ق(س) = { س(٣-س) + ٢س٢ ، س > ٣
س(س-٣) + ٢س٢ ، س ≥ ٣

ق(س) = { س٢+٣س ، س ≤ ٣
٣س٢-٣س ، س ≥ ٣

القواعد متصلة لأنها كثيرات حدود

قَ(س) = { ٢س+٣ ، س > ٣
٦س-٣ ، س < ٣
غ.م ، س = ٣

قَ(٣) تحول ⓐ الاتصال : متصل
ⓑ الاشتقاق قَ₊(٣) ≟ قَ₋(٣)
١٥ ≠ ٩

تمرين : ق(س) = |٤-س٢| ، اقتراناً متصلاً على ح
جد أ) قَ(س)
ب) قيم س التي يكون عندها غير قابلاً للاشتقاق مع ذكر السبب

⑭ ق(س) = |-س٢+٢س-٣| ، جد قَ(-١)

الحل : نعيد التعريف -س٢+٢س-٣ = ٠
لا تحلل لأن المميز سالب

س٢-٢س+٣
ـ ـ ـ ـ ـ ـ

ق(س) = س٢-٢س+٣
قَ(س) = ٢س-٢ ← قَ(-١) = -٢-٢ = -٤

ملاحظة : يمكن اعادة التعريف شفوي بحيث نعوض العدد ثم نختار القاعدة المناسبة

* $ق(-١) = -١ - ٢ - ٣ = -٦$ (سالب)

∴ $ق(س) = س^{٢} - ٢س + ٣$ (القاعدة السالبة ثم الضرب في سالب)

$قَ(س) = ٢س - ٢ \Leftarrow قَ(-١) = -٤$

---

⑮ $ق(س) = |س-١| - |س+١|$ ، جد مايلي :

أ) المشتقة الأولى من اليمين للنقطة $(-١ ، ٢)$

ب) المشتقة الأولى من اليسار للنقطة $(-١ ، ٢)$

ج) بين اذا كان ق(س) قابل للاشتقاق عند النقطة $(-١ ، ٢)$

الحل : يجب اعادة التعريف .

$\boxed{س = ١}$ $\boxed{س = -١}$

$(١-س)-(-١-س)$ ــــ -١ ــــ $(١-س)-(س+١)$ ــــ ١ ــــ $(س-١)-(س+١)$

$ق(س) =$ ٢ ــــ -١ ــــ $-٢س$ ــــ ١ ــــ -٢

$$ق(س) = \begin{cases} ٢ & ، س < -١ \\ -٢س & ، -١ \le س \le ١ \\ -٢ & ، س > ١ \end{cases}$$

$$قَ(س) = \begin{cases} صفر & ، س < -١ \\ -٢ & ، -١ < س < ١ \\ صفر & ، س > ١ \end{cases}$$

أ) المطلوب $قَ_{+}(-١) = -٢$

ب) المطلوب $قَ_{-}(-١) =$ صفر

ج) نبحث الاتصال عند $س = -١$ متصل

$قَ_{+}(-١) \ne قَ_{-}(-١)$ ← لذلك قَ(−١) غ.م

تمرين محلول : أوجد قَ(س) للاقتران

$ق(س) = \frac{|س^{٢} - ٤س + ٣|}{س(س-١)}$ ، $س \in (١ ، ٤]$

الحل : اعادة تعريف $|س^{٢} - ٤س + ٣|$ ← $س = ١$ ، $س = ٣$

١ ــــ $-س^{٢}+٤س-٣$ ــــ ٣ ــــ $س^{٢}-٤س+٣$ ــــ ٤

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{-س^{٢}+٤س-٣}{س(س-١)} & ، ١ < س < ٣ \\ \frac{س^{٢}-٤س+٣}{س(س-١)} & ، ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{-\cancel{(س-١)}(س-٣)}{س\cancel{(س-١)}} & ، ١ < س < ٣ \\ \frac{\cancel{(س-١)}(س-٣)}{س\cancel{(س-١)}} & ، ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

$$ق(س) = \begin{cases} \frac{٣}{س} - ١ & ، ١ < س < ٣ \\ ١ - \frac{٣}{س} & ، ٣ \le س \le ٤ \end{cases}$$

(القواعد متصلة على فتراتها المفتوحة)

$$قَ(س) = \begin{cases} \frac{-٣}{س^{٢}} & ، ١ < س < ٣ \\ \frac{٣}{س^{٢}} & ، ٣ < س < ٤ \\ غير موجودة & س = ٣ ، ٤ \end{cases}$$

$قَ_{+}(٣) = \frac{١}{٣}$ ، $قَ_{-}(٣) = \frac{-١}{٣}$

$قَ_{+}(٣) \ne قَ_{-}(٣)$ ← قَ(٣) غير موجود.

تمرين : $ق(س) = ٣|س-٢| - |س+١| + ٢س$
بين أن ق(س) غير قابل للاشتقاق عند النقطة $(٢ ، ١)$

$$مشتقة \underset{لوحده}{[\ ]} = \begin{cases} صفر & ، ناتج التعويض كسر \\ غ.م & ، ناتج التعويض صحيح \end{cases}$$

أمثلة :

① $ق(س) = [٤ - \frac{س}{٢}]$ ، جد قَ(١)

الحل : نعوض العدد ١ ← $[٤ - \frac{١}{٢}] = [٣\frac{١}{٢}]$ ← كسر

∴ قَ(١) = صفر

② $ق(س) = [٢س + ٠٫٤]$ ، جد قَ(١٫٣)

الحل : نعوض العدد ١٫٣ ← $[٢٫٦ + ٠٫٤] = [٣]$ ← صحيح
غير متصل

∴ قَ(١٫٣) غير موجودة

تمرين : اذا كان $ق(س) = [\sqrt{٢س+١}]$ ، فإن
قَ(١) تساوي

أ) صفر ب) $\sqrt{٣}$ ج) ١ د) غ.م

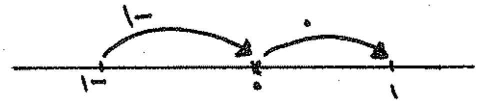
الإجابة : (أ)

---

③ $ق(س) = س^{٢}[س]$ ، جد قَ(٠)

الحل : سوف نعيد التعريف لأن [س] ليس لوحده بل مضروب

$\boxed{ل = ١}$



$$ق(س) = \begin{cases} س^{٢} \times -١ & ، -١ \le س < ٠ \\ س^{٢} \times صفر & ، ٠ \le س < ١ \end{cases}$$

ق(٠) تحول أ) الاتصال : متصل

ب) الاشتقاق

ق َ(س) = { −٢س ، −١ < س < ٠ ؛ صفر ، ٠ < س < ١

ق َ₊(٠) ≟ ق َ₋(٠)

صفر = صفر ← ق َ(٠) = صفر

---

④ ق(س) = [١/٣ س] / (س − ٣) ، س ≠ ٣ ، جد ق َ(٣,٥)

الحل: نعيد التعريف لوجود القسمة .

ل = ٣

ق(س) = ١/(س − ٣) ، ٣ ≤ س < ٦

ق َ(س) = (−١ × ١)/(س − ٣)² ⇐ ق َ(٣,٥) = −١/(١/٢)² = −١/(١/٤) = −٤

تمرين ①

ق(س) = |س − ٣| / [١/٣ س] ، جد ق َ(٣,٥)

الاجابة: (١)

تمرين ②

اذا كان هـ(س) = [٢س + ١] / ل(س) ، هـ(١/٢) = ٢ ،

هـ َ(١/٢) = −١ ، ما قيمة ل َ(١/٢)؟

الاجابة: (١/٤)

---

⑤ ق(س) = |٣ − س| × [س/٢ − ٥] ، جد ق َ(−٣)

الحل: ق(س) = (٣ − س) × −٧ عند س = −٣

ق َ(س) = −٧ × −١ = ٧ ← ق َ(−٣) = ٧

تمرين

ق(س) = س⁴ √(س² − ٦س + ٩) ،

أوجد ق َ(٣) .

الاجابة: (غير موجودة)

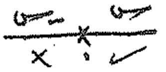
---

⑥ ق(س) = { هـس² + ب ، س ≤ ١ ؛ ١/|س| ، س > ١

جد الثوابت جـ ، ب اللذان يجعلان ق(س) قابل للاشتقاق عند س = ١

الحل: نعيد تعريف المطلق ونأخذ ما يلزم

س = ٠



ق(س) = { هـس² + ب ، س ≤ ١ ؛ ١/س ، س > ١

من الاشتقاق نستفيد أ) الاتصال : متصل أكيد

ق(١) = نهـا (س ← ١⁻) ق(س) = نهـا (س ← ١⁺) ق(س)

١ = هـ + ب ← $\boxed{هـ + ب = ١}$ .... ①

* ملاحظة لم نضع علامات استفهام على المساواة لأن الاقتران قابل للاشتقاق فهو طبعاً متصل .

ب) الاشتقاق : ق َ(س) = { ٢هـس ، س ≤ ١ ؛ −١/س² ، س > ١

ق َ₊(١) = ق َ₋(١) ← −١ = ٢هـ ← هـ = −١/٢

نعوض في ① ← −١/٢ + ب = ١ ← ب = ٣/٢

تمرين محلول ①

ق(س) = { جـس³ + ل س ، س < ٢ ؛ جـس² + ٩ل س − ١٢ ، س ≥ ٢

وكانت ق َ(٢) موجودة ، جد قيم جـ ، ل .

الحل: من الاشتقاق نستفيد أنه ق متصل عند س = ٢

∴ نهـا (س ← ٢⁺) (جـس² + ٩ل س − ١٢) = نهـا (س ← ٢⁻) (جـس³ + ل س)

٤جـ + ١٨ل − ١٢ = ٨جـ + ٢ل

١٦ل − ٤جـ = ١٢ ← $\boxed{٨ل − ٢جـ = ٦}$ ... ①

ق َ(س) = { ٣جـس² + ل ، س < ٢ ؛ ٢جـس + ٩ل ، س ≥ ٢

ق َ₊(٢) = ق َ₋(٢)

٤جـ + ٩ل = ١٢جـ + ل ← ٨جـ = ٨ل

$\boxed{جـ = ل}$ ...... ②

عوض ② في ①

٨جـ − ٢جـ = ٦ ← $\boxed{جـ = ١}$ ← ∴ $\boxed{ل = ١}$

تمرين محلول ②

اذا كان هـ(س) قابل للاشتقاق وكان هـ(٢) = هـ َ(٢) = ٢

وكان ق(س) = { س هـ(س) ، س < ٢ ؛ ٦س − ٨ ، س ≥ ٢

بين أن ق(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ٢

الحل: لأن هـ(س) قابلاً للاشتقاق عند س = ٢

∴ هـ(س) متصلاً عند س = ٢

نبحث اتصال ق عند س = ٢ ، ق(٢) = ٤

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{+}} ٦\text{س} - ٨ = ٤$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{ق(س)} = \lim\limits_{\text{س}\to ٢^{-}} \text{س هـ(س)} = ٢ \times \text{هـ}(٢) = ٤$

$\lim\limits_{\text{س}\to ٢} \text{ق(س)} = ٤ = \text{ق}(٢) \longrightarrow$ ∴ متصل عند س = ٢

$$\text{ق}'(\text{س}) = \begin{cases} \text{س هـ}'(\text{س}) + \text{هـ}(\text{س}) & ، \text{س} < ٢ \\ ٦ & ، \text{س} > ٢ \end{cases}$$

$\text{ق}'_{+}(٢) = ٦$ ، $\text{ق}'_{-}(٢) = ٢\text{هـ}'(٢) + \text{هـ}(٢) = ٦$

∴ $\text{ق}'(٢) = ٦ \Longrightarrow$ ∴ ق قابل للاشتقاق عند س = ٢

قاعدة $\boxed{٨}$ "قاعدة السلسلة" ص ← ع ← س

* اذا كان لدينا ٣ رموز بمعادلتين بحيث ص بدلالة ع ، ع بدلالة س ، والمطلوب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ نستخدم قاعدة السلسلة

$$\boxed{\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}}$$

خطوات الحل : * نشتق ونطبق القانون .

* نتخلص من رموز القوس الأول .

* ملاحظة: اذا كان المطلوب $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند نقطة أو عند عدد فلا نستبدل رموز القوس الأول بل نجده كعدد .

① ص = ٥ع² ، ع = س² − ١ ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$.

الحل: حسب السلسلة لوجود ٣ رموز .

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} = ١٠\text{ع}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٢\text{س}$

∴ $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءع}} \times \frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

$= ١٠\text{ع} \times ٢\text{س} = ٢٠\text{س ع}$

$= ٢٠\text{س}(\text{س}^٢ - ١) = ٢٠\text{س}^٣ - ٢٠\text{س}$

② ص = $\frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{٣}$ ، ع = $\frac{٣}{\text{ص}}$ ، جد $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}}$

الحل: حسب السلسلة

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢\text{س} - ١}{٣}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} = \frac{-٣}{\text{ص}^٢}$

∴ $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$= \frac{-\cancel{٣}}{\text{ص}^٢} \times \frac{٢\text{س} - ١}{\cancel{٣}}$

$= \frac{-(٢\text{س} - ١)}{\left(\frac{\text{س}^٢ - \text{س}}{٣}\right)^٢}$

$= \frac{-٩(٢\text{س} - ١)}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢} = \frac{٩ - ١٨\text{س}}{(\text{س}^٢ - \text{س})^٢}$

③ ص = س³ − ٥س ، ن = ٣س ، جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$ عندما س = −١ .

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٣\text{س}^٢ - ٥$ ، $\frac{\text{ءن}}{\text{ءس}} = ٣$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} \times \frac{\text{ءس}}{\text{ءن}}$ انتبه مقلوب

$= ٣\text{س}^٢ - ٥ \times \frac{١}{٣} = \frac{٣\text{س}^٢ - ٥}{٣}$

$\left.\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}\right|_{\text{س}=-١} = \frac{٣(-١)^٢ - ٥}{٣} = \frac{-٢}{٣}$.

④ $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = ٤\text{س}^{-١}$ ، ع = أص ما قيمة الثابت أ علماً بأنه $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = ٤$ عندما س = ٢

الحل: $\frac{\text{ءع}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءع}}{\text{ءص}} \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ ← لدينا $\frac{\text{ءس}}{\text{ءص}} = \frac{٤}{\text{س}}$ ← مقلوبه

$٤ = \text{أ} \times \frac{\text{س}}{٤}$ عندما س = ٢

$٤ = \text{أ} \times \frac{٢}{٤} \longleftarrow \boxed{\text{أ} = ٨}$

⑤ ص = $\frac{٣\text{ل}}{\text{ل}^٢ + ١}$ ، ل = ١٠س² + س + ١

جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عندما س = $\frac{-١}{٢}$

الحل: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءل}} = \frac{(\text{ل}^٢ + ١) \times ٣ - ٣\text{ل} \times ٢\text{ل}}{(\text{ل}^٢ + ١)^٢} = \frac{٣ - ٣\text{ل}^٢}{(\text{ل}^٢ + ١)^٢}$

$\frac{\text{ءل}}{\text{ءس}} = ٢٠\text{س} + ١$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{ءص}}{\text{ءل}} \times \frac{\text{ءل}}{\text{ءس}}$

$= \frac{٣ - ٣\text{ل}^٢}{(\text{ل}^٢ + ١)^٢} \times (٢٠\text{س} + ١)$

س = $\frac{-١}{٢}$

ل = $١٠ \times \frac{١}{٤} + \frac{-١}{٢} + ١$

$\boxed{\text{ل} = ٣}$

دص/دس |_(س = ١/٢) = (٢ - ١٨)/١٠٠ × -٩ = ١٤٤/١٠٠ .

