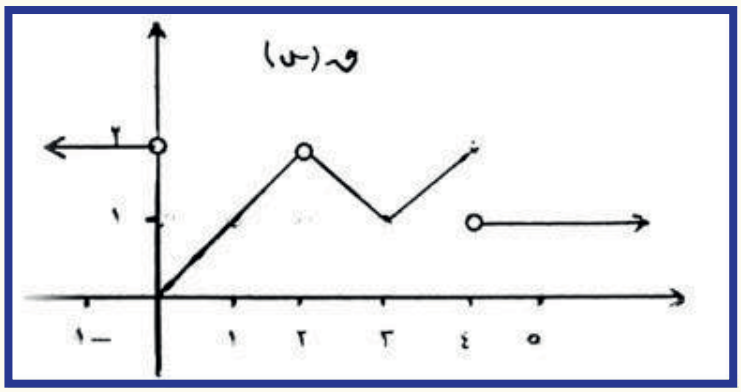
المنهاج الجديد
عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

الرياضيات العلمي

(الفصل الاول)



النهايات والاتصال

محمد صالح

د. محمود الكسجي عمر الجبر

مركز زهرة الإتحاد الثقافي الوحدات : 4752403	أكاديمية صناع المعرفة المدينة الرياضية: 0796667058
الأكاديمية الأولى صويلح : 0791461143	Jo Academy.com 0798006679
مركز المدثر الثقافي الجبيهة : 5330430	الأذكياء الجاردنز : 0795655900
أكاديمية العصر الجديد أبو نصير : 0795651033	التقنيات الهاشمي : 5053230

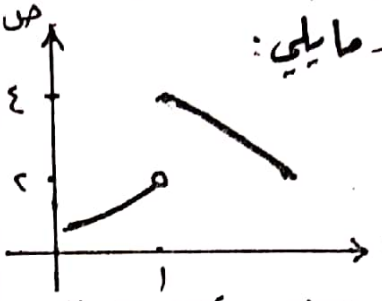
تطلب من مكتبة بلوبرينت 0791027000

عمر الجبر
Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

الوحدة الأولى - النهايات والاتصال

مفهوم النهاية

من خلال الرسم المجاور الذي يمثل $ق(س)$ نلاحظ مايلي:



- كلما اقتربت س من العدد (١) من جهة اليمين $(س \to 1^+)$ فإن $ق(س)$ يقترب من العدد ٤ ويعبر عن ذلك بالرموز

$$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = ٤$$

- كلما اقتربت س من العدد (١) من جهة اليسار $(س \to 1^-)$ فإن $ق(س)$ يقترب من العدد ٢ ويعبر عن ذلك بالرموز

$$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = ٢$$

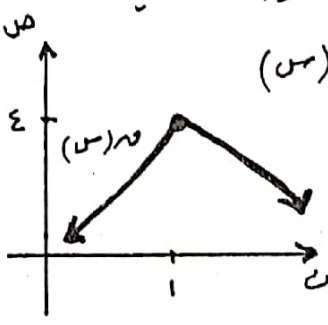
- لأن $\lim_{س \to 1^+} ق(س) \neq \lim_{س \to 1^-} ق(س)$

فإن $\lim_{س \to 1} ق(س)$ غير موجودة

هل انتبهت أن $ق(١) = ٤$

مثال آخر لتوضيح مفهوم النهاية

الرسم المجاور يمثل $ق(س)$



نلاحظ أنّ

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = ٤$

لأنهما متساويتان

فإن $\lim_{س \to 1} ق(س) = ٤$

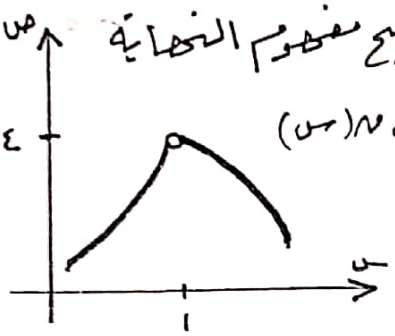
نتيجة إذا كانت:

$\lim_{س \to p^+} ق(س) = \lim_{س \to p^-} ق(س) = ل$ فإن

$\lim_{س \to p} ق(س) = ل$ (موجودة)

مثال آخر لتوضيح مفهوم النهاية

الرسم المجاور يمثل $ق(س)$



نلاحظ أنّ:

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = ٤$

$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = ٤$

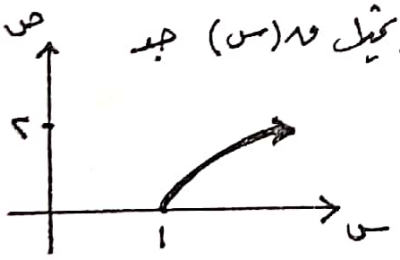
$\therefore \lim_{س \to 1} ق(س) = ٤$

هل انتبهت أن $ق(١)$ غير معرف

$\therefore$ الصورة لا علاقة لها بالنهاية

أمثلة:

① الشكل المجاور يمثل $ق(س)$ جد $\lim_{س \to 1} ق(س)$



الحل:

$\lim_{س \to 1^+} ق(س) =$ صفر

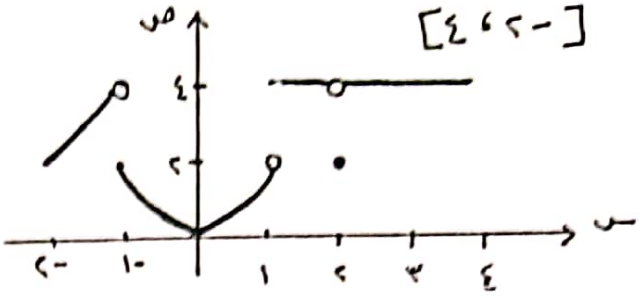
$\lim_{س \to 1^-} ق(س)$ غير موجودة

$\therefore \lim_{س \to 1} ق(س)$ غير موجودة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

④ الشكل المجاور يمثل $d(س)$ في الفترة $[-٢، ٤]$



اجب عما يلي :

أ) $\lim_{س \to -١} d(س)$

ب) $\lim_{س \to ٢} d(س)$

ج) $\lim_{س \to ٤^+} d(س)$

د) $\lim_{س \to ٢} d(س)$ غير موجودة

الحل:

أ) $\lim_{س \to -١} d(س) = ٢$

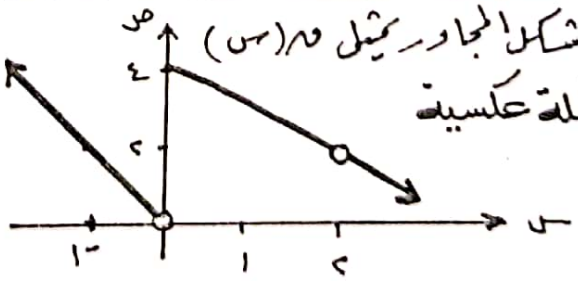
ب) $\lim_{س \to ٢} d(س) = ٤$

ج) $\lim_{س \to ٤^+} d(س)$ = غير موجودة

د) قيم $م \in \{-٢، -١، ١، ٤\}$

③ الشكل المجاور يمثل $d(س)$

أسئلة عكسية



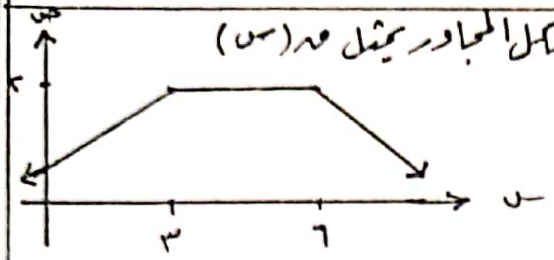
$\lim_{س \to هـ} d(س) = ٢$ ما قيم الثابت هـ

الحل: * نضع القلم على محور الصادات عند العدد ٢

* نرسم خط أفقي يوازي السينات ونلاحظ نقط التقاطع مع المنحنى

* نقوم بالنزول على محور السينات فيكون الجواب $\{-١، ٣\}$

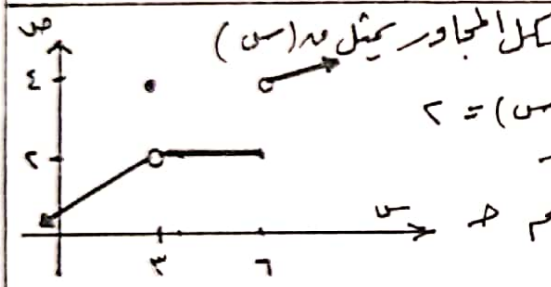
④ الشكل المجاور يمثل $d(س)$



$\lim_{س \to هـ} d(س) = ٢$ ما قيم هـ

الحل: نلاحظ نقط التقاطع تكون مرتبين (خط أفقي) الجواب $[٣، ٦]$

⑤ الشكل المجاور يمثل $d(س)$

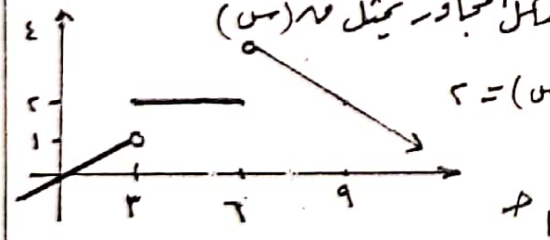


$\lim_{س \to هـ} d(س) = ٢$

ما قيم هـ

الحل $[٣، ٦]$

⑥ الشكل المجاور يمثل $d(س)$

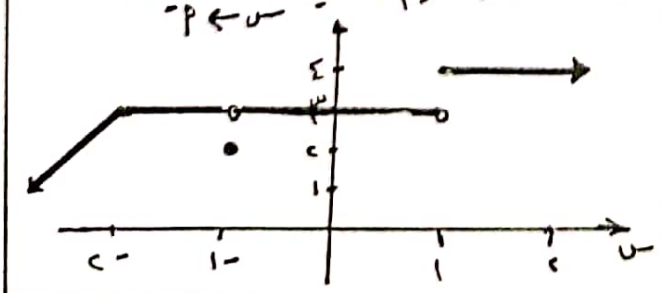


$\lim_{س \to هـ} d(س) = ٢$

ما قيم هـ

الحل هـ $\in (٣، ٦) \cup \{٩\}$

⑦ الشكل المجاور يمثل منحنى $d(س)$ المعرف على ح ما مجموعة قيم م حيث $\lim_{س \to م} d(س) = ٣$