تمرين : س = جا ن ، دن/دم = ٨ ، جد دس/دم
عندما ن = ٢π/٣

الإجابة : (-٤)

⑥ ص = (س^٣ - ٢س)^٥ ، جد دص/دس باستخدام السلسلة

الحل : في السلسلة نحتاج ٣ رموز لذلك نفرض ع
حيث ع = س^٣ - ٢س
∴ ص = ع^٥ ، ع = س^٣ - ٢س
دص/دس = دص/دع × دع/دس
= ٥ع^٤ × (٣س^٢ - ٢) ← ٥(س^٣ - ٢س)^٤(٣س^٢ - ٢)

تمرين : ص = س^٤/(١ - س^٣)^٤ ، جد دص/دس باستخدام السلسلة

قاعدة ٩ مشتقة المركب ( )^قوة

المشتقة = القوة ( )^(قوة - ١) × (مشتقة الداخل)
ص = هـ^ن(س)
اثبت أن دص/دس = ن هـ^(ن - ١)(س) × هـَ(س)

الحل : البرهان بالسلسلة
* في السلسلة نحتاج ٣ رموز لذلك يجب أن نفرض
ع = هـ(س)
∴ ص = (هـ(س))^ن ، ع = هـ(س)
أصبح السؤال ص = ع^ن ، ع = هـ(س)
دص/دس = دص/دع × دع/دس
= ن ع^(ن - ١) × هـَ(س) = ن(هـ(س))^(ن - ١) × هـَ(س)

①. ق(س) = (س^٢ - ٣س + ١)^-٨ ، جد قَ(س)
قَ(س) = -٨(س^٢ - ٣س + ١)^-٩ × (٢س - ٣)

③. ق(س) = (س^٢ - ٣)^٣(٥ - س) ، جد قَ(٢)
ضرب مع مركب

الحل : قَ(س) = الأول × م.الثاني + الثاني × م.الأول
= (س^٢ - ٣)^٣(-١) + (٥ - س) × [٣(س^٢ - ٣)^٢ . ٢س]
قَ(٢) = (١)(-١) + ٣ × (١)(٤) = ٣٥

تمرين ① : ق(س) = |٣ - س| ، أوجد
(أ) (ق^٢)َ(١) ، (ب) (ق^٢)َ(٣) .

تمرين ② : ق(س) = -٢/(٣ - س)^٣ ، جد قَ(١)

الإجابة : (-٣/٨)

③ ق(س) = (س^٢ - ٢)^٣(٥ - ٢س)^٤ ، جد قَ(٢)

الحل : قَ(س) = الأول × م.الثاني + الثاني × م.الأول
قَ(س) = (س^٢ - ٢)^٣[٤(٥ - ٢س)^٣(-٢)] + (٥ - ٢س)^٤[٣(س^٢ - ٢)^٢(٢س)]
قَ(٢) = ٨[-٨(١)] + (١)[٣(٤)(٤)] = -١٦

نوعية هامة من المركب ق(ليس س) :

الاقتران	المشتقة
ق(٢س)	قَ(٢س) × ٢
ق(س^٢ + ٥)	قَ(س^٢ + ٥) × ٢س
ق(٢/س)	قَ(٢/س)(-٢/س^٢)
ق(هـ(س))	قَ(هـ(س))(هـَ(س))
ق^٣(س) أو (ق(س))^٣	٣(ق(س))^٢(قَ(س))(١)
ق(ق(٢س))	قَ(ق(٢س)) قَ(٢س) × ٢

أمثلة :

①. ق(٣س) = ٣س^٢ - ٤س ، جد قَ(٦)

الحل : قَ(٣س) × ٣ = ٦س - ٤
قَ(٦) × ٣ = ٦(٢) - ٤
قَ(٦) = ٨/٣

احذر عند التعويض
حيث ٣س = ٦
س = ٢
تم تعويض ٢ بدل س

②. ق(س^٢) = (٣س - ١)^٢ ، جد قَ(٤) حيث س < ٠ .

الحل : قَ(س^٢)(٢س) = ٢(٣س - ١)^١(٣)
احذر التعويض حيث س^٢ = ٤ ← س = +٢ تهمل ، -٢
قَ(٤)(-٤) = ٢(-٦ - ١)(٣)
قَ(٤) = -٤٢/-٤ = ٢١/٢

مراجعة : للتركيب (ق ∘ هـ)(س)

ق(س) = س^٣ + ٢س ، هـ(س) = ٣س − ١ ، جد

① (ق ∘ هـ)(١) = ق(هـ(١))
= ق(٢) = ١٢

② (هـ ∘ ق)(١) = هـ(ق(١))
= هـ(٣) = ٨

③ (ق ∘ هـ)(س) = ق(هـ(س))
= ق(٣س − ١)
= (٣س − ١)^٣ + ٢(٣س − ١)

④ (هـ ∘ ق)(س) = هـ(ق(س))
= هـ(س^٣ + ٢س)
= ٣(س^٣ + ٢س) − ١

قاعدة ١٠ "مشتقة التركيب" (ق ∘ هـ)(س)

* (ق ∘ هـ)′(س) = ق′(هـ(س)) (هـ′(س))
* (ل ∘ م)′(س) = ل′(م(س)) (م′(س))

أمثلة :

① ق(س) = (س^٢ − س)/٢ ، هـ(س) = ٦/س ، جد
أ) (ق ∘ هـ)′(٣)   ب) (هـ ∘ ق)′(٣)

الحل : أ)

(ق ∘ هـ)′(٣) = ق′(هـ(٣)) (هـ′(٣))
= ق′(٢) × −٦/٩
= ((٤ − ١)/٢)(−٦/٩) = −١

الاساسيات الثلاثة
هـ(٣) = ٦/٣ = ٢
هـ′(س) = −٦/س^٢
ق′(س) = (٢س − ١)/٢
ق(٣) = ٣

ب)
(هـ ∘ ق)′(٣) = هـ′(ق(٣)) (ق′(٣))
= هـ′(٣) × ٥/٢
= −٦/٩ × ٥/٢ = −٣٠/١٨ = −٥/٣

② م(س) = (س^٢ − ٣)^٢ ، ل(س) = س(٣ − س) ،
٣س − س^٢
جد أ) د/دس (م(ل(س))) عندما س = ٢

③ ق(س) = هـ(س^٣) − هـ^٣(س) ، جد ق′(١) ،
حيث هـ(١) = ٢ ، هـ′(١) = −٣

الحل : نجهز الإقتران لوجود قوة على هـ

ق(س) = هـ(س^٣) − (هـ(س))^٣
ق′(س) = هـ′(س^٣)(٣س^٢) − ٣(هـ(س))^٢ (هـ′(س))
ق′(١) = هـ′(١)(٣) − ٣(هـ(١))^٢ (هـ′(١))
= −٣ × ٣ − ٣(٢)^٢(−٣) = ٢٧

④ ص = ق(ق(٢س + ١)) ، جد دص/دس |س=١
حيث ق′(٣) = −٢ ، ق(٣) = ٥ ، ق′(٥) = −١

دص/دس |س=١ = ق′(ق(٢س + ١)) (ق′(٢س + ١)) (٢)
= ق′(٥) × −٢ × ٢
= −١ × −٤ = ٤

⑤ اذا كان ق(٣س − ١) = ١/س^٢ − ٢/س ،
اثبت أن ق′(٥) = ١/١٢ .

الحل : ق′(٣س − ١) × ٣ = −٢س/س^٤ + ٢/س^٢

٣س − ١ = ٥
س = ٢

ق′(٥) × ٣ = −٢/٨ + ٢/٤
~~٣~~ق′(٥)/~~٣~~ = (١/٤)/٣
ق′(٥) = ١/١٢

واجب ① : ص = ق^٣(٥س) ، جد دص/دس |س=١
حيث ق(٥) = ٢ ، ق′(٥) = −١

الاجابة : (−٦٠)

واجب ② : ق(س^٢ − س) = (س − ١)^٣ ، جد ق′(٦) .

واجب ③ : اذا كان ق′(٣) = ٨ ، جد مشتقة
ق(س^٢ + ٢) عندما س = ١

الاجابة : (١٦)

واجب ④ : ق(س) = (س × هـ^٢(س))/(س + ١) ،
جد ق′(٢) حيث هـ(٢) = −١ ، هـ′(٢) = ٣

الاجابة : −٣٥/٩

ب) $\frac{د}{دس}$ (ل(م(س))) عندما س = ٢

هـ) (ل∘ل)َ(٢)

الحل: أ) $\frac{د}{دس}$ (م(ل(س))) = مَ(ل(س))(لَ(س))

= مَ(٢) × -١

= ٢(١)(٤)(-١) = -٨

* ل(٢) = ٢
* لَ(س) = ٣-٢س
* م(٢) = ١
* مَ(س) = ٢(س^{٣}-٣)(٣س)

ب) $\frac{د}{دس}$ (ل(م(س))) $|_{س=٢}$

= لَ(م(٢)) × مَ(٢) = لَ(١) × ٨ = ١ × ٨ = ٨

جـ) (ل∘ل)َ(٢) = لَ(ل(٢)) (لَ(٢))

= لَ(٢)(-١) = -١ × -١ = ١

③ (م∘ل)(س) = س ، مَ(س) = $\frac{١}{س}$ ، فجد لَ(س)

الحل: (م∘ل)(س) = س ⟵ نشتق الطرفين

مَ(ل(س)) لَ(س) = ١

$\frac{١}{ل(س)}$ × لَ(س) = ١ ⟵ ل(س) = لَ(س)

***ملاحظة:** لو كان السؤال (م∘ل)َ(س) = س

مَ(ل(س)) (لَ(س)) = س

$\frac{١}{ل(س)}$ × لَ(س) = س

لَ(س) = س . ل(س)

لانشتق الطرفين
بل نقوم
بانزال المشتقة

④ اذا كان ق(١) = ٤ ، هـ(س) = س^{٢}-٣
(هـ∘ق)َ(١) = ٢٤ ، ماقيمة قَ(١) ؟

الحل: هَ(ق(١)) قَ(١) = ٢٤

هَ(٤) قَ(١) = ٢٤

٨ × قَ(١) = ٢٤

قَ(١) = ٣

ق(١) = ٤
هَ(س) = ٢س
قَ(١) = ؟

تمرين ①: ق(س) = س^{٢}-٩ ، هَ(٣) = ٥ ،
(ق∘هـ)َ(٣) = ١٥ ، أوجد هـ(٣) $\boxed{(١٫٥)}$

تمرين ②: ق(س) = س^{٢}-٣ ، ل(س) = |س-٣|
جد (ق∘ل)َ(٢) $\boxed{(-٢)}$

تمرين محلول: اذا كان ق ، هـ قابليه للاشتقاق وكان (ق∘هـ)(س) = س ، قَ(س) = ١+(ق(س))^{٢}
جد هَ(س) .

الحل: (ق∘هـ)(س) = س ⟵ نشتق الطرفين

قَ(هـ(س)) (هَ(س)) = ١

$(١ + \underbrace{(ق(هـ(س)))}_{})^{٢}$ هَ(س) = ١

⟵ من (ق∘هـ)(س) = ق(هـ(س)) = س

(١ + س^{٢}) (هَ(س)) = ١

هَ(س) = $\frac{١}{١+س^{٢}}$

قاعدة $\boxed{١١}$ "مشتقة الجذور"

خطوات الحل :-

* نتخلص من الجذور ونحوله لقوة كسرية .
* نشتق بدقة .
* يفضل اعادة الجذر .

أمثلة :

① ق(س) = $\sqrt[٥]{س^{٨}} + \sqrt[٨]{س^{٥}} + \sqrt{س^{٥}} + \sqrt[٥]{س} + \sqrt{٥}$

الحل ق(س) = س$^{\frac{٨}{٥}}$ + س$^{\frac{٥}{٨}}$ + س$^{\frac{٥}{٢}}$ + س$^{\frac{١}{٥}}$ + ٥$^{\frac{١}{٢}}$

قَ(س) = $\frac{٨}{٥}$ س$^{\frac{٣}{٥}}$ + $\frac{٥}{٨}$ س$^{\frac{-٣}{٨}}$ + $\frac{٥}{٢}$ س$^{\frac{٣}{٢}}$ + $\frac{١}{٥}$ س$^{\frac{-٤}{٥}}$ + صفر

= $\frac{٨}{٥}\sqrt[٥]{س^{٣}} + \frac{٥}{٨\sqrt[٨]{س^{٣}}} + \frac{٥}{٢}\sqrt{س^{٣}} + \frac{١}{٥\sqrt[٥]{س^{٤}}}$

② ق(س) = $\frac{-٣}{\sqrt[٣]{٦-س}}$ ، جد قَ(-٢)

الحل: نبسط الاقتران ⟵ ق(س) $\frac{-٣}{(٦-س)^{\frac{١}{٣}}}$

ق(س) = -٣ (٦-س)$^{\frac{-١}{٣}}$

قَ(س) = -٣ × $\frac{-١}{٣}$ (٦-س)$^{\frac{-٤}{٣}}$ (-١)

= $\frac{-١}{(٦-س)^{\frac{٤}{٣}}}$ = $\frac{-١}{\sqrt[٣]{(٦-س)^{٤}}}$

قَ(-٢) = $\frac{-١}{\sqrt[٣]{(٨)^{٤}}}$ = $\frac{-١}{(\sqrt[٣]{٨})^{٤}}$ = $\frac{-١}{١٦}$

* تعلّم *

$\sqrt[٣]{(٨)^{٤}} = (\sqrt[٣]{٨})^{٤}$

$\text{س}^{٥} \times \text{س}^{٦} = \text{س}^{١١}$ ولكن $(\text{س}^{٥})^{٦} = \text{س}^{٣٠}$

جمع الأسس   ضرب الأسس

تمرين ①: $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٣]{\text{س}}$ فإن $\text{ق}'(٠)$

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) صفر جـ) $\frac{٢}{٣}$ د) غير موجودة

تمرين ②: $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{٣}{٢}}$ فإن $\text{ق}'(٠)$

أ) صفر ب) غير موجودة جـ) $\frac{٣}{٢}$ د) $\frac{١}{٢}$

③ $\text{هـ}(\text{س}) = \sqrt[٥]{\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ١}$ ، $\text{ق}(٢) = ٣$

$\text{ق}'(٢) = -١$ ، وكان $\text{ل}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{س})$

فجد $\text{ل}'(٢)$. الحل نجد $\text{هـ}(٢)$ ، $\text{هـ}'(٢)$

$\text{هـ}(٢) = \sqrt[٥]{١} = ١$

$\text{هـ}(\text{س}) = (\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ١)^{\frac{١}{٥}}$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{١}{٥}(\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ١)^{-\frac{٤}{٥}} \times (٣\text{س}^{٢} - ٤)$

$\text{هـ}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^{٢} - ٤}{٥\sqrt[٥]{(\text{س}^{٣} - ٤\text{س} + ١)^{٤}}} \Longleftarrow \text{هـ}'(٢) = \frac{٨}{٥}$

$\text{ل}'(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س})\,\text{ق}'(\text{س}) + \text{ق}(\text{س})\,\text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ل}'(٢) = \text{هـ}(٢)\,\text{ق}'(٢) + \text{ق}(٢)\,\text{هـ}'(٢)$

$١ \times -١ + ٣ \times \frac{٨}{٥} = -١ + \frac{٢٤}{٥} = \frac{١٩}{٥}$

قاعدة $\boxed{١٣}$ مشتقة الجذر التربيعي فقط

المشتقة = $\frac{\text{مشتقة ما تحت الجذر}}{٢ \times \text{الجذر نفسه}}$

* البرهان : اثبت أن مشتقة الاقتران

$\sqrt{\text{هـ}(\text{س})} = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$

الحل: $\text{ق}(\text{س}) = (\text{هـ}(\text{س}))^{\frac{١}{٢}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٢}(\text{هـ}(\text{س}))^{-\frac{١}{٢}} \times \text{هـ}'(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{هـ}'(\text{س})}{٢\sqrt{\text{هـ}(\text{س})}}$

① $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{٤ - ٣\text{س}}$ ، جد $\text{ق}'(١)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-٣}{٢\sqrt{٤ - ٣\text{س}}} \Longleftarrow \text{ق}'(١) = \frac{-١}{٢\sqrt{}}$

② $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ ، جد $\text{ق}'(٣)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣}{٢\sqrt{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}}$

$\text{ق}'(٣) = \frac{٩}{٢\sqrt{١٨}} = \frac{٣}{٢\sqrt{٢}}$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt[٤]{\text{س}^{٢} + ٣\text{س}}$ ، جد $\text{ق}'(\text{س})$

الحل: نجهز $\Longleftarrow \text{ق}(\text{س}) = (\text{س}^{٢} + ٣\text{س})^{\frac{١}{٤}}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{٤}(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})^{-\frac{٣}{٤}}(٢\text{س} + ٣)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٣}{٤\sqrt[٤]{(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})^{٣}}}$

④ $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}$ ، جد $\text{ق}'(١)$

الحل: $\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١ + \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}}{٢\sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س}}}}$

$\text{ق}'(١) = \frac{١ + \frac{١}{٢\sqrt{١}}}{٢\sqrt{١ + \sqrt{١}}} = \frac{\frac{٣}{٢}}{٢\sqrt{٢}} = \frac{٣}{٤\sqrt{٢}}$

تمرين ①: جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\sqrt{\text{ق}(٢\text{س})}\right)$ ، عندما $\text{س} = ١$ ، حيث $\text{ق}(٢) = ٤$ ، $\text{ق}'(٢) = -٢$

(الجواب = −١)

تمرين ②: $\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، $\text{ع}(\text{س}) = \text{أ}\text{س}^{٣}$

وكان $(\text{ع} \circ \text{ق})'(٣) = ١٢$ ، ما قيمة أ ؟

(الجواب أ = ٤)

قاعدة ١٣ "الاشتقاق الضمني"

يجب التمييز بين الصريح و الضمني حيث في الصريح تكون ص لوحدها ولا يوجد غيرها ، أما في الضمني يكون هناك تداخل قيم س مع ص (ص ليس لوحدها)

سؤال للتدريب : ميز بين الصريح و الضمني

① $\text{ص} = \text{س}^{٢}$ (صريح) ② $\text{ص}^{٢} = \text{س}$ (ضمني)

③ $\text{ص} = \text{جاس}$ (صريح) ④ $\text{س} = \text{جاص}$ (ضمني)

⑤ $\text{س}\text{ص} = \text{ص}^{٤} + ١$ (ضمني)

مبادئ الاشتقاق الضمني :

① جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٣}) = ٣\text{س}^{٢}$

② جد $\frac{\text{د}}{\text{دص}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\text{ص}^{٢}$

③ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ص}^{٣}) = ٣\text{ص}^{٢} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

④ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{هـ}^{٣}) = ٣\text{هـ}^{٢} \cdot \frac{\text{دهـ}}{\text{دس}}$

⑤ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{هـ}^{٣})$ حيث هـ ثابت = صفر

⑥ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}) = ٢\text{س} + ٢\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

⑦ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{س}^{٢}\text{ص}) = \text{س}^{٢}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٢\text{س}$

⑧ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{ق}(٢\text{ع})) = \text{قَ}(٢\text{ع}) \times ٢ \cdot \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

⑨ جد $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\sqrt{\text{ص}}) = \frac{١ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}}$

خطوات حل سؤال الضمني :

- * نشتق طرفي المعادلة و نحذر من ص .
- * نقوم بتحديد الحدود ثم فرزها .
- * نجعل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لوحدها بإخراج عامل مشترك إذا لزم الأمر

* ملاحظات *

① اذا كان المطلوب $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$ نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ثم نقلب الجواب

② اذا كان المطلوب المشتقة عند نقطة نقوم بالتعويض بعد الاشتقاق فوراً ثم نجد الجواب كعدد .

---

① $\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢٥$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : نشتق الطرفين $٢\text{س} + ٢\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠$

$٢\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\text{س} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{س}}{٢\text{ص}} = \frac{-\text{س}}{\text{ص}}$

② $\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = ٥\text{ص} + ٦\text{س}^{٣}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٢\text{س} + ٦\text{ص}\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ١٨\text{س}^{٢}$

$٦\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٨\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٦\text{ص} - ٥) = ١٨\text{س}^{٢} - ٢\text{س}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١٨\text{س}^{٢} - ٢\text{س}}{٦\text{ص} - ٥}$

③ $\text{س}^{٢} - \text{س}\text{ص} = ٥\text{ص}$ ، جد $\frac{\text{دس}}{\text{دص}}$

الحل : نجد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ثم نقلب الجواب .

$٢\text{س} - (\text{س} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص}) = ٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٢\text{س} - \text{س} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{ص} = ٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٢\text{س} - \text{ص} = ٥\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{س}\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٢\text{س} - \text{ص} = \frac{\text{دص}}{\text{دس}}(٥ + \text{س})$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٢\text{س} - \text{ص}}{٥ + \text{س}} \leftarrow \frac{\text{دس}}{\text{دص}} = \frac{٥ + \text{س}}{٢\text{س} - \text{ص}}$

④ $\text{س}^{٢} + \text{س}\text{ص} = \text{ص}^{٢} + ١$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عند (٢ ، ٣)

$٢\text{س} + \text{س} \times ١\frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ١ = ٢\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

نعوض فوراً $\Leftarrow ٤ + ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٣ = ٦ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٤ + ٣ = ٦ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٧ = ٤\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Leftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٧}{٤}$

⑤ $\sqrt{\text{س}} + \sqrt{\text{ص}} = \sqrt{٦}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

الحل : $\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}} + \frac{١ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = ٠$

$\frac{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}}{٢\sqrt{\text{ص}}} = \frac{-١}{٢\sqrt{\text{س}}} \Leftarrow \frac{-٢\sqrt{\text{ص}}}{٢\sqrt{\text{س}}} = -\sqrt{\frac{\text{ص}}{\text{س}}}$

⑥ $\text{س}^{٢}\text{ص} + ٥\text{ص} = ١٢\text{س}$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=١}$

الحل: نجد ص عندما س = ١ ← بالتعويض

$١ \times \text{ص} + ٥\text{ص} = ١٢ \Rightarrow ٦\text{ص} = ١٢ \rightarrow \boxed{\text{ص} = ٢}$

نشتق $\text{س}^{٢} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٢\text{س} + ٥ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢$

نعوض $١ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٢ \times ٢ + ٥ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢$

$٦ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١٢ - ٤ \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٨}{٦} = \frac{٤}{٣}$

تمرين ٤ $\text{س ص} (\text{س} + \text{ص}) = ٦$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

عند النقطة (٢، ١) (الجواب: $\frac{-٥}{٨}$)

⑦ $\frac{١}{\text{ص}} + \frac{\text{ص}}{\text{س}} = ٣$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ص = ١

الحل: لدينا ص = ١ ، نجد س بالتعويض .

$\frac{١}{١} + \frac{١}{\text{س}} = ٣ \Rightarrow \frac{١}{\text{س}} = ٢ \rightarrow \boxed{\text{س} = \frac{١}{٢}}$

نتخلص من الكسور ثم نشتق (أفضل)

$\frac{\text{س} + \text{ص}^{٢}}{\text{س ص}} = ٣ \Rightarrow ٣\text{س ص} = \text{س} + \text{ص}^{٢}$

$٣\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} \times ٣ = ١ + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٣(\frac{١}{٢}) \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ١(٣) = ١ + ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٣ - ١ = ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \frac{٣}{٢} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$٢ = \frac{١}{٢} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٤$

تمرين ①: $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}} + \frac{١}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{\text{س ص}}$ ، حيث

$\text{س} > ٠ ، \text{ص} > ٠$. ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

تمرين ②: اذا كان $(\text{س} + \text{ص})^{٧} = \text{ص}^{٣}$ ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

عند النقطة (٠، ١)

(الجواب: $\frac{-٧}{٤}$)

تمرين ③: اذا كان $\text{ص}^{٢} + \text{س} = ٣\text{س ص}$ ،

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ عندما ص = ١ (الجواب : ٤)

$(\text{س} - \text{ص})^{٤} + (\text{ص} - \text{س})^{٤} = ٣٢$ ، $\text{س} \neq \text{ص}$ ، فإن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

أ) ١ ب) ٤ ج) -٤ د) -١

⑧ $\text{ق}(٢\text{ص}) = ٥\text{س} + ١$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{ص}=١}$

حيث $\text{ق}'(٢) = ٤$

الحل: نشتق الطرفين

$\text{ق}'(٢\text{ص}) \times ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥$ نعوض

$\text{ق}'(٢) \times ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥$

$٤ \times ٢ \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٥ \Rightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{٥}{٨}$

⑨ اسطوانة دائرية قائمة حجمها ثابت ، جد معدل تغير ارتفاعها بالنسبة لنصف قطر قاعدتها .

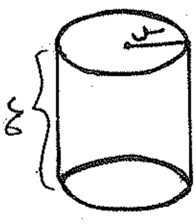
الحل: حجم الإسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$\text{ح} = \pi \text{س}^{٢} \text{ع}$

المطلوب بالرموز هو $\frac{\text{دع}}{\text{دس}}$ (معدل تغير له مشتقة)

نشتق ← تذكر ح ثابت $٠ = \pi \text{س}^{٢} \frac{\text{دع}}{\text{دس}} + \text{ع} \times ٢\pi\text{س}$

$-٢\pi\text{س ع} = \pi\text{س}^{٢} \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$



$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{-٢\cancel{\pi}\cancel{\text{س}}\text{ع}}{\cancel{\pi}\text{س}^{\cancel{٢}}}$

$\frac{\text{دع}}{\text{دس}} = \frac{-٢\text{ع}}{\text{س}}$

تمرين ①: ما معدل تغير حجم كرة بالنسبة لمساحة سطحها عندما قطرها ١٠ سم

تمرين ②: $\text{ق}(\text{ص} + ٤) = \text{س}^{٣}$ ، جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{ص}=١}$

حيث $\text{ق}(٥) = ٨$ ، $\text{ق}'(٥) = ٤$.

(الجواب : ٣)

تمرين ③: $\text{س} = (١ - \text{ص}^{٢})(١ + \text{ص}^{٢})(١ + \text{ص}^{٤})$ ،

جد $\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{\text{س}=٠}$. (الجواب: $\frac{١}{٨}$ ، $-\frac{١}{٨}$)

تمرين ④: $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \sqrt{\text{س} + \dots}}}}$

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ (الجواب: $\frac{١}{٢\text{ص} - ١}$)

قاعدة $\boxed{١٤}$ "مشتقة الاقترانات الدائرية"

* مشتقة جازاوية = جتا الزاوية × م. الزاوية
* مشتقة جتازاوية = −جا الزاوية × م. الزاوية
* مشتقة ظازاوية = قا^{٢} الزاوية × م. الزاوية
* مشتقة ظتازاوية = −قتا^{٢} الزاوية × م. الزاوية
* مشتقة قا زاوية = قا الزاوية × ظا الزاوية × م. الزاوية

عنيدة

* مشتقة قتازاوية = −قتا الزاوية × ظتا الزاوية × م. الزاوية

*ملاحظات :

* اقترانات الحرف (ت) تكون مشتقتها سالبة .
* من المحرمات الدولية الدخول على الزاوية .

$$\frac{\text{جا}٢\text{س}}{٢} \neq \text{جاس}$$

أمثلة : جد المشتقة الأولى لمايلي :

① ق(س) = جا٢س ← قَ(س) = جتا٢س .(٢)

② ق(س) = جتاس^{٢} ← قَ(س) = −جاس^{٢}.(٢س)

③ ق(س) = ظا$\frac{\text{س}}{٢}$ ← قَ(س) = قا$^{٢}\frac{\text{س}}{٢}$ × $\left(\frac{١}{٢}\right)$

④ ق(س) = ظتا$\frac{٢}{\text{س}}$ ← قَ(س) = −قتا$^{٢}\frac{٢}{\text{س}}$ × $\left(\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}\right)$

= $\frac{٢}{\text{س}^{٢}}$ قتا^{٢}($\frac{٢}{\text{س}}$) × $\frac{٢}{\text{س}}$

⑤ ق(س) = قا(٣س+١) عنيدة

قَ(س) = قا(٣س+١).ظا(٣س+١).(٣)

⑥ ق(س) = قتا$\sqrt{\text{س}}$

قَ(س) = − قتا$\sqrt{\text{س}}$ ظتا$\sqrt{\text{س}}$ × $\left(\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}\right)$

⑦ ق(س) = جا(جتاس)

قَ(س) = جتا(جتاس)(−جاس)

⑧ ق(س) = جا(جا٢س)

قَ(س) = جتا(جا٢س).(جتا٢س).(٢)

⑨ ص = جاس^{٧} ← $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = جتاس^{٧}.(٧س^{٦})

⑩ ص = جا^{٧}س (غيرجاهزة) $\xrightarrow{\text{نجهز}}$ ص = (جاس)^{٧} مركب

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٧(جاس)^{٦} جتاس(١) = ٧(جاس)^{٦} جتاس

⑪ ق(س) = جا^{٢}($\frac{\text{س}}{٢}$) ⟵ ص = جا($\frac{\text{س}}{٢}$)^{٢}

قَ(س) = $\underbrace{٢\text{جا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)^{١}\text{جتا}\left(\frac{\text{س}}{٢}\right)}$($\frac{١}{٢}$)

= جاس × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ جاس

⑫ ق(س) = جا$^{٢}\frac{\pi}{٢}$ $\xrightarrow{\text{نجهز}}$ (جا$\frac{\pi}{٢}$)^{٢} ← عدد ثابت

قَ(س) = صفر

⑬ ص = جتا^{٥} ٣س $\xrightarrow{\text{نجهز}}$ ص = (جتا٣س)^{٥}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٥(جتا٣س)^{٤}(−جا٣س)(٣)

= −١٥ (جتا٣س)^{٤}(جا٣س)

⑭ ص = ظا^{٦}($\frac{٢}{\text{س}}$) $\xrightarrow{\text{نجهز}}$ ص = (ظا$\frac{٢}{\text{س}}$)^{٦}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٦(ظا$\frac{٢}{\text{س}}$)^{٥}(قا$^{٢}\frac{٢}{\text{س}}$)($\frac{-٢}{\text{س}^{٢}}$)

⑮ ق(س) = $\sqrt[٥]{\text{جا}^{٣}٢\text{س}}$ $\xrightarrow{\text{نجهز}}$ ق(س) = (جا٢س)$^{\frac{٣}{٥}}$

قَ(س) = $\frac{٣}{٥}$(جا٢س)$^{\frac{-٢}{٥}}$(جتا٢س)(٢)

= $\frac{٦\text{جتا}٢\text{س}}{٥\sqrt[٥]{\text{جا}^{٢}٢\text{س}}}$

⑯ ص = ظا(قا٣س) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا^{٢}(قا٣س)(قا٣س ظا٣س)(٣)

حل آخر : بالسلسلة حيث ص = ظاع ، ع = قا٣س

⑰ ص = قا(ظا٣س) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = قا(ظا٣س)ظا(ظا٣س)(قا^{٢}٣س)(٣)

حل مرة أخرى بالسلسلة .