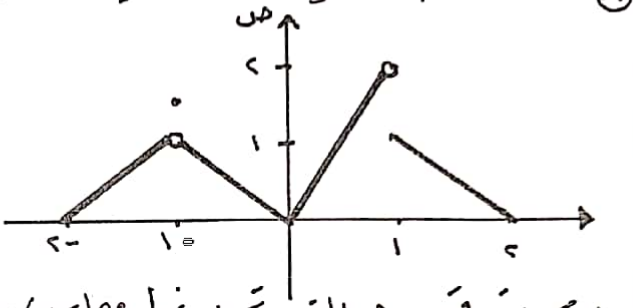
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

الحل: نأخذ كل الخط الأفقي عند العدد ٣
مع قصر الخفة في]-٢، ١[

انتبه لو كانت نهـا هـ(س) = ٣ فإن
س ← ٣+
الجواب]-٢، ١[

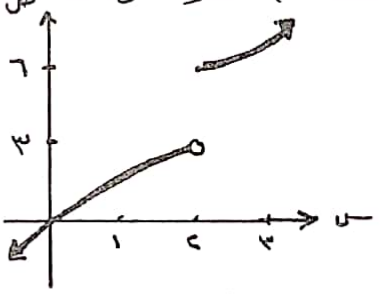
⑧ الشكل المجاور يمثل هـ(س) في [-٢، ٣]



ما مجموعة قيم م التي تجعل نهـا هـ(س) = م
س ← ٢+

أ) {-٢، ٠، ٢} ب) {٠، ٢}
ج) {-٢، ٠، ٢} د) {}

الشكل المجاور يمثل هـ(س) المعرف على ح



اجب عما يلي:

أ) نهـا هـ(س)
س ← ٢+

ب) نهـا هـ(س+١)
س ← ١

ج) نهـا هـ(٣-س)
س ← ١+

د) نهـا هـ(٣س-١)
س ← ١+

هـ) نهـا هـ(٢/س)
س ← -١

الحل: أ) نهـا هـ(س) = ٦ بالنظر
س ← ٢+

ب) يلزم الإستبدال حيث نفرض

ص = س+١
س ← ١
ص ← ٢
⇐ نهـا هـ(ص) ← ٦
ص ← ٣

∴ نهـا هـ(ص) غير موجودة
ص ← ٢

ج) يلزم الإستبدال

ص = ٣س-١
س ← ١+
ص ← ٢+
⇐ نهـا هـ(ص) = ٦
ص ← ٢+

د) يلزم الإستبدال بجذر (خطير)

ص = ٣-س
س ← ١+
ص ← ٢-
⇐ نهـا هـ(ص) = ٣
ص ← ٢-

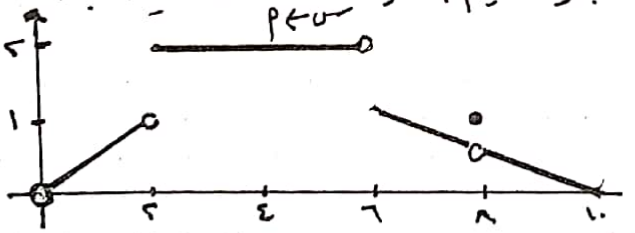
هـ) يلزم الإستبدال بجذر (خطير)

ص = ٢/س
س ← -١
ص ← ٢+
⇐ نهـا هـ(ص) = ٦
ص ← ٢+

امتحان قصير في الدرس الأول
(مفهوم النهاية بالرسم)

① اعتمد الشكل المجاور الذي يمثل هـ(س) في الفترة (٠، ١٠]

ما مجموعة قيم م حيث نهـا هـ(س) غير موجودة
س ← م



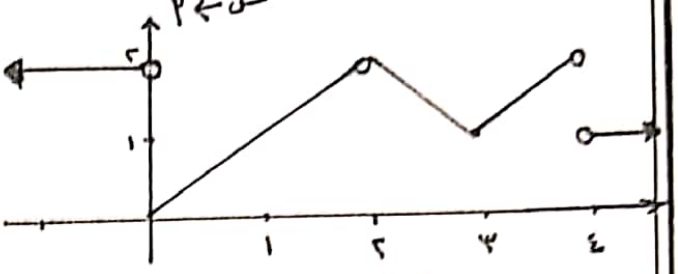
أ) {٢، ٦} ب) {٢، ٦، ٨، ١٠}
ج) {٢، ٦، ١٠} د) {٠، ١، ٦، ١٠}

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

② اعتمد الشكل المجاور الذي يمثل $f(س)$

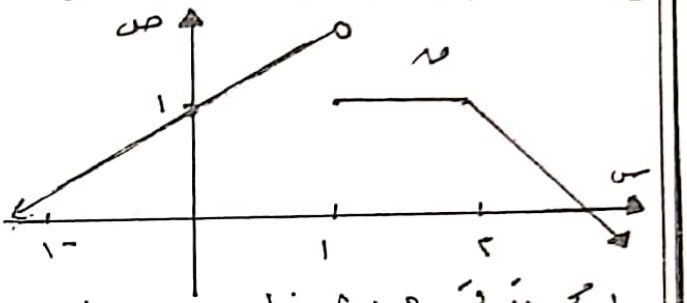
ما مجموعة قيم p حيث $\lim_{س \to p} f(س) = ٢$



(أ) $(-\infty, ٠) \cup \{٢\} \cup (٠, \infty-)$ (ب) $(-\infty, ٠) \cup \{٢، ٤\} \cup (٠, \infty-)$

(ج) $(-\infty, ٠) \cup \{٢\}$ (د) $(-\infty, ٠) \cup [٠, \infty-) \cup \{٢\}$

③ الشكل يمثل $f(س)$ المعرف على $ح$



ما مجموعة قيم p حيث $\lim_{س \to p} f(س) = ١$

(أ) $(١، ٢]$ (ب) $[٢، ١] \cup \{٠\}$

(ج) $[٢، ١) \cup \{٠\}$ (د) $(١، ٢] \cup \{٠\}$

حساب النهاية من الجدول

الجدول التالي يبين سلوك اقتران $f(س)$ حول العدد ٢

س	٢,١	٢,٠١	٢	١,٩٩	١,٩
$f(س)$	٤,١	٤,٠١	٥	٦,٩٩	٦,٩

نلاحظ أنّ:

$\lim_{س \to ٢^+} f(س) = ٤$

$\lim_{س \to ٢^-} f(س) = ٧$

$\lim_{س \to ٢} f(س)$ غير موجودة

انتبه!!! أنّ $f(٢) = ٥$ لا علاقة لها

سؤال (اختبار)

الجدول التالي يبين سلوك $f(س)$ حول العدد ٣

س	٢,٩	٢,٩٨	٢,٩٩	٣	٣,٠١	٣,٠١	٣,١
$f(س)$	٥,٩	٥,٩٨	٥,٩٩	٥	٤,٠١	٤,١	٤,٢

فإن $\lim_{س \to ٣^+} f(س)$

(أ) ٥ (ب) ٦ (ج) ٤ (د) غ.م

إيجاد النهاية بالتعويض المباشر

يتم حساب النهاية بالتعويض المباشر حيث تقبل كل الإجابات ما عدا $\frac{\text{عدد}}{٠}$ وتوابعها ($٠ \times \frac{\text{عدد}}{٠}$ أو $\frac{\text{عدد}}{٠} - \frac{\text{عدد}}{٠}$)

عند ذلك نبدأ المعركة كي نخصر المقام

يتم التعويض داخل النهاية فإذا كان الناتج عدد حقيقي فإنّ النهاية موجودة.

وإذا كان الناتج عدد غير حقيقي ($\frac{٤}{٠}$، $\frac{٠}{٠}$) فإنّ النهاية غير موجودة

امثلة حدد كل من النهايات التالية:

① $\lim_{س \to ٢} (س^٣ + ٥س - ١) = ٨ + ١٠ - ١ = ١٧$

② $\lim_{س \to ١} \frac{س + ١}{س^٢ + ٣س} = \frac{٢}{٤} = \frac{١}{٢}$

③ $\lim_{س \to ٨} (\sqrt[٣]{س} - \sqrt{س + ١}) = ٢ - ٣ = -١$

④ $\lim_{س \to ٠} \sqrt{س - ١} = \sqrt{-١} \notin ح$ غير موجودة

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{٣} = \frac{٠}{٣} = ٠$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

⑥ $\lim_{س \to 2} (3+س)^{س} = 5^{2} = 25$

⑦ $\lim_{س \to 2} \frac{س-2}{س^{2}+4} = \frac{0}{8} = 0$

⑧ $\lim_{س \to 2} \frac{س+2}{س^{2}-4} = \frac{4}{0}$ غير موجودة

⑨ $\lim_{س \to -2} (\frac{3}{4})^{س} = (\frac{3}{4})^{-2} = (\frac{4}{3})^{2} = \frac{16}{9}$

⑩ $\lim_{س \to 2} (\frac{س^{3}-2}{س+1} - س^{2}+1) = \frac{6}{3} - 4 + 1 = -1$

⑪ $\lim_{س \to 1} \sqrt[3]{4س-5} = \sqrt[3]{-1} = -1$

⑫ $ق(س) = س^{3}$ جد $\lim_{س \to 1} \frac{ق(س) - ق(3)}{س-3}$

$= \frac{ق(1) - ق(3)}{1-3} = \frac{-1-27}{-2} = 13$

مراجعة التحليل (إعادة الأقواس)