⑱ ص = (قا٣س + ظا٥س)$^{\text{ن}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ن(قا٣س+ظا٥س)$^{\text{ن}-١}$(٣قا٣س ظا٣س + قا^{٢}٥س(٥))

تمرين ① ص = جا(ظا^{٢}س) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

تمرين ② ص = جا^{٢}(ظاس) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

تمرين ③ ص = ظتا^{٣}(جا٥س) ، جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

(١٩) ق(س) = $س^{٢}$ + جتا٢س ، جد قَ($\frac{\pi}{٤}$) .

الحل: قَ(س) = ٢س + − جا٢س × ٢

قَ($\frac{\pi}{٤}$) = ٢ × $\frac{\pi}{٤}$ − ٢جا٩٠ = $\frac{\pi}{٢}$ − ٢

(٢٠) ق(س) = س ظا٢س ، جد قَ($\frac{\pi}{٦}$)

الحل: قَ(س) = س $قا^{٢}$٢س × ٢ + ظا٢س × ١

قَ($\frac{\pi}{٦}$) = $\frac{٢\pi}{٦}$ $قا^{٢}$٦٠ + ظا٦٠

= $\frac{\pi}{٣}$ × ٤ + $\sqrt{٣}$ = $\frac{٤\pi}{٣}$ + $\sqrt{٣}$

تذكر أنّ : قا٦٠ = $\frac{١}{جتا٦٠}$ = $\frac{١}{\frac{١}{٢}}$ = ٢

(٢١) ق(س) = قاس ظتاس ، فإن قَ(س)

أ) قتاس ظتاس   ب) −$قتا^{٢}$س

ج) $\frac{−ظتا^{٢}س}{جاس}$ د) − قتاس ظتاس

الحل الأول: فكر في التبسيط

ق(س) = $\frac{١}{\cancel{جتاس}}$ × $\frac{\cancel{جتاس}}{جاس}$ = $\frac{١}{جاس}$ = قتاس

قَ(س) = − قتاس ظتاس   (د)

الحل الثاني بدون تفكير (مزعج)

قَ(س) = (قاس).(−$قتا^{٢}$س) + (ظتاس).(قاس ظاس)

⋮

أكمل الحل

(٢٢) جد $\frac{د}{دس}$ (س . $\frac{جا٢س}{جتاس}$) $|_{س=\pi}$ مهم

نجهز $\frac{د}{دس}$ ($\frac{س × ٢جاس \cancel{جتاس}}{\cancel{جتاس}}$) = $\frac{د}{دس}$(س × ٢جاس)

أكمل الحل الجواب (−٢π)

(٢٣) ق(س) = $\frac{١}{جتا٣س}$ ، جد قَ($\frac{\pi}{١٢}$) .

الحل: نتخلص من الكسر أفضل

ق(س) = قا٣س

قَ(س) = قا٣س ظا٣س × ٣

قَ($\frac{\pi}{١٢}$) = قا٤٥ ظا٤٥ × ٣ = $\sqrt{٢}$ × ١ × ٣ = ٣$\sqrt{٢}$

حل آخر: قَ(س) = $\frac{−١ × −جا٣س × ٣}{(جتا٣س)^{٢}}$ نفوّض

تمرين: ق(س) = $\frac{جتا٢\pi}{قا٢س}$ ، فإن قَ(س)

أ) صفر   ب) −٢جا٢س

ج) ٢جتا٢س   د) ٢جا٢س

(٢٤) ق(س) = جاس جتاس ، جد قَ($\frac{\pi}{٢}$)

قَ(س) = جاس × −جاس + جتاس جتاس

= −$جا^{٢}$س + $جتا^{٢}$س

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = −$جا^{٢}$٩٠ + $جتا^{٢}$٩٠ = −١ + ٠ = −١

حل آخر متطابقة ق(س) = $\frac{١}{٢}$ جا٢س

قَ(س) = $\frac{١}{٢}$ جتا٢س × ٢

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = جتا١٨٠ = −١

(٢٥) جد $\frac{د}{دس}$ $\underbrace{(جتا^{٢}٥س + جا^{٢}٥س)}_{متطابقة}$

متطابقة ⟵ $\frac{د}{دس}$ (١) = صفر

(٢٦) ق(س) = $\sqrt{س^{٢}جا^{٢}س + س^{٢}جتا^{٢}س}$ ، جد قَ(−٢)

الحل: يجب التفكير في التبسيط لأن السؤال عقدة .

ق(س) = $\sqrt{س^{٢}(جا^{٢}س + جتا^{٢}س)}$ = $\sqrt{س^{٢}}$

قَ(س) = $\frac{\cancel{٢}س}{\cancel{٢}\sqrt{س^{٢}}}$ ⟵ قَ(−٢) = $\frac{−٢}{\sqrt{٤}}$ = −١

أو ق(س) = $\sqrt{س^{٢}}$ = |س| ق(س) −س * س

ق(س) = −س   قَ(س) −١ * ١

قَ(س) = −١   ✓ • ✗

(٢٧) ق(س) = $\frac{جتاس}{١+جاس}$ ، اثبت أن قَ(س) = $\frac{−١}{١+جاس}$

الحل: قَ(س) = $\frac{(١+جاس)(−جاس) − (جتاس)(جتاس)}{(١+جاس)^{٢}}$

= $\frac{−جاس − جا^{٢}س − جتا^{٢}س}{(١+جاس)^{٢}}$

= $\frac{−جاس −١}{(١+جاس)^{٢}}$ = $\frac{−(جاس+١)}{(١+جاس)^{٢}}$ = $\frac{−١}{١+جاس}$

تمرين ق(س) = $\sqrt{٣ + جاس + جتاس}$ ، هـَ(٠) = −١
هـ(٠) = ٢ ، وكان دس = هـ(س) × ق(س) ،
جد دَ(٠)

$\boxed{\text{الاجابة : } (\frac{-٣}{٢})}$

---

(٣٨) س = جا٢ص ، فإن $\frac{دص}{دس}$ تساوي
أ) $\frac{١}{٢}$ قا٢ص   ب) ٢قا٢ص
ج) $\frac{١}{٢}$ قتا٢ص   د) قا٢ص

الحل الاشتقاق ضمني .
١ = جتا٢ص × ٢ $\frac{دص}{دس}$ ← $\frac{١}{٢جتا٢ص} = \frac{دص}{دس}$
$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢}$ قا٢ص   (أ)

---

(٢٩) س = ظاص ، جد $\frac{دص}{دس}$
أ) $\frac{١}{س+١}$ ب) $\frac{١}{س^٢}$ ج) $\frac{١}{س^٢+١}$ د) $\frac{١}{س^٢-١}$

١ = قا²ص × $\frac{دص}{دس}$ ← $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{قا^٢ص}$
يجب كتابة (قا²ص) بدلالة (ظاص) وذلك من عائلة
ظا²ص + ١ = قا²ص
$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ظا^٢ص+١}$ ← $\frac{دص}{دس} = \frac{١}{س^٢+١}$

تمرين ① س = قا٢ص ، جد $\frac{دص}{دس}$ عندما ص = $\frac{\pi}{١٢}$

$\boxed{\text{الاجابة } (\frac{٣}{٤})}$

تمرين ② س جا٢ص = ص جتا٢س ، جد
$\frac{دص}{دس}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{\pi}{٢})$

$\boxed{\text{الاجابة } (٢)}$

---

(٣٠) جا(س ص) = ص² ، جد $\frac{دص}{دس}$ عند
النقطة $(\frac{\pi}{٢} ، ١)$

الحل
جتا(س ص)$[س . \frac{دص}{دس} + ص] = ٢ص . \frac{دص}{دس}$
جتا$(\frac{\pi}{٢} \times ١)(\frac{\pi}{٢} . \frac{دص}{دس} + ١) = ٢ \times ١ . \frac{دص}{دس}$
صفر = ٢ . $\frac{دص}{دس}$ ← $\frac{دص}{دس}$ = صفر

---

(٣١) جتا(س ص) = ٤س³ + ظا٢ص ، جد $\frac{دص}{دس}$
احذر الزاوية ضمنية

الحل
− جا(س ص)(س $\frac{دص}{دس}$ + ص) = ١٢س² + قا²٢ص × ٢ . $\frac{دص}{دس}$
− س جا(س ص) . $\frac{دص}{دس}$ − ص جا(س ص) = ١٢س² + ٢قا²٢ص . $\frac{دص}{دس}$
← نرتب الحدود لنجد $\frac{دص}{دس}$
$\frac{دص}{دس}$ (− س جا(س ص) − ٢قا²٢ص) = ١٢س² + ص جا(س ص)
$\frac{دص}{دس} = \frac{١٢س^٢ + ص جا(س ص)}{- س جا(س ص) - ٢قا^٢ ٢ص}$

واجب $جا^{-1}س + جا^{-1}ص$ = ظا(س ص) ،
س > ٠ ، ص > ٠ ، جد $\frac{دص}{دس}$

---

(٣٢) ص = ق(جاع) ، ع = πس² ، جد $\frac{دص}{دس}\Big|_{ع=\pi}$
حيث قَ(٠) = ٦ ، حيث س > ٠ .

$\frac{دص}{دس} = \frac{دص}{دع} \times \frac{دع}{دس}$
= قَ(جاع)(جتاع) × ٢πس
= قَ(جاπ)(جتاπ) × ٢π(١)
= قَ(٠) (−١) (٢π)
= ٦ (−١) ٢π = −١٢π

نجد س عندما ع = π
π = πس²
١ = س²
س = ١ ✓   س = −١ مهمل

حل آخر بدون سلسلة ← ص = ق(جاπس²)

تمرين ص = جا²هـ ، س = جتاهـ ، ٠ < هـ < $\frac{\pi}{٢}$
جد $\frac{دص}{دس}$ عندما س = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$

نريد حليه $\boxed{\text{الاجابة } (-\sqrt{٢})}$

---

(٣٣) ص = ق(م) = ظتا$\frac{\pi م}{١٠}$ ، م = هـ(س) = ٥س
جد (ق∘هـ)َ(١) .

* هـ(١) = ٥
* هـَ(س) = ٥
* قَ(م) = قتا²$[\frac{\pi م}{١٠}] \times \frac{\pi}{١٠}$

الحل (ق∘هـ)َ(١) = قَ(هـ(١)) هـَ(١)
= قَ(٥) × ٥
= − قتا²$(\frac{\pi}{٢}) \times \frac{\pi}{١٠} \times ٥$ ← −١ × $\frac{\pi}{٢}$ ← $\frac{-\pi}{٢}$

تمرين ① $\text{ق}(\text{س}) = \text{قا}\,\text{س}$ ، $\text{س} \in [-\pi ، \pi]$

ما قيم س التي تحقق المعادلة $\text{قَ}(\text{س}) = ٠$

الاجابة: (٠)

تمرين ② جد أصفار المشتقة الأولى للاقتران

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\,\text{جا}\,\text{س} + \text{جتا}\,\text{س}$ ، حيث $\text{س} \in [٠ ، \pi]$

الاجابة: $(\frac{\pi}{٢})$

(٣٤) $\text{ق}(\text{س}) = ٢\,\text{ظتا}\,\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{م}\,\text{س}(\text{س}^{٢} - ٣)^{٣}$

وكان $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\frac{\pi}{٤}) = -٥٠$ ، جد الثابت م

$\text{هَ}(\text{ق}(\frac{\pi}{٤}))(\text{قَ}(\frac{\pi}{٤})) = -٥٠$

$\text{هَ}(٢)\,(-٤) = -٥٠$

$\frac{\cancel{٢٥}\,\text{م}}{\cancel{٢٥}} = \frac{٥٠}{٤} \times \frac{١}{٢٥}$

$\text{م} = \frac{١}{٢}$

$* \; \text{ق}(\frac{\pi}{٤}) = ٢(١) = ٢$

$* \; \text{قَ}(\text{س}) = -٢\,\text{قتا}^{٢}\,\text{س}$

$* \; \text{قَ}(\frac{\pi}{٤}) = -٢(\sqrt{٢})^{٢}$

$= -٤$

$\text{هَ}(\text{س}) = \text{م}\,\text{س}(٣)(\text{س}^{٢}-٣)^{٢}\,٢\text{س} + (\text{س}^{٢}-٣)^{٢}\,\text{م}$

$\text{هَ}(٢) = ٢٥\,\text{م}$

تمرين $\text{ق}(\text{س}) = ٢\,\text{ظا}\,\text{س}$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \frac{\text{جـ}}{٢\text{س}+١}$

وكان $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{٨}{٣٥}$ ، جد الثابت جـ

الاجابة:

المشتقات العُليا :- المقصود بها هو

* المشتقة الثانية ← $\text{قً}(\text{س})$ أو $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د}\text{س}^{٢}} \neq (\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}})^{٢}$

أو صً .

* المشتقة الثالثة ← $\text{ق}'''(\text{س})$ أو $\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د}\text{س}^{٣}}$ أو $\text{ص}'''$

* المشتقة الرابعة ← $\text{ق}^{(٤)}(\text{س})$ أو $\frac{\text{د}^{٤}\text{ص}}{\text{د}\text{س}^{٤}}$ أو $\text{ص}^{(٤)}$

ملاحظات هامة :-

① لايجاد المشتقة الثانية يجب ان نجد الأولى و نبسطها لأبسط صورة ثم نشتقها .

② في المشتقات العليا يفضل عدم التعامل مع مشتقة الجذر التربيعي ما الكسر ذو القوه

أمثلة : ① $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + ٦\text{س}^{٣} + ٨\text{س} + ٧$

جد $\text{ق}^{(٤)}(\text{س})$

$\text{قَ}(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + ١٨\text{س}^{٢} + ٨$

$\text{قً}(\text{س}) = ١٢\text{س}^{٢} + ٣٦\text{س}$

$\text{ق}'''(\text{س}) = ٢٤\text{س} + ٣٦$

$\text{ق}^{(٤)}(\text{س}) = ٢٤$

② $\text{ص} = \frac{١}{\text{س}^{٢}} + \sqrt{\text{س}}$ ، جد المشتقة الثالثة

الحل الافضل أن نجهز الاقتران

$\text{ص} = \text{س}^{-٢} + \text{س}^{\frac{١}{٢}}$

$\frac{\text{د}\text{ص}}{\text{د}\text{س}} = -٢\text{س}^{-٣} + \frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{-١}{٢}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{د}\text{س}^{٢}} = +٦\text{س}^{-٤} - \frac{١}{٤}\text{س}^{\frac{-٣}{٢}}$

$\frac{\text{د}^{٣}\text{ص}}{\text{د}\text{س}^{٣}} = -٢٤\text{س}^{-٥} + \frac{٣}{٨}\text{س}^{\frac{-٥}{٢}}$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$ ، جد $\text{قً}(٤)$

الحل نجهز لوجود كسر

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\frac{-١}{٢}}$

$\text{قَ}(\text{س}) = -\frac{١}{٢}\text{س}^{\frac{-٣}{٢}}$

$\text{قً}(\text{س}) = \frac{٣}{٤}\text{س}^{\frac{-٥}{٢}} = \frac{٣}{٤\sqrt{\text{س}^{٥}}}$

$\text{قً}(٤) = \frac{٣}{٤\sqrt{٤^{٥}}} = \frac{٣}{٤(\sqrt{٤})^{٥}} = \frac{٣}{٤ \times ٣٢} = \frac{٣}{١٢٨}$

تمرين ①: اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = (٣\text{س}^{٢}+٢)(\text{س}^{٣}-٢\text{س}+١)$

اثبت أن $\text{قَ}(١) \times \text{قً}(١) = ٢١٠$

تمرين ②: جد اقتران كثير الحدود من الدرجة الثالثة حيث $\text{ق}(-١) = ٠$ ، $\text{قَ}(-١) = ٣$

$\text{قً}(-١) = -٢$ ، $\text{ق}'''(-١) = ٦$

الجواب $(\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٣)$

④ ق(س) = ٣س^{ن} ، ق$'''$(س) = أ س^{٣} .
ما قيمة الثابت أ ؟

ق$'$(س) = ٣ن س$^{ن-١}$ ⟵

ق$''$(س) = ٣ن (ن−١) س$^{ن-٢}$

ق$'''$(س) = ٣ن (ن−١)(ن−٢) س$^{ن-٣}$ = أ س^{٣}

ن − ٣ = ٣ ⟵ ن = ٦

∴ أ = ٣ × ٦ (٥)(٤) = ٣٦٠

تمرين ①: ق(س) = ٣س^{ن} ، ق$^{(٤)}$(س) = أ س^{٣}
جد قيمة أ

$\boxed{\text{الإجابة: (٢٥٢٠)}}$

تمرين ②: ق(س) = س^{ن} ، وكان
ق$'''$(س) = ١٢٠ س$^{ن-٣}$ ، ما قيمة الثابت ن

أ) ٤ ب) ٥ ج) ٦ د) ٣

---

⑤ جد المشتقة الثانية للإقتران

ق(س) = $\frac{\text{٢س+١}}{\text{س−٣}}$ لو كان للمقام قوة لرفعناه ولكن لن نستفيد من رفعه

الحل

ق$'$(س) = $\frac{\text{(س−٣)(٢) − (٢س+١)(١)}}{\text{(س−٣)}^{٢}}$

ق$'$(س) = $\frac{\cancel{\text{٢س}}\text{ − ٦ − }\cancel{\text{٢س}}\text{ − ١}}{\text{(س−٣)}^{٢}}$ = −٧(س−٣)$^{-٢}$

ق$''$(س) = ١٤ (س − ٣)$^{-٣}$

---

⑥ ص = جاس^{٢} ، جد ص$''$

الحل ص$'$ = $\underbrace{\text{جتاس}^{٢}}_{\text{الأول}}\ \underbrace{\text{(٢س)}}_{\text{الثاني}}$

ص$''$ = (جتاس^{٢})(٢) + ٢س (−جاس^{٢} × ٢س)

ص$''$ = ٢جتاس^{٢} − ٤س^{٢} جاس^{٢}

---

⑦ ص = ظا٣س ، جد ص$''$ بدلالة ص (مهم)

الحل ص$'$ = ٣قا^{٢}٣س = ٣(قا٣س)^{٢}

ص$''$ = ٦(قا٣س)^{١}(قا٣س ظا٣س) (٣)

= ١٨ قا^{٢}٣س ظا٣س

متطابقة ظا^{٢}٣س + ١ = قا^{٢}٣س

= ١٨ (ظا^{٢}٣س + ١)(ظا٣س) بالعودة للأصل

= ١٨ (ص^{٢}+١) (ص)

---

⑧ ص = جا^{٢}(س+ب) حيث ب ثابت
جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ بدلالة ص .

الحل $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ٢جا^{١}(س+ب) جتا(س+ب) (١)

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = ٢جا(س+ب) × −جا(س+ب) + جتا(س+ب) × ٢جتا(س+ب)

= −٢ جا^{٢}(س+ب) + ٢ $\underbrace{\text{جتا}^{٢}\text{(س+ب)}}_{\text{متطابقة = ١ − جا}^{٢}\text{(س+ب)}}$

= −٢ص + ٢ (١ − ص)

= −٢ص + ٢ − ٢ص = ٢ − ٤ص

---

⑨ ص = جا^{٢}٥س ، فإن ص$''$ تساوي

أ) ١٠جتا١٠س ب) ٢٥ جتا١٠س
ج) ٥جتا١٠س د) ٥٠ جتا١٠س

ص = (جا٥س)^{٢}

ص$'$ = ٢(جا٥س)^{١}(جتا٥س) (٥)

ص$'$ = جا١٠س × ٥

ص$''$ = جتا١٠س × ١٠ × ٥ = ٥٠ جتا١٠س

---

⑩ ص = جا (جاس) ، جد ص$''$

الحل ص$'$ = $\underbrace{\text{جتا(جاس)}}_{\text{الأول}}\ \underbrace{\text{(جتاس)}}_{\text{الثاني}}$

ص$''$ = جتا(جاس)(−جاس) + (جتاس)(−جا(جاس)(جتاس))

= −جاس جتا (جاس) − جتا^{٢}س جا (جاس)

---

⑪ س^{٢} − ص^{٢} − س = ١ ، جد $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ عند (٢ ، ١)

الحل ٢س − ٢ص · $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ − ١ = صفر

٢س − ١ = ٢ص · $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ ⟸ $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{٢س − ١}}{\text{٢ص}}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}}$ = $\frac{\text{٢ص(٢) − (٢س − ١) · (٢ · }\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\text{)}}{\text{٤ص}^{٢}}$

$\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{(١،٢)} = \frac{(٣)(٢)-(٣)(٢\times\frac{٣}{٢})}{٤} = \frac{-٥}{٤}$

---

⑫ اذا كان $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{س}^2\text{ص}+١$ ، فإن $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند (٢،١) تساوي

أ) ٧ ب) ٦ ج) صفر د) ٤

الحل الاشتقاق الضمني

$\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2} = (\text{س}^2)(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}) + \text{ص} \times ٢\text{س} + \text{صفر}$

$\left.\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right|_{(٢،١)} = ١\times٢+١ = ٣$

$\left.\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}\right|_{(٢،١)} = ١(٣)+٢\times٢ = ٣+٤ = ٧$

---

⑬ $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^3$ ، $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2+١$ ، جد

١) $(\text{هـ}\circ\text{ق})'(٢)$ ٢) $(\text{هـ}'\circ\text{ق}')'(٢)$ ٣) $(\text{هـ}\circ\text{ق})''(٢)$

الحل

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(٢) = \text{هـ}''(\text{ق}(٢)) \times \text{ق}'(٢)$

$= \text{هـ}''(٥) \times ٤$

$٣٠\times٤ = ١٢٠$

$*\,\text{ق}(٢) = ٥$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

$*\,\text{هـ}'(\text{س}) = ٣\text{س}^2$

$*\,\text{هـ}''(\text{س}) = ٦\text{س}$

$*\,\text{ق}''(\text{س}) = ٢$

٢) $(\text{هـ}'\circ\text{ق}')'(٢) = \text{هـ}''(\text{ق}'(٢)) \times (\text{ق}''(٢))$

$= \text{هـ}''(٤)(٢) = ٢٤\times٢ = ٤٨$

المشتقة الثانية للتركيب $(\text{هـ}\circ\text{ق})''(\text{س})$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})''(\text{س}) = \Big(\underbrace{\text{هـ}'(\text{ق}(\text{س}))}_{\text{أول}}\underbrace{(\text{ق}'(\text{س}))}_{\text{ثاني}}\Big)'$

$= \big(\text{هـ}'(\text{ق}(\text{س}))\big)\big(\text{ق}''(\text{س})\big) + \text{ق}'(\text{س})\Big(\text{هـ}''(\text{ق}(\text{س}))\ \text{ق}'(\text{س})\Big)$

الآن نطبقه فرع (٣)

$(\text{هـ}\circ\text{ق})''(٢) = \big(\text{هـ}'(\text{ق}(٢))\big)\text{ق}''(٢) + \text{ق}'(٢)\,\text{هـ}''(\text{ق}(٢))\,\text{ق}'(٢)$

$= \text{هـ}'(٥)\times٢ + ٤\,\text{هـ}''(٥)\times٤$

$٧٥\times٢ + ١٦\times٣٠$

$١٥٠+٤٨٠ = ٦٣٠$

حل آخر لفرع ③ $(\text{هـ}\circ\text{ق})(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}^2+١) = (\text{س}^2+١)^3$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})'(\text{س}) = ٣(\text{س}^2+١)^2(٢\text{س}) = ٦\text{س}(\text{س}^2+١)^2$

$(\text{هـ}\circ\text{ق})''(\text{س}) = ٦\text{س}\big(٣(\text{س}^2+١)^1(٢\text{س})\big) + (\text{س}^2+١)^2(٦)$

------ ومن ثم نعوض

---

⑭ $\text{ق}(\text{س}) = (|\text{س}|)^3$ ، جد $\text{ق}'(٠)$ ، $\text{ق}''(٠)$ ، $\text{ق}'''(٠)$ ، $\text{ق}^{(٤)}(٠)$

الحل

س = ٠

ق: $-\text{س}^3$ ——●—— س^3

ق متصل عند س = ٠

قَ: -٣س^2 ——●—— ٣س^2

$\text{ق}'_{+}(٠) \overset{?}{=} \text{ق}'_{-}(٠)$

صفر = صفر ← $\text{ق}'(٠)$ = صفر (موجودة)

$\text{ق}''$: -٦س ——●—— ٦س

قَ متصل عند س = ٠ لأنه المشتقة موجودة

$\text{ق}''_{+}(٠) \overset{?}{=} \text{ق}''_{-}(٠)$

صفر = صفر ← $\text{ق}''(٠)$ = صفر (موجودة)

$\text{ق}'''$: -٦ ——●—— ٦

$\text{ق}''(\text{س})$ متصل عند س = ٠ لأنه المشتقة موجودة

$\text{ق}'''_{+}(٠) \overset{?}{=} \text{ق}'''_{-}(٠)$

$٦ \neq -٦$ ∴ $\text{ق}'''(٠)$ غير موجودة

لذلك $\text{ق}^{(٤)}(٠)$ غير موجودة

تمرين ① $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^2|\text{س}|+١٢$ جد $\text{ق}''(\text{س})$

تمرين ② $\text{س}^3+\text{ص}^3-٤\text{س}\text{ص} = ٦٤$

جد $\frac{\text{د}^2\text{ص}}{\text{دس}^2}$ عند النقطة (٠،٤)

تمرين محلول $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}\times\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جتا}^2\text{س})$ ،

جد $\text{ق}'(\pi)$.

الحل: نجهز $\frac{\text{د}}{\text{دس}}(\text{جتا}^2\text{س}) = ٢\text{جتاس}\times-\text{جاس}$

$= -٢\,\text{جتاس}\,\text{جاس}$

$= -\text{جا}٢\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = -\text{س}\times\text{جا}٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = (-\text{س})\big(\text{جتا}٢\text{س}(٢)\big) + (\text{جا}٢\text{س})(-١)$

$\text{ق}'(\pi) = (-\pi)(٢\,\text{جتا}\overset{٣٦٠}{٢\pi}) + -\,\text{جا}\overset{٣٦٠}{٢\pi}$

$= -٢\pi + \text{صفر}$

$= -٢\pi$

تمرين ①: $ق(س) = س^3 + 7س$ ، جد $ق''(1)$ ، حيث $س \in ح$.

الإجابة : (١)

تمرين ②: $س ص^3 = 8$ ، جد $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

الجواب $\left(\frac{ءص}{9س^2}\right)$ أو $\left(\frac{8}{9}س^{\frac{-7}{3}}\right)$

تمرين ③: $\sqrt{س ص} = 1$ ، جد $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

الجواب $\frac{2ص}{س^2}$ أو $\frac{2}{س^3}$

تمرين ④: $ق(س) = \sqrt{س}\,\text{جا}س$
جد $ق'(0)$

الجواب غ.م لأنه غير متصل عند س=٠.

* الأسئلة الذهبية *

① جد $\frac{ء}{ءس}\left(س^2 \times \frac{ء}{ءس}\left(\frac{1}{س}\right)\right)$ حيث $س \neq 0$.

الحل : نجهز الداخلي أولاً

$$\frac{ء}{ءس}\left(\frac{1}{س}\right) = \frac{-1}{س^2}$$

$$\frac{ء}{ءس}\left(س^2 \times \frac{-1}{س^2}\right) \Longrightarrow \frac{ء}{ءس}(-1) = \text{صفر}$$

② $\frac{ءص}{ءس} = \text{جا}س$ ، جد $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

الحل $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \text{جتا}س$

③ $\frac{ءص}{ءس} = \text{جا}ص$ ، جد $\frac{ء^2ص}{ءس^2}$

الحل $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \text{جتا}ص \times \frac{ءص}{ءس} = \text{جتا}ص \times \text{جا}ص$
$= \frac{1}{2}\text{جا}2ص$

④ $\frac{ءص}{ءس} = \text{جا}هـ$ ، $\frac{ءس}{ءهـ} = 3$ ، جد $\left.\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right|_{هـ=\frac{\pi}{3}}$

الحل $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \text{جتا}هـ \times \frac{ءهـ}{ءس}$

$$\left.\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right|_{هـ=\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

⑤ $ص = \text{جا}هـ$ ، $\frac{ءس}{ءهـ} = 3$ ، جد $\left.\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right|_{هـ=\frac{\pi}{6}}$

الحل : بالسلسلة

$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءهـ} \times \frac{ءهـ}{ءس}$ ، $\frac{ءص}{ءهـ} = \text{جتا}هـ$

$\frac{ءص}{ءس} = \text{جتا}هـ \times \frac{1}{3}$ ، $\frac{ءهـ}{ءس} = \frac{1}{3}$

الآن ضمني

$$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{1}{3} \times -\text{جا}هـ \times \frac{ءهـ}{ءس}$$

$$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = -\frac{1}{18}$$

تمرين محلول : $ص = 3\text{جا}هـ$ ، $س = 3\text{جتا}هـ$
اثبت أن $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{-\text{قتا}^3هـ}{3}$.