① إخراج عامل مشترك:

$3س-4$ ، $س^{3}+س^{2}$ ، $3س-س^{2}$

$2(س-2)$ | $س^{2}(س+1)$ | $س(3-س)$

هناك مشترك غريب (من لا شيء)

$2س-3 \Leftarrow 2(س-\frac{3}{2})$

$جا س + جتا س \Leftarrow جا س (1 + \frac{جتا س}{جا س})$

$جا س (1 + ظتا س)$

② فرق بين مربعين:

* $س^{2}-ص^{2} = (س-ص)(س+ص)$
* $9-س^{2} = (3-س)(3+س)$
* $(س+1)^{2}-9 = (س+1-3)(س+1+3)$
$= (س-2)(س+4)$
* $9-(س+1)^{2} = (3-(س+1))(3+(س+1))$
$(2-س)(س+4)$
* $س-1 = (\sqrt{س}-1)(\sqrt{س}+1)$
* $س^{4}-16 = (س^{2}-4)(س^{2}+4)$
$= (س-2)(س+2)(س^{2}+4)$
* $هـ^{2س}-1 = (هـ^{س}-1)(هـ^{س}+1)$ أو استدلال
* $9^{س}-1 = 3^{2س}-1 = (3^{س}-1)(3^{س}+1)$

③ فرق بين مكعبين ومجموع مكعبين

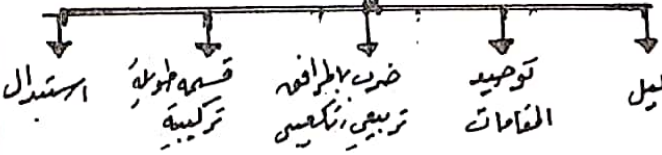
$س^{3} \mp ص^{3} = (س \mp ص)(س^{2} \pm ص س + ص^{2})$

خلاصة:

يتم حساب النهاية بالتعويض المباشر حيث تقبل كل الإجابات ما عدا $(\frac{\text{عدد}}{0})$ وترابعها $(0 \times \frac{\text{عدد}}{\text{عدد}}$ أو عدد $-$ عدد$)$

عند ذلك نبدأ المعركة في تحضير المقام

أسلحة المعركة



انتبه الذي سوف يختصر (المقدار) يكون من ذيل النهاية على الأغلب

$س \to 3$ (سوف تختصر $س-3$ أو $3-س$)

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$س^3 - ٦٤ = (س - ٤)(س^2 + ٤س + ١٦)$

$٨س^3 + ١ = (٢س + ١)(٤س^2 - ٢س + ١)$

$٢س^4 + ١٦س = ٢س(س^3 + ٨)$

$= ٢س(س + ٢)(س^2 - ٢س + ٤)$

$(س + ١)^2 - ٢٧ = [(س+١) - ٣][(س+١)^2 + ٣(س+١) + ٩]$

$٨س - ١ = (٢س - ١)(٤س^2 + ٢س + ١)$

٤ العبارة التربيعية $أ س^2 + ب س + ح$

$س^2 - ٤س + ٣ = (س - ٣)(س - ١)$

$س^2 - ٣س - ٤ = (س - ٤)(س + ١)$

$-س^2 + ٥س + ٦ = (-س + ٦)(س + ١)$

$٣س^2 - ٢س - ٥ = (٣س - ٥)(س + ١)$

$٣س^2 + ١٤س - ٥ = (٣س - ١)(س + ٥)$

$س^2 - س + ٢ =$ لا تحلل

لأن المميز السالب $ب^2 - ٤أ ح = ١ - ٤ \times ١ \times ٢ = -٧$

$٤س^4 - ٢ \times ٢س^2 + ٢ = (٢س^2 - ٢)(٢س^2 - ١)$

أو إستبدال $ص = ٢س^2$

$ص^2 - ٣ص + ٢ = (ص - ٢)(ص - ١)$

$= (٢س^2 - ٢)(٢س^2 - ١)$

$س^2 + (٣ - ح)س - ٣ح$

حل أول $(س + ٣)(س - ح)$

حل ثاني $س^2 + ٣س - ح س - ٣ح$ (مشترك)

$س(س + ٣) - ح(س + ٢)$ (مشترك قوس)

$(س + ٣)(س - ح)$

٥ القسمة التركيبية للقوى الكبرى

$س^3 - ٦س - ٦$ تجريب (قسمة تركيبية)

لـ $س = ١$ ✗

$س = ٢$ ✓

	$س^3$	$س^2$	$س$	$س^0$
②	١	٠	-٦	
		٢	٤	٦
صفر	١	٢	٣	

$س^2 + ٢س + ٣$

$(س - ٢)(س^2 + ٢س + ٣)$

لا يتحلل $(س+١)(س+٣)$ ✗

$* \quad س^3 - ١٠س^2 - ٨$ تجر (قسمة تركيبية)

لـ $س = ١$ ✗

$س = ٢$ ✓

$س = -١$ ✗ $\quad س = -٢$ ✓

	$س^3$	$س^2$	$س$	$س^0$
③	١	-١٠		-٨
		-٢	٦	٨
	١	-٣	-٤	٠

$(س + ٢)(س^2 - ٣س - ٤)$

$(س + ٢)(س - ٤)(س + ١)$

أسئلة المعارك

① $\lim_{س \to ١} \frac{س^3 - س}{س^4 - ١} = \frac{٠}{٠}$ لا تنس التعويض أولاً

$\lim_{س \to ١} \frac{س(س-١)}{(س-١)(س+١)} = \frac{١}{٢}$

② $\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٢س - ١}{س - \frac{١}{٢}} = \frac{٠}{٠}$ له أكثر من حل

حل أول: مشترك من البسط (من لا شيء)

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٢(س - \frac{١}{٢})}{(س - \frac{١}{٢})} = ٢$

حل ثاني ضرب البسط والمقام بـ ٢ للتخلص من $\frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to \frac{١}{٢}} \frac{٤س - ٢}{٢س^2 - ١}$

فكر بحل ثالث

③ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^3 - ٨}{س^4 - ١٦} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^2 + ٢س + ٤)}{(س-٢)(س+٢)(س^2+٤)} = \frac{١٢}{٣٢} = \frac{٣}{٨}$

Omar Aljabr عمر الجبر www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

٤) $\lim_{س \to ٢} \frac{٨ - س^٣}{٢ + س - س^٢} = \frac{٠}{٠}$

حل أول نتخلص من السالب (العاملان)

$\lim_{س \to ٢} \frac{س^٣ - ٨}{س^٢ - س - ٢}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-٢)(س+١)} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

حل ثاني: نحلل فورًا

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(٤ + ٢س + س^٢)}{(٢ - س)(٣ - س)} = \frac{-١٢}{-٣} = ٤$

السرعة العالمية

٥) $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)^٣}{س^٣ - ١} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س-١)^٢}{(س-١)(س^٢ + س + ١)} = \frac{٠}{٣} = ٠$

٦) $\lim_{س \to ٢} \frac{٩ - (س+١)^٢}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٣ - (س+١))(٣ + (س+١))}{س - ٢}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٢ - س)(س+٤)}{(س-٢)} = -٦$

تمرين محلول $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ١}{(س-١)^٢} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)}{(س-١)(س-١)} = \frac{٢}{٠}$ غير موجودة

تمرين محلول $\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٢)^٣ + (س-٢)^٣}{س^٢ - ٤س} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{(س+٢+س-٢)[(س+٢)^٢ - (س+٢)(س-٢) + (س-٢)^٢]}{س(س-٤)}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س[(س+٢)^٢ - (س+٢)(س-٢) + (س-٢)^٢]}{س(س-٤)}$

$= \frac{٢ \times (٤ + ٤ + ٤)}{-٤} = \frac{٢٤}{-٤} = -٦$

٩) $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١} = \frac{٠}{٠}$

حل أول: $\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٣ + س^٢ - س - ١)}{(س-١)(س^٢ + س + ١)}$

	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س$	ثابت
	١	٠	-٢	٠	١
①	١	١	-١	-١	-١
	١	١	-١	-١	٠

$= \frac{\text{صفر}}{٣} = ٠$

حل ثاني: حلل البسط كمعادلة تربيعية

$\lim_{س \to ١} \frac{(س^٢ - ١)(س^٢ - ١)}{(س-١)(س^٢ + س + ١)}$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س+١)(س^٢ - ١)}{(س-١)(س^٢ + س + ١)} = \frac{٠}{٣} = ٠$

امتحان قصير ٥

① $\lim_{س \to ٠} \frac{(س^٢ - ٢س)}{س^٥}$

أ) ٠ ب) -١٠ ج) ٣٢ د) -٣٢

② $\lim_{س \to ٢} \frac{(٢س+١)^٣ - ١٢٥}{س - ٢}$

أ) ١٠٠ ب) ٧٥ ج) صفر د) ٩٦

③ $\lim_{س \to ١} \frac{٣س^٤ - ٥س + ٢}{٢س^٢ - ٣س + ١}$

أ) صفر ب) ١ ج) -١ د) غير موجودة

④ $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٣س^٣ + ٢}{س^٣ - ١}$

أ) $-\frac{٥}{٣}$ ب) صفر ج) $\frac{٥}{٣}$ د) -٥

⑤ $\lim_{س \to ١} \frac{(س^٣ - ١)^{٢٧}}{(س^٤ - ٢س + ١)^{٧}} = ٨١$

قيمة الثابت ٧ هي

أ) ٣ ب) ٢ ج) ٤ د) ٢٧

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

أسئلة الأسي

① $\lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س} - هـ^{-س}}{هـ^{س} - 1} = \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{هـ^{س}(هـ^{س} - 1)}{(هـ^{س} - 1)} = هـ^{0} = 1$