الحل $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءهـ} \times \frac{ءهـ}{ءس}$
$= 3\text{جتا}هـ \times \frac{1}{-3\text{جا}هـ}$
$= -\text{ظتا}هـ$

لدينا $\frac{ءس}{ءهـ} = -3\text{جا}هـ$
$\therefore \frac{ءهـ}{ءس} = \frac{1}{-3\text{جا}هـ}$

$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \text{قتا}^2هـ \times \frac{ءهـ}{ءس}$ فكرة السؤال الاشتقاق الضمني

$= \text{قتا}^2هـ \times \frac{1}{-3\text{جا}هـ} = \text{قتا}^2هـ \times \frac{-1}{3}\text{قتا}هـ$

$= \frac{-\text{قتا}^3هـ}{3}$

شكل آخر للمطلوب $\frac{ء^2ص}{ءس^2} = \frac{-9}{ص^3}$

سؤال خطير : $\frac{ءص}{ءس} = س$ ، فإن $\frac{ء^2س}{ءص^2}$

أ) $\frac{-1}{س^3}$ ب) 1 ج) $\frac{-1}{س}$ د) $\frac{-1}{س^2}$

⑥ $ص = هـ^3 - هـ$ ، $\frac{ءس}{ءهـ} = \frac{1}{هـ-2}$ ، جد $\left.\frac{ء^2ص}{ءس^2}\right|_{هـ=1}$

الحل $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءهـ} \times \frac{ءهـ}{ءس}$

$\frac{ءص}{ءس} = (3هـ^2-1)(هـ-2)$ ضمنية

$$\frac{ء^2ص}{ءس^2} = (3هـ^2-1)\frac{ءهـ}{ءس} + (هـ-2)\left(6هـ\frac{ءهـ}{ءس}\right)$$

لـ $هـ=1 \Longrightarrow (2)(-1) + (-1)(6\times-1) = 4$

* أسئلة الإثباتات *

خطوات الحل :

* نجد المشتقات الموجودة بالسؤال بدقة كبيرة

* نعوض المشتقات في المعادلة إن وجدت .

* نفكر بإخراج عامل مشترك أو توحيد مقامات أو متطابقة أو تصنيع .

① $\text{ص} = \text{جاس} - \frac{١}{٣}\text{جا}^{٣}\text{س}$ ، اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتا}^{٣}\text{س}$

الحل) نجهز كي نشتقه

$\text{ص} = \text{جاس} - \frac{١}{٣}(\text{جاس})^{٣}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{جتاس} - \frac{١}{٣} \times ٣(\text{جاس})^{٢} \times \text{جتاس}$

$= \text{جتاس} - \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جتاس}$ (نخرج عامل مشترك)

$\text{جتاس}\,(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})$

$\text{جتاس} \times \text{جتا}^{٢}\text{س} = \text{جتا}^{٣}\text{س}$

تمرين) $\text{ص} = \text{ظاس} - \frac{١}{٣}\text{ظا}^{٣}\text{س}$ ، اثبت أن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قا}^{٤}\text{س}$

الحل كما في السؤال السابق تماماً .

② $\text{ص} = \text{جتا}٢\text{س}$ ، اثبت أن

$\text{قاس} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + ٤\,\text{جاس} = \text{صفر}$

الحل) نشتقه ثم نعوض في الأيمن .

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -٢\,\text{جا}٢\text{س}$

نعوض ← $\text{قاس} \times -٢\,\text{جا}٢\text{س} + ٤\,\text{جاس}$

$\frac{١}{\text{جتاس}} \times -٢\,(٢\,\text{جاس}\ \text{جتاس}) + ٤\,\text{جاس}$

$-٤\,\text{جاس} + ٤\,\text{جاس} = \text{صفر}$

③ $\text{س} = \text{جاص}$ ، اثبت أن

$\text{جتاص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \frac{\text{جتا}^{٣}\text{ص}}{\text{جاص}} \times \frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = ٢$

الحل) نجد المشتقات الأولى والثانية .

$١ = \text{جتاص}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١}{\text{جتاص}} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{قاص}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \text{قاص ظاص}\ \boxed{\frac{\text{دص}}{\text{دس}}} = \text{قاص ظاص قاص}$

$= \text{قا}^{٢}\text{ص ظاص}$

* نعوض في الأيمن $\cancel{\text{جتاص}} \times \frac{١}{\cancel{\text{جتاص}}} + \frac{\text{جتا}^{٣}\text{ص}}{\text{جاص}} \times \text{قا}^{٢}\text{ص ظاص}$

$١ + \frac{\cancel{\text{جتا}^{٣}\text{ص}}}{\cancel{\text{جاص}}} \times \frac{١}{\cancel{\text{جتا}^{٢}\text{ص}}} \times \frac{\cancel{\text{جاص}}}{\cancel{\text{جتاص}}} = ٢$

تمرين) $\text{ص} = \text{جاس} - \text{جتاس}$ ، اثبت أن

$\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^{٢} + \text{ص}^{٢} = ٢$

④ $\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ ، اثبت أن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{-٢\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$

الحل) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}+١)(١) - (\text{س})(١)}{(\text{س}+١)^{٢}} = \frac{١}{(\text{س}+١)^{٢}} = (\text{س}+١)^{-٢}$

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = -٢(\text{س}+١)^{-٣} = \frac{-٢}{(\text{س}+١)^{٣}}$

لاحظ الجواب المطلوب بدلالة ص لذلك نعود للأصل .

حيث $(\text{س}+١)\text{ص} = \text{س} \Longrightarrow \text{س}+١ = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$.

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{-٢}{\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{٣}} = \frac{-٢}{\frac{\text{س}^{٣}}{\text{ص}^{٣}}} = \frac{-٢\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$

* في بعض الأسئلة يلزم تغيير شكل المعطيات من ضمني إلى صريح أو العكس وذلك بعد أن تتعقد أمور الحل .

تمرين محلول :

$\text{س ص} = \text{س} + \text{ص}$ ،

اثبت أن $\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{٢\text{ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$

مهم

الحل الأول) نفكر بالتبسيط (نجعله صريح)

$\text{س ص} - \text{ص} = \text{س}$

$\text{ص}(\text{س} - ١) = \text{س} \longrightarrow \text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}-١}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{(\text{س}-١)(١) - (\text{س})(١)}{(\text{س}-١)^{٢}}$

.... اكمل كما في مثال ④

الحل الثاني) طويل اشتقه فوراً

$\text{س} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} + \text{ص} = ١ + \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\text{س}\,\frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ١ - \text{ص}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}(\text{س}-١) = ١ - \text{ص} \longrightarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{١-\text{ص}}{\text{س}-١}$ (ضمني)

$\frac{\text{د}^{٢}\text{ص}}{\text{دس}^{٢}} = \frac{(\text{س}-١)\left(\frac{-\text{دص}}{\text{دس}}\right) - (١-\text{ص})(١)}{(\text{س}-١)^{٢}}$

$= \frac{\cancel{(\text{س}-١)}\left(\frac{\text{ص}-١}{\cancel{\text{س}-١}}\right) - ١ + \text{ص}}{(\text{س}-١)^{٢}}$

* نتخلص من (ص − ١) بالعودة للأصل .

* $\text{س ص} - \text{س} = \text{ص}$

$\text{س}(\text{ص} - ١) = \text{ص}$

$\text{ص} - ١ = \frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = \frac{\text{٢ص} - ٢}{(\text{س} - ١)^{2}} = \frac{٢(\text{ص} - ١)}{(\text{س} - ١)^{2}}$$

*نتخلص من س - ١ بالعودة للأصل

* $\text{س ص} - \text{ص} = \text{س}$

$\text{ص}(\text{س} - ١) = \text{س}$

$\text{س} - ١ = \frac{\text{س}}{\text{ص}}$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = \frac{٢\left(\frac{\text{ص}}{\text{س}}\right)}{\left(\frac{\text{س}}{\text{ص}}\right)^{2}} = \frac{٢ \times \frac{\text{ص}}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^{2}}{\text{ص}^{2}}}$$

$$= \frac{\text{٢ص}^{٣}}{\text{س}^{٣}}$$

⑤ $\text{ص} = \text{ظا}^{٣}\text{س}$ ، اثبت أن $\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = ٣(\text{ص} + ١)(\text{٣ص} + ١)$

الحل : $\text{ص} = (\text{ظاس})^{٣}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = ٣(\text{ظاس})^{2}(\text{قا}^{2}\text{س}) = ٣\underbrace{(\text{ظا}^{2}\text{س})}_{\text{الأول}}\underbrace{(\text{قا}^{2}\text{س})}_{\text{الثاني}}$$

$$\frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} = \text{٣ظا}^{2}\text{س} \times (\text{٢قاس})(\text{قاس ظاس}) + \text{قا}^{2}\text{س} \times \text{٢قا}^{2}\text{س}$$

$= \text{٤ظا}^{2}\text{س قا}^{2}\text{س} + \text{٢قا}^{٤}\text{س}$ (نخرج عامل مشترك)

$\text{٢قا}^{2}\text{س}(\text{٣ظا}^{2}\text{س} + \underline{\text{قا}^{2}\text{س}}) \leftarrow$ (يجب أن يصبح بدلالة ص)

$\text{ظا}^{2}\text{س} + ١ = \text{قا}^{2}\text{س}$

$= ٣(\text{ظا}^{2}\text{س} + ١)(\text{٢ظا}^{2}\text{س} + \text{ظا}^{2}\text{س} + ١)$

$= ٣(\text{ص} + ١)(\text{٢ص} + \text{ص} + ١)$

$٣(\text{ص} + ١)(\text{٣ص} + ١)$

تمرين $\text{ص} = \text{م جاس} - \text{ن جتاس}$ اثبت أن

$(\text{صَ})^{2} = \text{م}^{2} + \text{ن}^{2} - \text{ص}^{2}$

⑥ $\text{ص} = (\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}}$ اثبت أن

$\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = \text{ن ص قاس}$.

الحل $\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = \text{ن}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-١}(\text{قاس ظاس} + \text{قا}^{2}\text{س})$

$= \text{ن}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}-١} \times \text{قاس}\underline{(\text{ظاس} + \text{قاس})}$

نجمع الأسس في الضرب .

$= \text{ن}(\text{قاس} + \text{ظاس})^{\text{ن}}\text{قاس}$

$= \text{ن ص قاس}$ (ذلك بالعودة إلى الأصل)

⑦ $\text{ص}^{\text{م}} = (١ + \text{س})^{\text{ن}}$ ، اثبت أن $\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \frac{\text{ص}}{١ + \text{س}}$

الحل : أخذ الجذر الميمي للطرفين .

$\text{ص} = \sqrt[\text{م}]{(١ + \text{س})^{\text{ن}}} \leftarrow \text{ص} = (١ + \text{س})^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}}(١ + \text{س})^{\frac{\text{ن}}{\text{م}} - ١} \times \frac{١ + \text{س}}{١ + \text{س}}$$

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \frac{(١ + \text{س})^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}}}{١ + \text{س}} \leftarrow \frac{\text{ن}}{\text{م}} \times \frac{\text{ص}}{١ + \text{س}}$$

حل آخر : يمكن فرط القوة كما يلي :-

$\frac{\text{ن}}{\text{م}} - ١ = (١ + \text{س})^{\frac{\text{ن}}{\text{م}}} \times (١ + \text{س})^{-١}$

تمرين : $\text{ص} = \text{جا}^{٤}\text{س}$ اثبت أن $\text{صً} + \text{١٦ص} = \text{١٢جا}^{2}\text{س}$

⑧ $\text{ص} = \frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ اثبت أن $\text{س صً} + \text{٢صَ} + \text{س ص} = ٠$

الحل بعد التجربة كانت المشتقة الثانية نكدة وطويلة لذلك نعود للاقتران ونبسطه لنتخلص من الكسر

$\text{س ص} = \text{جاس}$

$\text{س صَ} + \text{ص} \times ١ = \text{جتاس}$

$\text{س صً} + \text{صَ} + ١ \times \text{صَ} = -\text{جاس}$

$\text{س صً} + \text{٢صَ} = -\text{س ص}$

$\text{س صً} + \text{٢صَ} + \text{س ص} = ٠$

تمرين $\text{ص} = \sqrt{٤ + \text{٣جاس}}$ ، اثبت أن

$\text{٢ص} . \frac{\text{ء}^{2}\text{ص}}{\text{ء س}^{2}} + ٢\left(\frac{\text{ءص}}{\text{ء س}}\right)^{2} + \text{ص}^{2} = ٤$

الحل : نربع الطرفين ثم نستخدم أسلوب سؤال (٨)

⑨ $\text{جاص} = \text{ظاس}$ ، اثبت أن $\text{ظاص} = \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{2}\text{س} + (\text{صَ})^{2}}$

الحل $\text{جتاص صَ} = \text{قا}^{2}\text{س}$

$\text{جتاص} \times \text{صً} + \text{صَ} \times -\text{جاص صَ} = \text{٢قاس قاس ظاس}$

$\text{جتاص صً} - \text{جاص}(\text{صَ})^{2} = \text{٢قا}^{2}\text{س ظاس}$

$\text{جتاص صً} - \text{جاص}(\text{صَ})^{2} = \text{٢قا}^{2}\text{س جاص}$

(نقسم الجميع على جتاص للحصول على ظاص)

$\text{صً} - \text{ظاص}(\text{صَ})^{2} = \text{٢قا}^{2}\text{س ظاص}$

$\text{صً} = \text{٢قا}^{2}\text{س ظاص} + \text{ظاص}(\text{صَ})^{2}$

$\text{صً} = \text{ظاص}(\text{٢قا}^{2}\text{س} + (\text{صَ})^{2}) \leftarrow \frac{\text{صً}}{\text{٢قا}^{2}\text{س} + (\text{صَ})^{٤}} = \text{ظاص}$

⑩ اذا كان س + ص = جاص ، اثبت أن
(ص′)^{٢} = ص″ (ظتاص − قتاص)

الحل
١ + ص′ = جتاص × ص′
ص″ = جتاص × ص″ + ص′ × −جاص × ص′
ص″ − جتاص × ص″ = −جاص (ص′)^{٢}
ص″ (١ − جتاص) = −جاص (ص′)^{٢}
ص″ $\frac{\text{(١ − جتاص)}}{\text{−جاص}}$ = (ص′)^{٢}
ص″ ($\frac{\text{١}}{\text{−جاص}}$ + $\frac{\text{جتاص}}{\text{جاص}}$) = (ص′)^{٢}
ص″ (−قتاص + ظتاص) = (ص′)^{٢}

⑪ ص = جاس + س ص ، اثبت أن
ص″ + ص = $\frac{\text{٢ص′}}{\text{١−س}}$

الحل
ص′ = جتاس + س ص′ + ص
ص″ = −جاس + س ص″ + ص′ + ص′
ص″ − س ص″ + $\underbrace{\text{جاس}}$ = ٢ص′

نتخلص منها
ص − س ص = جاس
ص(١−س) = جاس

ص″ (١ − س) + ص (١ − س) = ٢ص′
ص″ + ص = $\frac{\text{٢ص′}}{\text{١−س}}$

واجب ص^{٣} = جاس ، اثبت أن
٤ص′^{٣} + ص″ + ص^{٤} + ١ = صفر

تمرين محلول :