حل آخر: استبدال حيث نفرض

$ص = هـ^{س}$ ⇐ $س \to 0 \Rightarrow ص \to 1$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص^{2} - ص}{ص - 1} = \frac{\div}{\div}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص(ص-1)}{(ص-1)} = \boxed{1}$

② $\lim_{س \to 0} \frac{49^{س} - 7^{س}}{س} = \frac{\div}{\div}$

انتبه $49^{س} = 7^{2س} = (7^{س})^{2}$ الاستبدال أفضل

$ص = 7^{س}$ ⇐ $س \to 0 \Rightarrow ص \to 1$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص^{2} - ص}{ص - 1}$

$= \lim_{ص \to 1} \frac{ص(ص-1)}{(ص-1)} = \boxed{1}$

③ $\lim_{س \to 1} \frac{9^{س} - 5 \times 3^{س} + 6}{3^{س} - 3} = \frac{\div}{\div}$

الحل: نفرض $ص = 3^{س}$ انتبه $9^{س} = (3^{س})^{2}$

$س \to 1$ ، $ص \to 3$

$= \lim_{ص \to 3} \frac{ص^{2} - 5ص + 6}{ص - 3} = \frac{\div}{\div}$

$= \lim_{ص \to 3} \frac{(ص-3)(ص-2)}{(ص-2)} = 1$

④ $\lim_{س \to 1} \frac{5^{2س+1} - 125}{5^{2س} - 25} = \frac{\div}{\div}$

الحل: انتبه $5^{2س+1} = 5^{2س} \times 5^{1} = (5^{س})^{2} \times 5$

$ص = 5^{س}$ ⇐ $س \to 1 \Rightarrow ص \to 5$

$= \lim_{ص \to 5} \frac{ص^{2} \times 5 - 125}{ص^{2} - 25}$

$= \lim_{ص \to 5} \frac{5(ص^{2} - 25)}{(ص^{2} - 25)} = 5$

امتحان قصير

① $\lim_{س \to 1} \frac{5^{2س+1} - 4^{س-1}}{5^{س} - 5}$

ا) ٥٠ ب) −٥٠ ج) $\frac{1}{50}$ د) صفر

② $\lim_{س \to 1} \frac{8^{س} - 8}{4^{س} - 4}$

ا) $\frac{1}{3}$ ب) ١ ج) ٣ د) $\frac{7}{3}$

توحيد المقامات

مراجعة:

* $\frac{5}{س} - \frac{7}{س+1} = \frac{5(س+1) - 7س}{س(س+1)} = \frac{5 - 2س}{س(س+1)}$

* $\frac{5}{س+1} - \frac{1}{س^{2}+س}$

نكتيك ← $س(س+1)$

$= \frac{5 \times س}{(س+1)س} - \frac{1}{س^{2}+س} = \frac{5س - 1}{س^{2}+س}$

* $\frac{س}{9 - س^{2}} + \frac{3}{س^{2} - 9} =$

$\frac{-س}{س^{2} - 9} + \frac{3}{س^{2} - 9} = \frac{-س + 3}{س^{2} - 9}$

* $\frac{س}{9 - س^{2}} + \frac{3س}{س^{2} - 9س}$

$س(س^{2} - 9)$ ←

$\frac{س}{9 - س^{2}} + \frac{3س}{(س^{2} - 9)س}$

$\frac{-س}{س^{2} - 9} + \frac{3}{س^{2} - 9} = \frac{-س + 3}{س^{2} - 9}$

قصة الكسور الثلاثية أو الرباعية (الأبراج)

$\frac{5}{4} = \frac{5}{4} = \frac{5}{14}$

$\frac{5}{7} = \frac{5 \times 7}{2} = \frac{35}{2}$

يفضل تحويل البرج الثلاثي إلى رباعي

أمثلة

① $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{1}{س+2} - \frac{1}{2}}{س} = \frac{\div}{\div}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 - (س+2)}{2(س+2)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{}{س}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجابر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

$\lim_{س \to 0} \frac{ب - س - س^2}{س(2 + س)(4 + س)} = \frac{1}{4}$ ... (1)

(2) $\lim_{س \to 5} \frac{1}{س - 5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{س - 2} \right)$

الحل: التعويض $\frac{1}{0}$ × صفر نوحد المقامات

$\lim_{س \to 5} \frac{1}{س - 5} \left(\frac{3 - (س - 2)}{3(س - 6)} \right)$ احذر العالب

$\lim_{س \to 5} \frac{1}{س - 5} \times \frac{5 - س}{3(س - 6)} = \frac{-1}{9}$ ... (1)

(3) تمرين محلول

$\lim_{س \to 2} \left(\frac{1}{س} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{1}{س^2 - 4} \right)$ توحيد

$\lim_{س \to 2} \left(\frac{2 - س}{2س} \times \frac{1}{(2 - س)(2 + س)} \right)$ ... (1)

$\frac{-1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{-1}{16}$

(4) $\lim_{س \to 2} \frac{\frac{1}{س + 3} - \frac{1}{5}}{\frac{1}{س^2} - \frac{1}{4}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to 2} \frac{\frac{5 - (س + 3)}{5(س + 3)}}{\frac{4 - س^2}{4س^2}}$

$\lim_{س \to 2} \frac{5 - س - 3}{5(س + 3)} \times \frac{4س^2}{(2 - س)(2 + س)}$

$= \frac{16}{4 \times 5} = \frac{4}{5}$

(5) تمرين محلول

$\lim_{س \to 4} \frac{\frac{1}{س} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{8} - \frac{1}{س + 4}} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to 4} \frac{\frac{4 - س}{4س}}{\frac{س + 4 - 8}{8(س + 4)}}$

$\lim_{س \to 4} \frac{4 - س}{4س} \times \frac{8(س + 4)}{س - 4} = \frac{-1(8)}{16} = -4$ ... (1)

(6) $\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1}{(1 + س)^2} - 1 \right)$ توحيد المقامات

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1 - (1 + س)^2}{(1 + س)^2} \right)$ ←

$1 - (1 + س)^2$
$1 - (1 + 2س + س^2)$
$1 - 1 - 2س - س^2$
$-س^2 - 2س$

$\lim_{س \to 0} \frac{-س^2 - 2س}{س(1 + س)^2}$

$\lim_{س \to 0} \frac{-س(س + 2)}{س(1 + س)^2} = \frac{-2}{1} = -2$

(7) تمرين محلول

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{1}{(2 + س)^3} - \frac{1}{8} \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{8 - (2 + س)^3}{8(2 + س)^3} \right)$ ← صعب فاكها نزيل بتجميعها فرق بين تكعيبين

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{(2 - (2 + س))(4 + 2(2 + س) + (2 + س)^2)}{8(2 + س)^3} \right)$

$\lim_{س \to 0} \frac{1}{س} \left(\frac{-س(4 + 2(2 + س) + (2 + س)^2)}{8(2 + س)^3} \right)$

$= \frac{-1(4 + 4 + 4)}{8 \times 8} = \frac{-12}{64} = \frac{-3}{16}$

(8) $\lim_{س \to 2} \left(\frac{4}{س^2 - 4} - \frac{1}{س - 2} \right)$

$\lim_{س \to 2} \left(\frac{4}{(س - 2)(س + 2)} - \frac{(س + 2)}{(س - 2)(س + 2)} \right)$

$\lim_{س \to 2} \frac{4 - س - 2}{(س - 2)(س + 2)}$

$\lim_{س \to 2} \frac{2 - س}{(س - 2)(س + 2)} = \frac{-1}{4}$ ... (1)

(9) $\lim_{س \to 3} \left(\frac{س}{س^2 - 9} + \frac{3س}{س^3 - 9س} \right)$

الحل $\lim_{س \to 3} \left(\frac{س}{س^2 - 9} + \frac{3س}{س(س^2 - 9)} \right)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

$$\text{نها}_{س\to 3}\left(\frac{س}{9-س^2}+\frac{-3}{9-س^2}\right)$$

$$\text{نها}_{س\to 3}\frac{س-3}{9-س^2}$$

$$\text{نها}_{س\to 3}\frac{-1}{(3+س)(-س)}=\frac{-1}{6}$$

امتحان قصير

① $\text{نها}_{س\to 0}\left(\frac{1}{2-س}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{س^2-25}\right)$

أ) صفر ب) $\frac{1}{90}$ ج) $-\frac{1}{90}$ د) $\frac{-1}{25}$

② $\text{نها}_{س\to 2}\left(\frac{س^2+12}{س^2-4}-\frac{س+2}{س-2}\right)$

أ) -1 ب) 1 ج) صفر د) غير موجودة

③ $\text{نها}_{س\to 1}\frac{س^4-1}{1-(3س-2)^2}$

أ) $\frac{3}{4}$ ب) $\frac{4}{3}$ ج) صفر د) غير موجودة

④ $\text{نها}_{س\to 0}\frac{3^{-س}-3^{س}}{3^{س}-1}$

أ) -1 ب) -2 ج) $\frac{-1}{2}$ د) 2

المرافق التربيعي

المقدار	مرافقه التربيعي	ضربهما
$س-3$	$س+3$	$س^2-9$
$\sqrt{س}-3$	$\sqrt{س}+3$	$س-9$
$س-\sqrt{س+3}$	$س+\sqrt{س+3}$	$س^2-(س+3)$ $س^2-س-3$
$س+\sqrt{س+3}-3$ نجهزها		
$(س-3)+\sqrt{س+3}$	$(س-3)-\sqrt{س+3}$	$(س-3)^2-(س+3)$ $س^2-7س+6$

امثلة

① $\text{نها}_{س\to 1}\frac{\sqrt{س+3}-2}{س-1}=\frac{0}{0}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{\sqrt{س+3}-2}{س-1}\times\frac{\sqrt{س+3}+2}{\sqrt{س+3}+2}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{س+3-4}{(س-1)(\sqrt{س+3}+2)}\times\frac{1}{4}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{(س-1)}{(س-1)(\sqrt{س+3}+2)}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

② $\text{نها}_{س\to -3}\frac{س+\sqrt{6-س}}{س+3}=\frac{0}{0}$

$\text{نها}_{س\to -3}\frac{س+\sqrt{6-س}}{س+3}\times\frac{س-\sqrt{6-س}}{س-\sqrt{6-س}}$

$\text{نها}_{س\to -3}\frac{س^2-(6-س)}{(س+3)(س-\sqrt{6-س})}\times\frac{1}{6}$

$\text{نها}_{س\to -3}\frac{س^2+س-6}{(س+3)}\times\frac{1}{6}$

$\text{نها}_{س\to -3}\frac{(س+3)(س-2)}{(س+3)}\times\frac{1}{6}$

$-5\times\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

③ $\text{نها}_{س\to 1}\frac{س-4\sqrt{س}+3}{س^2-1}=\frac{0}{0}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{(س+3)-4\sqrt{س}}{(س+1)(س-1)}\times\frac{(س+3)+4\sqrt{س}}{(س+3)+4\sqrt{س}}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{(س+3)^2-16س}{(س+1)(س-1)}\times\frac{1}{8}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{س^2-10س+9}{(س+1)(س-1)}\times\frac{1}{8}$

$\text{نها}_{س\to 1}\frac{(س-1)(س-9)}{(س+1)(س-1)}\times\frac{1}{8}=\frac{-8}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{-1}{2}$

يوجد حل آخر : فكر به

واجب نها $\frac{6-س-\sqrt{س+1}}{9-3س}$ جد $س\to 2$ الجواب $\frac{11}{12}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

المرافق التكعيبي

المقدار	مرافقه التكعيبي	ضربهما
$س - ٣$	$س^{٢} + ٣س + ٩$	$س^{٣} - ٢٧$
$\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢$	$(\sqrt[٣]{س})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + ٤$	$س + ٨$

(المربع الأول) + (المربع الثاني) + (المستطيل)

أمثلة

١ $\lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{\sqrt[٣]{س + ٥} - ٢}{س - ٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{س + ٥})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س + ٥} + ٤}{(\sqrt[٣]{س + ٥})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س + ٥} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س + ٥ - ٨}{س - ٣} \times \frac{١}{٤ \times ٤ \times ٤}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{س - ٣}{س - ٣} \times \frac{١}{١٢} = \frac{١}{١٢}$

٢ $\lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{\sqrt[٣]{س + ٦} - ٢} \times \frac{(\sqrt[٣]{س + ٦})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س + ٦} + ٤}{(\sqrt[٣]{س + ٦})^{٢} + ٢\sqrt[٣]{س + ٦} + ٤}$

$= \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٣} - ٣س - ٢}{س + ٦ - ٨} \times \frac{٤ + ٤ + ٤}{١}$ ← قسمة تركيبية

$= \lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ١)}{س - ٢} \times ١٢$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	$س$	٠
٢	١	٠	-٣	-٢
		٢	٤	٢
	١	٢	١	٠

$= ٩ \times ١٢$

$= ١٠٨$

٣ $\lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{-س} - ٣}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢} = \frac{٠}{٠}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{\sqrt[٣]{-س} - ٣}{\sqrt[٣]{س^{٢}} + ٢} \times \frac{\sqrt[٣]{-س} + ٣}{\sqrt[٣]{-س} + ٣} \times \frac{(\sqrt[٣]{س})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}{(\sqrt[٣]{س})^{٢} - ٢\sqrt[٣]{س} + ٤}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{-س - ٩}{س + ٨} \times \frac{٤ + ٤ + ٤}{٣ + ٣}$

$= \lim_{س \to -٨} \frac{-(س + ٨)}{س + ٨} \times \frac{١٢}{٦} = -٢$ ← (١)

تمرين محلول

$\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢} \left(\frac{١}{\sqrt[٣]{س + ٣}} - \frac{١}{٢} \right)$

$\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢} \left(\frac{٢ - \sqrt[٣]{س + ٦}}{\sqrt[٣]{س + ٦} \times ٢} \right) \times \left(\frac{٢ + \sqrt[٣]{س + ٦} + ٤}{٢ + \sqrt[٣]{س + ٦} + ٤} \right)$

$\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢} \left(\frac{-(س - ٢)}{٢\sqrt[٣]{س + ٦} \times ٢} \right) \times \left(\frac{١}{٤} \right)$

$\lim_{س \to ٢} \frac{١}{س - ٢} \left(\frac{-(س - ٢)}{٢\sqrt[٣]{س + ٦} \times ٢} \right) \times \left(\frac{١}{٤} \right)$ ← (١)

$= -\frac{١}{٤} \times \frac{١}{٤} = \frac{-١}{١٦}$ حل آخر استبدال

اختبار قصير

١ $\lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢} - ٨\sqrt{س}}{٤ - س}$

ب) $\frac{١}{٦}$ ج) -٦ د) $\frac{-١}{٦}$ أ) ٦

٢ $\lim_{س \to ٣} \frac{\frac{١}{س + ٥} - \frac{١}{٨}}{\sqrt{س + ١} - ٢}$

ب) $\frac{١}{١٦}$ ج) -١ د) -١٦ أ) $-\frac{١}{١٦}$

٣ $\lim_{س \to -٢} \frac{س^{٢} - ٤}{٢ + \sqrt[٣]{س - ٦}}$

ب) -٨٤ ج) ٨٤ د) -٤٢ أ) ٤٢

٤ $\lim_{س \to ١} \frac{(س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - ٢}{س - ١}$ تساوي:

ب) $\frac{-١}{٤}$ ج) $\frac{١}{٤}$ د) -١ أ) ١

حساب النهاية للجذر الزوجي (الصفري)

١ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{س + ٤} = \sqrt{٩} = ٣$

٢ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{٤ - س} =$ غير موجودة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر
Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

② $\lim_{س \to ١} \sqrt{س^{٤} + ١٥} = \sqrt{١٦} = ٢$

③ $\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤} = \sqrt{٠}$ STOP يلزم المجال على الخط

معرف	غير معرف	
ـ ـ	٤	+ +

$\lim_{س \to ٤^{+}} \sqrt{س - ٤} = ٠$ ، $\lim_{س \to ٤^{-}} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

خلاصة: إذا ظهر $\sqrt{٠}$ عند حساب النهاية يلزم المجال على خط الأعداد

وتكون النهاية غير موجودة على الأغلب إذا لم يحدد جهة

$\lim_{س \to ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة

⑤ $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٩} = \sqrt{٠}$ STOP

+ +	٣	ـ ـ	٣-	+ +

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٩}$ غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to ١} \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}} = \sqrt{٠}$ STOP

نحدد أصفار البسط والمقام على الخط

+ +	١	ـ ـ	١-	+ +

$\lim_{س \to ١} \sqrt{\frac{س - ١}{س + ١}}$ غير موجودة

⑦ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}} = \sqrt{٠}$ كحل عادي

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥}} = \sqrt{١٠}$

توضيح

+ + +	٥	+ + +	٥-	- - -

⑧ $\lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}} = \sqrt{٠}$ STOP

نوحد بس إشارة كل جذر لوحده .

+ +	٥	ـ ـ	٥-	+ +

ـ ـ ـ	٥	+ +

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}} = \lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{(س - ٥)(س + ٥)}{س - ٥}} = \sqrt{١٠}$

$\lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}}$ غير موجودة

$\because \lim_{س \to ٥} \sqrt{\frac{س^{٢} - ٢٥}{س - ٥}}$ غير موجودة

⑨ $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} = \sqrt{٠}$ STOP

$س^{٢} - ٦س + ٩ = ٠$

$(س - ٣)(س - ٣) = ٠$

$س = ٣$

+ + +	٣	+ + +

$\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^{٢} - ٦س + ٩} = \sqrt{٠} =$ صفر

لزوجًا سوف يكون مطلقًا

امتحان قصير

① $\lim_{س \to ٥} \frac{\sqrt{س - ٥} - ٣}{س^{٢} + ٢}$ =

أ) $-\frac{١}{٩}$ ب) صفر ج) $\frac{-١}{٤}$ د) غير موجودة

② $\lim_{س \to ٨^{+}} \frac{س - ٨}{\sqrt{س^{٢} - ٦٤}}$ =

أ) $\frac{١}{٤}$ ب) $\frac{١}{١٦}$ ج) صفر د) غير موجودة

③ $\lim_{س \to ٠} \frac{٥ س^{٤} + س^{٣}}{س^{٢}}$

أ) صفر ب) $\sqrt{١٠}$ ج) $\sqrt{٥}$ د) غير موجودة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نظريات في النهايات

يجوز توزيع النهاية على القسمة والجمع والطرح والضرب بشرط أن تكون موجودة

أمثلة:

① إذا كان $\lim_{س \to 1} و(س) = 5$ ، $هـ(1) = 3$

$\lim_{س \to 1} ق(س) = 6$ ، $\lim_{س \to 1} \frac{هـ(س)}{ق(س)} = -2$

أوجد:

① $\lim_{س \to 1} (و^2(س) - \frac{هـ(س)}{2} - 11)$

② $\lim_{س \to 1} (\frac{\sqrt{و(س) + س}}{س^2 + 1} - \frac{1}{هـ(س)})$

الحل: تجهيز المعطيات:

$\lim_{س \to 1} \frac{2و(س)}{2} = \frac{6}{2} \Leftarrow \lim_{س \to 1} و(س) = 3$

$\lim_{س \to 1} \frac{هـ(س)}{2} \times 2 = -2 \times 2 \Leftarrow \lim_{س \to 1} هـ(س) = -4$

① $(\lim_{س \to 1} و(س))^2 - \frac{\lim_{س \to 1} هـ(س)}{2} - 11$

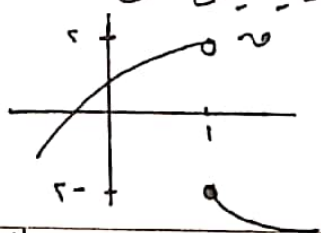
$= 9 - \frac{-4}{2} - 11 = 9 + 2 - 11 = 0$