ل(س) ، هـ(س) ، ق(س) اقترانات قابلة للاشتقاق
هـ(س) = ل(س) × ق(س) ، ل′(س) × ق′(س) = جـ (ثابت)
اثبت أن هـ‴(س) = ل(س) × ق‴(س) + ق(س) × ل‴(س)

الحل :-
هـ′(س) = ل(س) . ق′(س) + ق(س) . ل′(س)
هـ″(س) = ل(س) . ق″(س) + ق′(س) . ل′(س) + ق(س) . ل″(س) + ل′(س) . ق′(س)
لكن ل′(س) ق′(س) = جـ
هـ″(س) = ل(س) . ق″(س) + جـ + ق(س) . ل″(س) + جـ
هـ‴(س) = ل(س) . ق‴(س) + ق″(س) . ل′(س) + ق(س) . ل‴(س) + ل″(س) . ق′(س)
لكن ل′(س) . ق′(س) = جـ
ل′(س) × ق″(س) + ق′(س) . ل″(س) = صفر
هـ‴(س) = ل(س) . ق‴(س) + ق(س) . ل‴(س) + $\underbrace{\text{ق″(س) ل′(س) + ل″(س) . ق′(س)}}_{\text{صفر}}$
∴ هـ‴(س) = ل(س) ق‴(س) + ق(س) . ل‴(س)

نظرية لوبيتال للدوائر فقط حيث نشتق

البسط لوحده و المقام لوحده ثم نعوض
$\underset{\text{س} \to \text{أ}}{\text{نها}}$ $\frac{\text{مشتقة البسط}}{\text{مشتقة المقام}}$

أمثلة ① $\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}$ $\frac{\text{س}^{٢} + \text{س} - ٦}{٢ - \text{س}}$

أ) صفر   ب) ٥   جـ) −٥   د) ٤

الحل الناتج :
$\underset{\text{س} \to ٢}{\text{نها}}$ $\frac{\text{٢س} + ١}{-١}$ = $\frac{٥}{-١}$ = −٥   (جـ)

② $\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}$ $\frac{\text{ظاس} - ١}{\text{٤س} - \pi}$

أ) $\frac{١}{٢}$ ب) ٢جـ   جـ) $\frac{١}{٤}$ د) صفر

$\underset{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}}{\text{نها}}$ $\frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٤}$ = $\frac{\text{قا}^{٢}\,٤٥}{٤}$ = $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{١}{٢}$ (أ)

③ $\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - \text{جتا} س}{س^٢}$ تساوي :.

م) $-\frac{١}{٢}$ ب) صفر جـ) غير موجودة ء) $\frac{١}{٢}$

الحل الناتج $\frac{٠}{٠}$

$$\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جا} س}{٢ س} = \frac{٠}{٠} \Leftarrow \text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{ها} س}{٢ س} = \frac{١}{٢}$$

أو اشتقه مرة أخرى

$$\text{نها}_{س \leftarrow ٠} \frac{\text{جتا} س}{٢} = \frac{١}{٢} \qquad (ء)$$

④ $\text{نها}_{ع \leftarrow س} \frac{\text{جا}٢ع - \text{جا}٢س}{س - ع}$ تساوي

م) جتا٢س ب) −٢جتا٢س

جـ) ٢جتا٢س ء) −جتا٢س

الحل اشتقه الذي يحتوي ع فقط والباقي صفر

$$\text{نها}_{ع \leftarrow س} \frac{\text{جتا}٢ع(٢) - \text{صفر}}{-١} = -٢\text{جتا}٢س \qquad (ب)$$

⑤ $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{\text{جا}(٢س + ٣هـ) - \text{جا}٢س}{٥هـ}$ تساوي

م) $\frac{٦}{٥}$ جا٢س ب) $\frac{٣}{٥}$ جتا٢س

جـ) $\frac{٦}{٥}$ جتا٢س ء) ٣جتا٢س

الحل اشتقه بالنسبة لِ هـ

$$\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{\text{جتا}(٢س + ٣هـ)(٣) - \text{صفر}}{٥}$$

$$= \frac{٣}{٥} \text{جتا}٢س \qquad (ب)$$

ملاحظة :. في بعض الحالات تفشل لوبيتال وذلك عند ظهور الجذور لأنه الناتج يبقى $\frac{٠}{٠}$ في أغلب الحالات .

النهايات الخاصة :.

هي نهاية يتم التعامل معها كمشتقة .

مثال ① $ق(س) = س^٣$ جد مايلي :.

م) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} \Leftarrow \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$$\Leftarrow \text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س+هـ)^٣ - س^٣}{هـ} = قَ(س) = ٣س^٢$$

ب) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = قَ(١) = ٣$

جـ) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١+٣هـ) - ق(١)}{٥هـ}$

$$= \frac{١}{٥} \times ٣ \,\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١+٣هـ) - ق(١)}{٣هـ} = \frac{٣}{٥} قَ(١) = \frac{٩}{٥}$$

ء) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١) - ق(١+هـ)}{هـ}$

$$= -\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = -قَ(١) = -٣$$

هـ) $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{قَ(٢+هـ) - قَ(٢)}{٣هـ} = \frac{١}{٣} قً(٢)$

$$= \frac{١}{٣} \times ١٢ = ٤$$

مثال ② جد قيمة كل من النهايات التالية :.

① $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(س+هـ)^٣ - س^٣}{هـ}$

الحل لدينا $ق(س) = س^٣$ والمطلوب $قَ(س)$

الجواب $قَ(س) = ٣س^٢$

حل سريع للدوائر حسب لوبيتال

$$\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(س+هـ)^٢ - \text{صفر}}{١} = ٣س^٢$$

② جد $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(١+٣هـ)^٣ - ١}{٥هـ}$

الحل لدينا $ق(س) = س^٣$ والمطلوب $\frac{٣}{٥} قَ(١)$

$قَ(س) = ٣س^٢$

الجواب $\frac{٣}{٥} \times ٣(١) = \frac{٩}{٥}$

حل آخر حسب لوبيتال

$$\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٣(١+٣هـ)^٢(٣) - \text{صفر}}{٥} = \frac{٩}{٥}(١)^٢ = \frac{٩}{٥}$$

تمرين $\text{نها}_{هـ \leftarrow ٠} \frac{٥(٢+هـ)^٣ - ٤٠}{١٠هـ}$

م) ٦٠ ب) ٣٠ جـ) صفر ء) ٦

مثال ③ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣}$ ، جد ما يلي :

(أ) $\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نها}} \frac{\text{ع}^{٣} - \text{س}^{٣}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{ق}'(\text{س}) = ٣\text{س}^{٢}$

(ب) $\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{٢ - \text{ع}} = -\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع} - ٢}$

$= -\text{ق}'(٢) = -١٢$

(جـ) $\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}^{٢} - ٤}$ يلزم تجهيزها

$\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{(\text{ع}-٢)(\text{ع}+٢)} = \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(٢)}{\text{ع}-٢} \times \underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\text{ع}+٢}$

$= \text{ق}'(٢) \times \frac{١}{٤}$

$= ١٢ \times \frac{١}{٤} = ٣$

(د) $\underset{\text{ع}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}'(\text{ع}) - \text{ق}'(٢)}{\text{ع} - ٢} = \text{ق}''(٢) = ١٢$

مثال ④ إذا كان $\text{ق}(٨) = ٣$ ، $\text{ق}'(٨) = ٢$

جد ما يلي : (أ) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}^{٣}) - ٣}{\text{س} - ٢}$

الحل $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}^{٣}) - \text{ق}(٨)}{\text{س} - ٢}$

$\boxed{\text{نفرض } \text{ع}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}^{٣})}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(٢)}{\text{س} - ٢} = \text{ع}'(٢)$

$\text{ع}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}^{٣})(٣\text{س}^{٢})$

$\text{ع}'(٢) = \text{ق}'(٨)(١٢) = ٢\times١٢ = ٢٤$

حل سريع لوبيتال $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}'(\text{س}^{٣})(٣\text{س}^{٢}) - \text{صفر}}{١}$

$= \text{ق}'(٨) \times ١٢ = ٢\times١٢ = ٢٤$

(ب) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}^{٢}+٤) - ٣}{\text{س}^{٢} - ٤}$

الحل $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{س}^{٢}+٤) - \text{ق}(٨)}{\text{س}^{٢} - ٤}$

$\boxed{\text{نفرض } \text{ع}(\text{س}) = \text{ق}(\text{س}^{٢}+٤)}$

$\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(٢)}{\text{س}^{٢} - ٤} = \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(٢)}{(\text{س}-٢)(\text{س}+٢)}$

$= \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(٢)}{\text{س}-٢} \times \underset{\text{س}\to ٢}{\text{نها}} \frac{١}{\text{س}+٢}$

$= \text{ع}'(٢) \times \frac{١}{٤}$

$= ١٢ \times \frac{١}{٤}$

$= ٣$

$\text{ع}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{س}^{٢}+٤)(٢\text{س})$

$\text{ع}'(٢) = \text{ق}'(٨)(٤)$

$= ٣\times٤ = ١٢$

حل سريع لوبيتال

تمرين محلول إذا كان $\text{ق}(\frac{١}{٢}) = ٢$ ، $\text{ق}'(\frac{١}{٢}) = ٨$

جد $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}})) - ٢}{\text{س} - ٦}$

الحل $\underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \frac{\text{ق}(\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}})) - \text{ق}(\frac{١}{٢})}{\text{س} - ٦}$

$\text{ع}(\text{س}) = \text{ق}(\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}})) \Leftarrow \underset{\text{س}\to ٦}{\text{نها}} \frac{\text{ع}(\text{س}) - \text{ع}(٦)}{\text{س} - ٦} = \text{ع}'(٦)$

$\text{ع}'(\text{س}) = \text{ق}'(\text{جا}(\frac{\pi}{\text{س}}))(\text{جتا}(\frac{\pi}{\text{س}}))(\frac{-\pi}{\text{س}^{٢}})$

$\text{ع}'(٦) = \text{ق}'(\frac{١}{٢})(\text{جتا}\frac{\pi}{٦})(\frac{-\pi}{٣٦})$

$٨ \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} \times \frac{-\pi}{٣٦} = \frac{\pi\sqrt{٣}}{٩}$

*حل سريع لوبيتال

اثبت أن $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(٢\text{س}+٣\text{هـ}) - \text{جا}٢\text{س}}{٥\text{هـ}} = \frac{٣}{٥}\text{جتا}٢\text{س}$

الحل $\boxed{\text{ع} = ٢\text{س}} \longrightarrow \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{ع}+٣\text{هـ}) - \text{جا}\text{ع}}{٥\text{هـ}}$

$\frac{٣}{٥} \times \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}(\text{ع}+٣\text{هـ}) - \text{جا}\text{ع}}{٣\text{هـ}}$

$\frac{٣}{٥} \times (\text{جا}\text{ع})'$

$\frac{٣}{٥}\text{جتا}\text{ع} \Leftarrow \frac{٣}{٥}\text{جتا}٢\text{س}$

تمرين محلول جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}(٢\text{س}+٣\text{هـ}) - \text{جتا}^{٢}(\frac{\pi}{٢} - ٢\text{س})}{٥\text{هـ}}$

الحل $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}(٢\text{س}+٣\text{هـ}) - \text{جا}^{٢}(٢\text{س})}{٥\text{هـ}}$

$\boxed{\text{ع} = ٢\text{س}} \longrightarrow \underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نها}} \frac{\text{جا}^{٢}(\text{ع}+٣\text{هـ}) - \text{جا}^{٢}\text{ع}}{٥\text{هـ}}$

......أكمل $\frac{٦}{٥}\text{جا}٢\text{س}\,\text{جتا}٢\text{س}$

تمرين $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{٣}} + \text{أ}\,\text{س}^{\text{٢}}$ وكانت

$\underset{\text{س}\to\text{٣}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}'(\text{٢}\text{س}) - \text{ق}'(\text{٦})}{\text{س} - \text{٣}} = \text{١٢}$ ، جد الثابت أ

$\boxed{\text{الاجابة : (١٥)}}$

اذا كان $\text{ق}(\text{س})$ اقتران قابل للاشتقاق على ح ويحقق الخاصية $\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) = \text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{هـ})$ وكان $\text{ق}(\text{٠}) = \text{ق}'(\text{٠}) = \text{١}$ ، باستخدام تعريف المشتقة اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$

الحل $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}(\text{هـ}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{س})\left(\text{ق}(\text{هـ}) - \text{١}\right)}{\text{هـ}}$

$= \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \text{ق}(\text{س}) \times \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{هـ}) - \text{١}}{\text{هـ}}$

$= \text{ق}(\text{س}) \times \underset{\text{هـ}\to\text{٠}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{٠}+\text{هـ}) - \text{ق}(\text{٠})}{\text{هـ}}$

$= \text{ق}(\text{س}) \times \text{ق}'(\text{٠})$

$= \text{ق}(\text{س}) \times \text{١} = \text{ق}(\text{س})$

براهين النظريات :

تقسم إلى أربعة أقسام

أولاً: تعريف المشتقة للقواعد الرئيسية بالإضافة إلى جاس ، جتاس

① $\text{ق}(\text{س}) = \text{أ}$ حيث أ ثابت اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{صفر}$.

البرهان $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{أ} - \text{أ}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{صفر}}{\text{ع} - \text{س}} = \text{صفر}$

② $\text{ق}(\text{س}) = \text{جـ} . \text{ل}(\text{س})$ ، (جـ ثابت) اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جـ} . \text{ل}'(\text{س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جـ} . \text{ل}(\text{ع}) - \text{جـ}\text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{جـ} \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{جـ} \times \text{ل}'(\text{س})$

③ $\text{ق}(\text{س}) = \text{هـ}(\text{س}) + \text{ل}(\text{س})$ اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{هـ}'(\text{س}) + \text{ل}'(\text{س})$.

البرهان $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{هـ}(\text{ع}) + \text{ل}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$ الفرز

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{هـ}(\text{ع}) - \text{هـ}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}} + \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ل}(\text{ع}) - \text{ل}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \text{هـ}'(\text{س}) + \text{ل}'(\text{س})$

④ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح موجب ، اثبت أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$.

البرهان $\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ع}^{\text{ن}} - \text{س}^{\text{ن}}}{\text{ع} - \text{س}}$

$= \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\cancel{(\text{ع} - \text{س})}\left(\text{ع}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{ع}^{\text{ن}-\text{٢}}\text{س} + \text{ع}^{\text{ن}-\text{٣}}\text{س}^{\text{٢}} + \ldots + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}}\right)}{\cancel{\text{ع} - \text{س}}}$

$= \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}} + \ldots + \text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$

$= \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-\text{١}}$ (ن مرة)

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = \text{جاس}$ ، برهن أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{جتاس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جاع} - \text{جاس}}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ع}+\text{س}) \times \text{جا}\,\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$\underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \text{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ع}+\text{س}) \times \underset{\text{ع}\to\text{س}}{\text{نهـا}}\ \dfrac{\text{جا}\,\frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع} - \text{س}}$

$$\Leftarrow \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \text{٢ جتا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س}) \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$\boxed{\text{ص} = \text{ع} - \text{س}}$

$$\text{٢ جتا } \tfrac{1}{2}(\text{٢س}) \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جا } \tfrac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$\text{٢ جتاس} \times \tfrac{1}{2}$$

$$\text{جتاس}$$

⑥ ق(س) = جتاس ، برهن أن قَ(س) = −جاس

$$\text{قَ(س)} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جتاع} - \text{جتاس}}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$= \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{-\text{٢ جا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س}) \times \text{جا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$$\lim_{\text{ع}\to\text{س}} -\text{٢ جا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}+\text{س}) \times \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{جا } \tfrac{1}{2}(\text{ع}-\text{س})}{\text{ع}-\text{س}}$$

$\boxed{\text{ص} = \text{ع} - \text{س}}$

$$-\text{٢ جا } \tfrac{1}{2}(\text{٢س}) \times \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{جا } \tfrac{1}{2}\text{ص}}{\text{ص}}$$

$$-\text{٢ جاس} \times \tfrac{1}{2} = -\text{جاس}$$

ثانياً: القسمة (بالقانون)

① $\text{ق(س)} = \frac{\text{م}}{\text{ل(س)}}$ ، م ثابت برهن أن

$$\text{قَ(س)} = \frac{-\text{م} \times \text{لَ(س)}}{(\text{ل(س)})^2}$$

البرهان $\text{قَ(س)} = \frac{\text{ل(س)}(\text{صفر}) - (\text{م})(\text{لَ(س)})}{(\text{ل(س)})^2}$

$$= \frac{\text{صفر} - \text{م} \times \text{لَ(س)}}{(\text{ل(س)})^2} = \frac{-\text{م} \times \text{لَ(س)}}{(\text{ل(س)})^2}$$

② ق(س) = ظاس ، برهن أن قَ(س) = قا²س

البرهان $\text{ق(س)} = \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جاس} \times -\text{جاس}}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}} = \frac{1}{\text{جتا}^2\text{س}}$$

$$= \text{قا}^2\text{س}$$

ملاحظة: في مثال ② يمكن أن يكون المطلوب باستخدام تعريف المشتقة عندها

$$\text{قَ(س)} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع}-\text{س}} = \lim_{\text{ع}\to\text{س}} \frac{\text{ظاع} - \text{ظاس}}{\text{ع}-\text{س}}$$

..... أكمل الحل .

③ ق(س) = ظتاس ، اثبت أن قَ(س) = −قتا²س

البرهان $\text{ق(س)} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{جاس} \times -\text{جاس} - \text{جتاس} \times \text{جتاس}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{-\text{جا}^2\text{س} - \text{جتا}^2\text{س}}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$\text{قَ(س)} = \frac{-(\text{جا}^2\text{س} + \text{جتا}^2\text{س})}{\text{جا}^2\text{س}}$$

$$= \frac{-1}{\text{جا}^2\text{س}} = -\text{قتا}^2\text{س} .$$

④ ق(س) = قاس ، برهن أن قَ(س) = قاس ظاس

البرهان $\text{ق(س)} = \frac{1}{\text{جتاس}}$

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{جتاس} \times 0 - 1 \times -\text{جاس}}{(\text{جتاس})^2}$$

$$= \frac{1}{\text{جتاس}} \times \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$$

$$= \text{قاس} \times \text{ظاس}$$

⑤ ق(س) = قتاس ، برهن أن قَ(س) = −قتاس ظتاس .

البرهان $\text{ق(س)} = \frac{1}{\text{جاس}}$

$$\text{قَ(س)} = \frac{\text{جاس} \times 0 - 1 \times \text{جتاس}}{(\text{جاس})^2}$$

$$= \frac{-1}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$$

$$= -\text{قتاس ظتاس}$$

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{\text{ن}}$ ، ن عدد صحيح سالب

برهن أن $\text{ق}'(\text{س}) = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$.

البرهان : نفرض $\text{ن} = -\text{م}$

حيث م عدد صحيح موجب

$$\therefore \text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-\text{م}} = \frac{1}{\text{س}^{\text{م}}}$$

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{\text{م}} \times 0 - 1 \times \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\text{م}})^2}$$

$$= \frac{-\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{س}^{2\text{م}}} = -\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1-2\text{م}}$$

$$= -\text{م}\,\text{س}^{-\text{م}-1} = \text{ن}\,\text{س}^{\text{ن}-1}$$

ثالثاً: الضمني :-

$\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، حيث $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ عدد نسبي

اثبت أنه $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1}$

البرهان : رفع الطرفين للقوة للتخلص من الكسر

$\text{ص}^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م}}$ نشتق ضمني

$$\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}\,\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-1}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{(\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}})^{\text{ن}-1}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-1}}{\text{س}^{\text{م}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{س}^{\text{م}-1-\text{م}+\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1}$$

رابعاً: المساواة :-

اذا كان ق(س) قابل للاشتقاق عند $\text{س} = \text{ج}$

برهن أن ق(س) متصل عند $\text{س} = \text{ج}$

المعطيات $\text{ق}'(\text{ج}) = \lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج})}{\text{ع} - \text{ج}}$ موجودة

البرهان: احفظ البداية

$$\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج}) = \text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج})$$

$$\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج}) = \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج})}{\text{ع} - \text{ج}} \times (\text{ع} - \text{ج})$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \left(\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج})\right) = \lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \frac{\text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج})}{\text{ع} - \text{ج}} \times \lim_{\text{ع} \to \text{ج}} (\text{ع} - \text{ج})$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \text{ق}(\text{ع}) - \lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \text{ق}(\text{ج}) = \text{ق}'(\text{ج}) \times \text{صفر}$$

$$\lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \text{ق}(\text{ع}) - \text{ق}(\text{ج}) = \text{صفر}$$

$$\therefore \lim_{\text{ع} \to \text{ج}} \text{ق}(\text{ع}) = \text{ق}(\text{ج})$$

∴ ق(س) متصل عند $\text{س} = \text{ج}$ لأنه ق(ج) معرف

ضع دائرة حول رمز الإجابة الصحيحة

① إذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة N وكان معدل التغير للاقتران ق(س) دائماً ٣ فإن قيمة N هي

أ) صفر ب) ١ ج) ٢ د) ٣

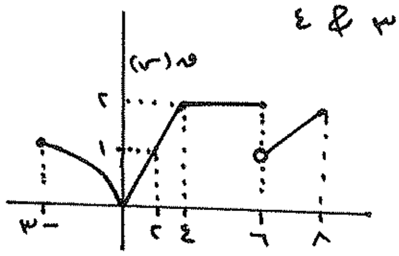
② إذا كان ق(١) = ٣ ، قَ(١) = ٢

فإن $\lim\limits_{\text{س} \to \frac{\pi}{٤}} \dfrac{٣ - \text{ق}(\text{ظتاس})}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

أ) −٤ ب) ٤ ج) ٢ د) −٢

من خلال رسمة ق(س) المعرف على الفترة [−٣، ٨]

أجب عن فرع ٣ & ٤



③ جد مجموعة قيم أ التي تجعل قَ(أ) غير موجودة لأن $\text{قَ}_{+}(\text{أ}) \neq \text{قَ}_{-}(\text{أ})$

أ) {−٣، ٠، ٦، ٨} ب) {٠، ٤}
ج) {−٣، ٤، ٨} د) {−٣، ٨}

④ جد (هـ ∘ ق)َ(٢) علماً بأن هَ(١) = −٢

أ) ٠ ب) ١ ج) −١ د) ٥ح

⑤ إذا كان ق(س) = $\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{جا}^{٤}\text{س}$
حيث س ∈ $[-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$
فإن أصفار قَ(س) هي

أ) {π، −π} ب) $\{\frac{\pi}{٢}، ٠\}$ ج) {٠} د) $\{٠، \frac{\pi}{٢}، -\frac{\pi}{٢}\}$

⑥ إذا كان ق(س) = [س+٧] − [س] + |س−٢|
حيث س ∈ (−٥، −١) جد قَ(−٣)

أ) ٢ ب) غيرموجودة ج) ١٣ د) −٢

⑦ إذا كان ٢س ص + π جاص = ٢π
جد صَ عند $(١، \frac{\pi}{٢})$

أ) $\frac{\pi}{٢}$ ب) $-\frac{\pi}{٢}$ ج) صفر د) صفر

⑧ إذا كان ق(س) = |٤ − س²| متصلاً على ح
فإن قيم س التي لا يكون عندها ق قابلاً للاشتقاق

أ) {٠، ٢، −٢} ب) {٤}
ج) {−٢، ٢} د) {٤، −٤}

⑨ اذا كان ص = $\dfrac{٢ - \text{جتا}\frac{\pi}{٢}}{\text{جتاس}}$ فإن $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$

أ) صفر ب) قاس ظاس ج) ٢قاس ظاس د) −٢قاس ظاس

⑩ إذا كان

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{٢} ، & |\text{س}| < ٢ \\ ٣\text{س}+٣ ، & [\text{س}] = ٢ \end{cases}$$

فإن قَ(٢) تساوي

أ) ٣ ب) غ.م ج) ٦ د) ٠

⑪ إذا كان س = ظاص ، ص ∈ $(٠، \frac{\pi}{٢})$
جد $\text{صَ} \Big|_{\text{س}=٢}$

أ) $\frac{-٤}{٢٥}$ ب) $\frac{٤}{٢٥}$ ج) ١ د) −١

⑫ إذا كان ص² = |س+٢| − $[\frac{\text{س}}{٣}]$
حيث ص>٠

وكان $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق}(٢ + \text{أهـ}) - \text{ق}(٢)}{٥\text{هـ}} = ٣$

فإن قيمة أ هي

أ) −٦٠ ب) ٦٠ ج) −١٢٠ د) ١٢٠

الإجابات :

① لأن معدل التغير ثابتاً ← ∴ ق خطي
من الدرجة الأولى ن = ١ $\boxed{\text{ب}}$

---

② $\displaystyle \lim_{\text{س} \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{ق}(1) - \text{ق}(\text{ظتاس})}{\text{س} - \frac{\pi}{4}}$

المطلوب $\left(-\,\text{ق}(\text{ظتاس})\right)' \Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{4}}$

$= -\,\text{قَ}(\text{ظتاس}) \times -\,\text{قتا}^2\text{س} \Big|_{\text{س}=\frac{\pi}{4}}$

$= -\,\text{قَ}(1) \times -\,2$

$= -\,3 \times -\,2 = 4$ $\boxed{\text{أ}}$

---

③ عند الرؤوس المدببة فقط
$\{0 ، 4\}$ (ب)

---

④ $(\text{هـ} \circ \text{ق})'(2) = \text{هَ}(\text{ق}(2)) \times \text{قَ}(2)$

$= \text{هَ}(1) \times \frac{1}{2}$

$= -\,2 \times \frac{1}{2} = -1$

من الرسم
$\text{ق}(2) = 1$
$\text{قَ}(2) = \text{الميل} = \frac{2-0}{0-4}$

---

⑤ نبسط أولاً ← نحلل

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{جتا}^2\text{س} - \text{جا}^2\text{س})(\text{جتا}^2\text{س} + \text{جا}^2\text{س}) = \text{جتا}2\text{س} \times 1$

$\text{قَ}(\text{س}) = -\,2\text{جا}2\text{س} \Longleftarrow -\,2\text{جا}2\text{س} = 0$

$\therefore \text{جا}2\text{س} = 0 \Longleftarrow 2\text{س} = 0 ،\ \text{س} = 0 \;\Big|\; 2\text{س} = \pi ،\ \text{س} = \frac{\pi}{2}\ \times \;\Big|\; 2\text{س} = -\pi ،\ \text{س} = -\frac{\pi}{2}\ \times$

الجواب س = ٠ فقط أطراف المجال المشتقة عندها غير موجودة $\boxed{\text{ج}}$

---

⑥ $\text{ق}(\text{س}) = \cancel{[\text{س}]} + 7 - \cancel{[\text{س}]} - 2\text{س}$

$\text{ق}(\text{س}) = 7 - 2\text{س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = -\,2 \Longleftarrow \text{قَ}(-3) = -2$ (د)

---

⑦ $2(\text{س صَ} + \text{ص}) + \pi\ \text{جتاص} \times \text{صَ} = 0$

نعوض $2\,\text{صَ} + 2 \times \frac{\pi}{2} + 0 = 0$

$2\,\text{صَ} = -\,2 \times \frac{\pi}{2} \longrightarrow \text{صَ} = -\frac{\pi}{2}$ (ب)

---

⑧ نعيد التعريف

$\begin{array}{ccccc} + & & - & & + \\ \hline & -2 & & 2 & \end{array}$

$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 - 4 ، & \text{س} < -2 \\ 4 - \text{س}^2 ، & -2 \le \text{س} \le 2 \\ \text{س}^2 - 4 ، & \text{س} > 2 \end{cases}$

ق متصل
عند ٢
من السؤال

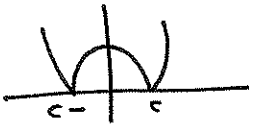
$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} ، & \text{س} < -2 \\ -2\text{س} ، & -2 < \text{س} < 2 \\ 2\text{س} ، & \text{س} > 2 \\ \text{غ.م} ، & \text{س} = -2 ، 2 \end{cases}$

$\text{قَ}_{+}(-2) = 4$ بما أن $\text{قَ}_{+}(-2) \ne \text{قَ}_{-}(-2)$

$\text{قَ}_{-}(-2) = -4$ ∴ $\text{قَ}(-2)$ غير موجودة

$\left.\begin{array}{l} \text{قَ}_{+}(2) = 4 \\ \text{قَ}_{-}(2) = -4 \end{array}\right\}$ غ.م

حل آخر من الرسم



عند الرؤوس المدببة (ج)

---

⑨ $\text{ص} = 2\text{قاس}$ (ج)

$\text{صَ} = 2\text{قاس ظاس}$

---

⑩ $\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^2 ، & -2 < \text{س} < 2 \\ 3\text{س} + 3 ، & 2 \le \text{س} < 3 \end{cases}$

ق متصل عند س = ٣

$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} 2\text{س} ، & -2 < \text{س} < 2 \\ 3 ، & 2 < \text{س} < 3 \end{cases}$

$\text{قَ}_{+}(2) = 3$
$\text{قَ}_{-}(2) = 6$
∴ غ.م (ب)

---

⑪ $1 = \text{قا}^2\text{ص} \times \text{صَ}$

$\text{صَ} = \frac{1}{\text{ظا}^2\text{ص} + 1} = \frac{1}{\text{س}^2 + 1}$ (أ)

$\text{صً} = \frac{-1 \times 2\text{س}}{(\text{س}^2 + 1)^2} \Longleftarrow \text{صً}\Big|_{\text{س}=2} = \frac{-1 \times 2 \times 2}{25} = \frac{-4}{25}$

---

⑫ نعيد التعريف حول العدد ٢

$\text{ص}^2 = \text{س} + 2 - 0 \Longleftarrow$ نشتق $3\text{ص صَ} = 1$

$\text{صَ} = \frac{1}{2\text{ص}}$ ، نجد ص من الأصل $\text{ص}^2 = 4$

$\underset{\times}{\text{ص} = 2}$ ، $\text{ص} = -2$ ✓

∴ $\boxed{\text{صَ}\Big|_{\text{س}=2} = -\frac{1}{4}}$ (أ)

من النهاية الخاصة $\frac{\text{أ}}{5} \times \text{قَ}(2) = 3$

$\frac{\text{أ}}{5} \times -\frac{1}{4} = 3$