② $\frac{\sqrt{\lim_{س \to 1} و(س) + \lim_{س \to 1} س}}{\lim_{س \to 1} (س^2 + 1)} - \frac{1}{\lim_{س \to 1} هـ(س)}$

$= \frac{\sqrt{3+1}}{2} - \frac{1}{-4}$

$= 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

③ معتمدًا الشكل الذي يمثل منحنى و



فأوجد

$\lim_{س \to -1} (و^3(س) - 3س)$

الحل: تجهيز المعطيات:

$\lim_{س \to -1} و(س) = 2$ (من الرسم)

$(\lim_{س \to -1} و(س))^3 - \lim_{س \to -1} 3س = 2^3 - 3 = 8 - 3 = 5$

④ إذا كان و(س) كثير حدود وباقي قسمته على (س + 1) يساوي 3 وكانت

$\lim_{س \to -1} (و^2(س) + 2هـ(س) - \frac{2}{س}) = 21$

فما قيمة $\lim_{س \to -1} هـ^2(س)$

الحل: و(س) كثير حدود لذلك

$\lim_{س \to -1} و(س) = و(-1) = 3$

$(\lim_{س \to -1} و(س))^2 + 2 \times \lim_{س \to -1} هـ(س) - \lim_{س \to -1} \frac{2}{س} = 21$

$9 + 2 \lim_{س \to -1} هـ(س) + 2 = 21$

$2 \lim_{س \to -1} هـ(س) = 10$

$\lim_{س \to -1} هـ(س) = 5$

$\therefore (\lim_{س \to -1} هـ(س))^2 = 5^2 = 25$

تمرين محلول

إذا كان و كثير حدود يمر بالنقطة (2، 8) وكانت $\lim_{س \to 2} (س - ل(س)) = -10$ ، أوجد

$\lim_{س \to 2} (\sqrt{و(س)} + 3ل(س))$

الحل: تجهيز المعطيات:

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

لأن f كثير حدود

$\because$ نهـا $f(س) = f(٢) = ٨$
$س \to ٢$

نهـا $س$ − نهـا $ل(س) = -١٠$
$س \to ٢$ $\quad$ $س \to ٢$

٢ − نهـا $ل(س) = -١٠$
$\quad\quad$ $س \to ٢$

نهـا $ل(س) = ١٢$
$س \to ٢$

$\sqrt[٣]{\text{نهـا } f(س)} + ٣ \times$ نهـا $ل(س)$
$س \to ٢$ $\quad\quad$ $س \to ٢$

$\sqrt[٣]{٨} + ٣ \times ١٢ = ٢ + ٣٦ = ٣٨$

④ نهـا $\dfrac{f(س) + ٥}{س - ٢} = ٧$ فأوجد
$س \to ٢$

أ) نهـا $(ق(س) + ٤س)$
$س \to ٢$

ب) نهـا $f^{٣}(س + ١)$
$س \to ١$

④ الحل: تجهيز المعطيات

النهاية موجودة ، المقام $= ٠$

إذن نهـا البسط $= ٠$

نهـا $(f(س) + ٥) = ٠$
$س \to ٢$

نهـا $f(س) = -٥$
$س \to ٢$

$(\text{نهـا } f(س))^{٢} + \text{نهـا } ٤س$
$س \to ٢$ $\quad\quad$ $س \to ٢$

$(\text{نهـا } f(س))^{٢} + ٨$
$س \to ٢$

$(-٥)^{٢} + ٨ = ٢٥ + ٨ = ٣٣$

⑤ استبدال: $ص = س + ١$ ، $س \to ١$ ، $ص \to ٢$

نهـا $f(ص) = -٥$
$ص \to ٢$

نهـا $f^{٣}(ص) = (-٥)^{٣} = -١٢٥$
$ص \to ٢$

⑤ إذا كانت نهـا $\dfrac{f(س)}{س^{٢}} = -٢$
$س \to ٠$

فجد نهـا $\dfrac{f(س)}{س}$
$س \to ٠$

الحل:

نهـا $f(س) = ٠$
$س \to ٠$

$\because$ نهـا $\dfrac{f(س)}{س} = \dfrac{٠}{٠}$ إعادة حل
$س \to ٠$

$= $ نهـا $\dfrac{f(س)}{س} \times س$
$س \to ٠$

$= $ نهـا $\dfrac{f(س)}{س^{٢}} \times$ نهـا $س$
$س \to ٠$ $\quad\quad$ $س \to ٠$

$= -٢ \times ٠ = ٠$

⑥ إذا كانت نهـا $\dfrac{f(س) - ٦}{س - ١} = ٨$
$س \to ١$

فما قيمة نهـا $\dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{f(س) - ٦}$
$س \to ١$

الحل: نهـا $f(س) = ٦$
$س \to ١$

نهـا $\dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{f(س) - ٦} = \dfrac{٠}{٠}$ (إعادة حل)
$س \to ١$

تقسيم البسط والمقام على $(س - ١)$

$= $ نهـا $\dfrac{\frac{س^{٢} + ٢س - ٣}{س - ١}}{\frac{f(س) - ٦}{س - ١}}$
$س \to ١$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

نهـا $\frac{(س-١)(س+٣)}{(س-١)}$ = $\frac{٤}{٨}$ = $\frac{١}{٢}$
س ← ١

يوجد حل آخر

امتحان قصير

① إذا كانت نهـا (٥ هـ(س) − س^{٢} − ٤) = ١٢
س ← ٣

فإن نهـا هـ(س) =
س ← ٣

أ) ١ ب) ٥ ج) ١٥ د) ١٢٥

② إذا كان ق(س) كثير حدود ، وكانت نهـا $\frac{ق(س)}{س}$ = ٣ فإن نهـا $\frac{ق'(س)}{س}$ =
س ← ٢ س ← ٢

أ) ٩ ب) ١٨ ج) ٦ د) ٣٦

③ إذا كانت نهـا (ق(٢س+١) − ٣س) = ٠
س ← ٢

فإن نهـا ٣ ق'($\frac{١}{٣}$س + ٢) تساوي :
س ← ٩

أ) ٥ ب) ٦ ج) ٣٦ د) ١٠٨

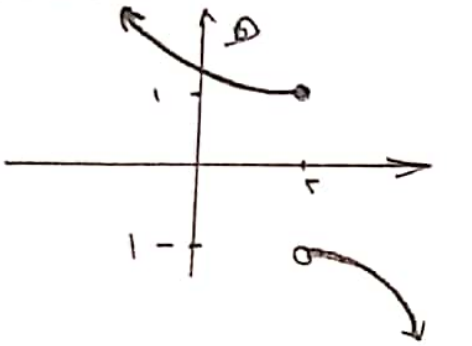
④ إذا كانت ق(س) اقتران كثير حدود

وكانت نهـا $\frac{٣ق(س)}{س}$ = ٦
س ← ٠

وكانت نهـا $\frac{(س+٢)^{٢} - ٤}{ق(س)}$ تساوي :
س ← ٠

أ) ٨ ب) $\frac{٤}{٣}$ ج) ٢ د) ٢٤

⑤ معتمداً الرسم الذي يمثل منحنيين ق ، هـ



فإن نهـا (ق(س) + هـ(س)) =
س ← ٢

أ) ٣ ب) ٢

ج) ٤ د) غير موجودة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نهاية الاقتران المتشعب

- عادي ← نعوض في القاعدة المقابلة
- تحول ← يمين / يسار
- طرف ← من جهة واحدة

أمثلة:

① $ق(س) = \begin{cases} ٥س + ١ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ س^{٢} + ٣ & ، ٢ \leq س \leq ٦ \end{cases}$

جد ما يلي:

① $\lim_{س \to ١} ق(س) = \lim_{س \to ١} (٥س + ١) = ٦$

② $\lim_{س \to ٠^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ٠^{+}} (٥س + ١) = ١$

③ $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \begin{cases} \lim_{س \to ٢^{+}} (س^{٢} + ٣) = ١١ \\ \lim_{س \to ٢^{-}} (٥س + ١) = ١١ \end{cases}$

$\therefore \lim_{س \to ٢} ق(س) = ١١$

④ $\lim_{س \to ٦} ق(س)$ غير موجودة (طرف)

---

② $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} & ، س \neq ٢ \\ ٣س & ، س = ٢ \end{cases}$

جد ما يلي:

① $\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = ٥$

② $\lim_{س \to ٢} ق(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{س^{٢} - ٤}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{(س - ٢)} = ٤$

---

③ $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س \in ص \\ س^{٢} + ٤ & ، س \notin ص \end{cases}$

حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد:

$\lim_{س \to ٣} ق(س) = \lim_{س \to ٣} (س^{٢} + ٤) = ١٣$

تمرين

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٤} - ٩}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٢س - ٣ & ، س \geq ٣ \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to ١^{+}} ق(٤ - س)$ تساوي

أ) ٣ ب) ٦ ج) ٤ د) غير موجودة

إعادة تعريف $|ا| = \sqrt{(ا)^{٢}}$ حول عدد

نعوض العدد بداخل المطلق بحيث الناتج

- $+$ ← القاعدة كما بالداخل
- $-$ ← القاعدة $\times -$ (غير إشارات)
- ٠ ← قاعدتين من دائرة إشارة

مراجعة:

أمثلة: اعد تعريف $ق(س)$ حول العدد

① $ق(س) = |س - ٣|$ ، $س = ٥$

$ق(س) = س - ٣$

② $ق(س) = |س - ٢|$ ، $س = ١$

$ق(س) = ٢ - س$

Omar Aljabr عمر الجبر www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

٣) $ق(س) = |س - ٤|$ ، $س = ٤$

$س - ٤ = ٠$ ، $س = ٤$

	$س < ٤$	$س = ٤$	$س > ٤$
$س - ٤$	$-$	٠	$+$
$٤ - س$	$+$	٠	$-$

٤) $ق(س) = |س^٢ - ٩|$ ، $س = ٣$

$س^٢ - ٩ = ٠$

$س = \pm ٣$

	$س < -٣$	-٣	$-٣ < س < ٣$	٣	$س > ٣$
$س^٢ - ٩$	$+$	٠	$-$	٠	$+$
$٩ - س^٢$	$-$	٠	$+$	٠	$-$

٥) $ق(س) = |س^٢ - س - ٢|$ ، $س = ٢$

$س^٢ - س - ٢ = ٠$

$(س - ٢)(س + ١) = ٠$

$س = ٢ ، -١$

	$س < -١$	-١	$-١ < س < ٢$	٢	$س > ٢$
$س^٢ - س - ٢$	$+$	٠	$-$	٠	$+$
$س^٢ + س + ٢$	$+$		$+$		$+$

أمثلة :

١) $\lim_{س \to ٤} |س^٢ - ٩| = \lim_{س \to ٤} (س^٢ - ٩) = ٧$

٢) $\lim_{س \to ١} (٣ - س^٢ + |س - ٤|)$

$= \lim_{س \to ١} (٣ - س^٢ + ٤ - س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٠} |٣س - س^٢| = ٠$

$٣س - س^٢ = ٠ \leftarrow س(٣ - س) = ٠$

$س = ٠ ، ٣$

	$س < ٠$	٠	$٠ < س < ٣$	٣	$س > ٣$
$س^٢ - ٣س$	$+$	٠	$-$	٠	$+$
$٣س - س^٢$	$-$	٠	$+$	٠	$-$

$\lim_{س \to ٠^+} (٣س - س^٢) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٠^-} (س^٢ - ٣س) = ٠$

∴ $\lim_{س \to ٠} |٣س - س^٢| = ٠$

٤) $\lim_{س \to ٤^+} \frac{|س - ٤|}{س - ٤} = \frac{٠}{٠}$

$س - ٤ = ٠$

$س = ٤$

	$س < ٤$	٤	$س > ٤$
$س - ٤$	$-$	٠	$+$
$٤ - س$	$+$	٠	$-$

$\lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{س - ٤} = ١$

٥) $\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}}{س - ٢}$ مربع كامل داخل الجذر

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{(س - ٢)^٢}}{س - ٢}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{|س - ٢|}{س - ٢} = \frac{٠}{٠}$

$س - ٢ = ٠$

$س = ٢$

	$س < ٢$	٢	$س > ٢$
$س - ٢$	$-$	٠	$+$
$٢ - س$	$+$	٠	$-$

$\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{س - ٢} = -١$

٦) $\lim_{س \to -٣} \frac{|٢س + ٣| - ٣}{س + ٣}$

$\lim_{س \to -٣} \frac{-٢س - ٣ - ٣}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{-٢س - ٦}{س + ٣}$

$\lim_{س \to -٣} \frac{-٢(س + ٣)}{(س + ٣)} = -٢$

تمرين محلول

$\lim_{س \to ٣} \frac{|س - ٢| - |٨ - س^٣|}{س - ٣} = \frac{٠}{٠}$

$\lim_{س \to ٣} \frac{س - ٢ - (٨ - س^٣)}{س - ٣}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

$$\lim_{س \to ٣} \frac{س^٢ + س + ٦}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \to ٣} \frac{(س - ٣)(س - ٢)}{(س - ٣)} = -٥$$

تمرين محلول

$$\lim_{س \to ٠} \frac{|س^٢ + س|}{س} = \frac{٠}{٠}$$

$س^٢ + س = ٠$

$س(س + ١) = ٠$

$س = ٠ ، -١$

	$س^٢ + س$	$س^٢$	$س$	$س^٢ + س$
	$+ +$	$- -$	$+ +$	$+ +$
		٠		
			-١	

$$\lim_{س \to ٠^+} \frac{س^٢ + س}{س} = \lim_{س \to ٠^+} \frac{س(س + ١)}{س} = ١$$

$$\lim_{س \to ٠^-} \frac{-س^٢ - س}{س} = \lim_{س \to ٠^-} \frac{-س(س + ١)}{س} = -١$$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

تمرين محلول

$$\lim_{س \to ١} \frac{|س^٢ - ٥س + ٤|}{|س - ١|}$$

$$\lim_{س \to ١} \left| \frac{س^٢ - ٥س + ٤}{س - ١} \right|$$

$$\lim_{س \to ١} \left| \frac{(س - ١)(س - ٤)}{(س - ١)} \right|$$

$$\lim_{س \to ١} |س - ٤| = \lim_{س \to ١} (٤ - س) = ٣$$

امتحان قصير

١ إذا كان كثير حدود تمر بالنقطة $(١ ، ٤)$، فجد $\lim_{س \to ١^+} \left(\frac{|س - ١١|}{س - ١} + ما قاس \right)$

نهاية أكبر عدد صحيح

إعادة تعريف $[\ ]$ حول عدد يتم شفوياً كما يلي:

١- إذا كان ناتج التعويض داخل $[\ ]$ كسر عند ذلك نصحح ذلك الكسر (نقطة عادية)

٢- ناتج التعويض عدد صحيح لدينا نقطة تحول لذلك تحتاج لليمين واليسار حيث تأخذ الناتج إذا اتفق الاتجاه مع إشارة معامل س نأخذ (الناتج -١) إذا اختلف الاتجاه مع إشارة معامل س

تذكير $[٢] = ٢$ ، $[٢,٧] = ٢$

١) $\lim_{س \to ٤} \frac{|س - ٤| - \frac{١}{٣}}{١ - س}$ تساوي:

أ) $-\frac{١}{٣}$ ب) $\frac{١}{٣}$ ج) $\frac{١}{٩}$ د) $-\frac{١}{٩}$

٢) $\lim_{س \to -٢} \frac{|٣س + ١| - ٥}{س^٣ + ٨}$ تساوي:

أ) $\frac{٣}{١٠}$ ب) $\frac{١}{٤}$ ج) غير موجودة د) $\frac{١}{١٢}$

٣) $\lim_{س \to ٣} \sqrt{س^٤ - ٦س + ٩} =$

أ) صفر ب) ٣ ج) -٣ د) غير موجودة

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

$[-٥,٤] = -٥$ ، $[٠,٣] = ٠$

$[-٠,٥] = -١$ ، $[-٣] = -٣$

امثلة : اعد تعريف $ق(س)$ حول العدد المطلوب :

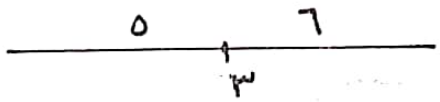
١) $ق(س) = [\frac{س}{٣} + ١]$ ، $س = ٣$

$ق(س) = ٢$

٢) $ق(س) = [-٣ - س]$ ، $س = ٣,٥$

$ق(س) = -١$

٣) $ق(س) = [\frac{س}{٣} + ٥]$ ، $س = ٣$



امثلة :

١) $\lim_{س \to ٢} [\frac{س}{٣} + ١] = \lim_{س \to ٢} ١ = ١$

٢) $\lim_{س \to ٢^+} [\frac{س}{٢} - ١] = \lim_{س \to ٢^+} ٠ = ٠$

٣) $\lim_{س \to ٣^+} [٥ - س] = \lim_{س \to ٣^+} ١ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٤} (س - ٤)[س + ٢]$

$\lim_{س \to ٤^+} (س - ٤) \times ٦ = (٤ - ٤) \times ٦ = ٠$ بدون

$\lim_{س \to ٤^-} (س - ٤) \times ٥ = (٤ - ٤) \times ٥ = ٠$ مع

$\therefore \lim_{س \to ٤} (س - ٤)[س + ٢] = ٠$

٥) $\lim_{س \to ٧} ([س + ١] - [س + ٤])$

$\lim_{س \to ٧} [س] + ٤ - ([س] + ١)$

$\lim_{س \to ٧} [س] + ٤ - [س] - ١ = ٣$

٦) $ق(س) = [س + ٥]$ ، $ه(س) = [٣ - س]$

اوجد $\lim_{س \to ٢} (ق(س) + ه(س))$

$= \lim_{س \to ٢^+} ([س + ٥] + [٣ - س])$

$\lim_{س \to ٢^+} (٧ + ٠) = ٧$ بدون مع

$\lim_{س \to ٢^-} ([س + ٥] + [٣ - س])$

$\lim_{س \to ٢^-} (٦ + ١) = ٧$ مع بدون

$\therefore \lim_{س \to ٢} (ق(س) + ه(س)) = ٧$

تمرين محلول

$$\lim_{س \to ٣^+} \frac{[س] - س}{٩ - س^٢}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{٣ - س}{٩ - س^٢}$$

$$= \lim_{س \to ٣^+} \frac{-(س - ٣)}{(س - ٣)(س + ٣)} \quad (-١)$$

$$= \frac{-١}{٦}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

٧) $\lim_{س \to 0^+} \frac{[س]}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{0}{س} = 0$

٨) $\lim_{س \to -2} \frac{[\frac{2}{3}س + 4] + س}{|س| - 2}$

$= \lim_{س \to -2} \frac{2 + س}{-س - 2} = -1$

٩) $ق(س) = \begin{cases} [س] ، س < 0 \\ |س| ، س > 0 \end{cases}$

جد $\lim_{س \to 0} ق(س)$

$\lim_{س \to 0^+} ق(س) = \lim_{س \to 0^+} |س| = \lim_{س \to 0^+} س = 0$

$\lim_{س \to 0^-} ق(س) = \lim_{س \to 0^-} [س] = \lim_{س \to 0^-} -1 = -1$

$\therefore \lim_{س \to 0} ق(س)$ غير موجودة

امتحان قصير

١) $\lim_{س \to 0} \frac{[س]}{|س|}$ تساوي:

أ) صفر ب) ١ ج) ٥ د) -5

٢) $ق(س) = \begin{cases} |س - 1| ، س \geq 3 \\ [س - 1] ، س < 3 \end{cases}$

فإن $\lim_{س \to 3} ق(س)$ تساوي

أ) ٢ ب) ٣ ج) ١ د) غير موجودة

٣) إذا كانت $\lim_{س \to 1} ق(س+1) = 7$ ، فما

قيمة $\lim_{س \to 1} (ق(3س - 1) + [\frac{س}{3} + 5])$

أ) ١٢ ب) ٧ ج) ٢٧ د) غير موجودة

٤) $\lim_{س \to 1^+} \frac{(5 - س^2) - [2س + 3]}{1 - س}$ تساوي:

أ) ١ ب) -2 ج) ٢ د) غير موجودة

٥) $\lim_{س \to 4} \frac{(|[س] - س| + [س - 4])}{س - 4}$ تساوي

أ) ١ ب) غير موجودة ج) -1 د) صفر

٦) $\lim_{س \to 4} \frac{[س + 2] - \sqrt{س + 14}}{|2 - س|}$ يساوي

أ) $\frac{1}{8}$ ب) $\frac{-1}{8}$ ج) غير موجودة د) -1

مراجعة حل المعادلات

حل المعادلة يعني ايجاد قيمة الرمز على الأغلب س

أمثلة: حل المعادلات التالية:

١) $3س + 5 = 6س - 3$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

٢س − ٦س = −٣ − ٥

−٤س = −٨

س = ٢

٢ س٢ − ٢س = ٨

أولاً نصفر الطرف الأيسر

س٢ − ٢س − ٨ = ٠

(س − ٤)(س + ٢) = ٠

س = ٤ ، س = −٢

٣ ٢س٣ = ٨س

الحل: نصفر الطرف الأيسر

٢س٣ − ٨س = ٠

٢س(س٢ − ٤) = ٠

س = ٠ ، س = ±٢

٤ س٣ − س٢ − ٤ = ٠ (تجربة، قسمة تركيبية)

(س − ٢)(س٢ + س + ٢) = ٠

س = ٢

	س٣	س٢	س
١	١	−١	−٤
٢		٢	٤
	١	١	٠

لا تتحلل

س٢ + س + ٢

٥ |س| = ٩

س = ٩ أو س = −٩

٦ [س] = ٩ تعني محصورة

٩ ≤ س < ٩ + ١

٧ |٢س − ١| = ٣

٢س − ١ = ٣ ، ٢س = ٤ ، س = ٢

−٢س + ١ = ٣ ، −٢س = ٢ ، س = −١

٨ [س + ١] = ٥

٥ ≤ س + ١ < ٦

٤ ≤ س < ٥ ⇐ س ∈ [٤، ٥)

٩ [١ − س] = ٥

٥ < ١ − س ≤ ٦

٤ < −س ≤ ٥ ⇐ −٥ ≤ س < −٤

١٠ حل المتباينة |س − ٣| < ٥

−٥ < س − ٣ < ٥

−٢ < س < ٨

* |س| < ٩ تعني

س < ٩ ، س > −٩

−٩ ، ٩

١١ |س + ١| > ٢

س + ١ > ٢ ، س > ١

س + ١ < −٢ ، س < −٣

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

تذكر خواص [س]

إذا كانت $ب \in$ ص (عدد صحيح)

فإن $[ب]^{+} = ب$ ، $[ب]^{-} = -ب - ١$

إذا كانت $ب \notin$ ص (عدد كسري)

فإن $[ب]^{+} = [ب]^{-} = [ب]$

الاتجاه غير مؤثر

أمثلة الثوابت

تتابع معادلات لعدد الثوابت حيث تحصل على المعادلة إما بصورة مباشرة أو بصورة غير مباشرة

أمثلة :

① إذا كانت $\lim_{س \to ب} (س^{٢} + ب س + ٤) = ١٢$

ما قيمة الثابت ب

الحل : $ب^{٢} + ب^{٢} + ٤ = ١٢$

$٢ب^{٢} = ٨ \leftarrow ب^{٢} = ٤$

$ب = ٢ ، -٢$

تمرين محلول

$\lim_{س \to ب} |س - ١٣| = ٥$ ما قيمة ب

$|ب - ١٣| = ٥$

$ب - ١٣ = ٥$ ، $-ب + ١٣ = ٥$

$ب = ١٨$ ، $-ب = -٨$

$ب = -٨$

② $\lim_{س \to ب} [٢س + ١] = ٤$ فما قيمة ب

الحل : $[٢ب + ١] = ٤$

$٤ > ٢ب + ١ > ٥$

$٣ > ٢ب > ٤$

$\frac{٣}{٢} > ب > ٢ \leftarrow ب \in (٢ ، \frac{٣}{٢})$

لاحظ بدون مساواة

لأن السؤال عن المساواة هو الاتجاه

③ $\lim_{س \to ب^{+}} [٢س + ١] = ٤$ ما قيمة ب

$[٢ب + ١] = ٤$

$٤ > ٢ب + ١ > ٥$

$٣ > ٢ب > ٤$

$\frac{٣}{٢} \geq ب > ٢$ الآلة ضع المساواة على اليمين

$ب \in [٢ ، \frac{٣}{٢})$

④ $\lim_{س \to ب^{-}} [٢س + ١] = ٤$ ما قيمة ب

الحل : $[٢ب + ١] = ٤$

$٤ > ٢ب + ١ > ٥$

$٣ > ٢ب > ٤$

$\frac{٣}{٢} > ب \geq ٢$ الآلة ضع المساواة على اليسار

$ب \in (\frac{٣}{٢} ، ٢]$

ملاحظة كلمة موجودة

في المتشعب

$\lim_{س \to ب} هـ(س) = \begin{cases} ل_{١} & س \geq ب \\ ل_{٢} & س < ب \end{cases}$

$\lim_{س \to ب} هـ(س) = \lim_{س \to ب^{+}} هـ(س) = \lim_{س \to ب^{-}} هـ(س)$

في النبي

يكون نائح المقوض (ب)

أي أن المقوض في البسط = صفر

والمقوض في المقام = صفر

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr www.omaraljabr.com

كلمة غير موجودة :-

أن يكون ناتج التعويض (عدد) ⇐ أي

ناتج التعويض في البسط ≠ ٠

والتعويض في المقام = صفر

٥ $\text{هـ}(س) = \begin{cases} س + ٣ب & ، س < ١ \\ س^{٤} + ٤ & ، س \geq ١ \end{cases}$

ما قيمة الثابت ب علمًا بأن $\lim_{س \to ١} \text{هـ}(س)$ موجودة

الحل: من كلمة موجودة نكون المعادلة التالية:-

$\lim_{س \to ١^{+}} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ١^{-}} \text{هـ}(س)$

$١ + ٤ = ١ + ٣ب \Leftarrow ٤ = ٣ب \Leftarrow ب = \frac{٤}{٣}$

٦ $\text{هـ}(س) = \begin{cases} ٢ب س + ٣ل & ، س \geq ١ \\ ٣س^{٢} + ل & ، س < ١ \end{cases}$

ما قيمة الثوابت ب ، ل علمًا بأن $\lim_{س \to ١} \text{هـ}(س) = ٥$

الحل: نحتاج معادلتين

الأولى ← $\lim_{س \to ١^{+}} \text{هـ}(س) = ٥ \Leftarrow ٣(١)^{٢} + ل = ٥ \Leftarrow ل = ٢$

الثانية ← $\lim_{س \to ١^{-}} \text{هـ}(س) = ٥ \Leftarrow ٢ب(١) + ٣ل = ٥$

$٢ب + ٦ = ٥ \Leftarrow ب = -\frac{١}{٢}$

٧ $\text{هـ}(س) = \begin{cases} \frac{٤ - س}{|س - ٤|} & ، س < ٤ \\ ب س^{٢} - ٩ & ، س \geq ٤ \end{cases}$

جد الثابت ب علمًا بأن $\lim_{س \to ٤} \text{هـ}(س)$ موجودة

الحل: نعيد تعريف المطلق في مجاله (نأخذ ما يلزم)

$س - ٤ = ٠ \Leftarrow س = ٤$

	$س - ٤$		$-س + ٤$
	+ + + +	٤	- - - -

من كلمة موجودة

$\lim_{س \to ٤^{+}} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ٤^{-}} \text{هـ}(س)$

$\lim_{س \to ٤^{+}} \frac{٤ - س}{-(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^{-}} ب س^{٢} - ٩$

$-١ = ١٦ ب - ٩$

$١٦ ب = ٨ \Leftarrow ب = \frac{١}{٢}$

٨ $\text{هـ}(س) = \begin{cases} [س] - ٣ & ، س < ب \\ [س + ٢] & ، س \geq ب \end{cases}$

ما قيمة الثابت ب حيث ب ∈ ص علمًا بأن

$\lim_{س \to ب} \text{هـ}(س)$ موجودة .

الحل: $\lim_{س \to ب^{+}} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ب^{-}} \text{هـ}(س)$

$[ب]^{+} - ٣ = [ب + ٢]^{-}$

$ب - ٣ = [ب]^{-} + ٢$

$ب - ٣ = ب - ١ + ٢ \Leftarrow ٢ = ٢ \Leftarrow ب = ١$

٩ $\text{هـ}(س) = \begin{cases} [س + ٢] & ، س > ب \\ ٨ - [س] & ، س < ب \end{cases}$

ما قيمة الثابت ب حيث ب ∉ ص علمًا بأن $\lim_{س \to ب}$ موجودة

الحل: $\lim_{س \to ب^{+}} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to ب^{-}} \text{هـ}(س)$

$[ب + ٢]^{+} = ٨ - [ب]^{-}$

اليمين (+) واليسار (-) لا دور لهما لأن ب ∉ ص

$[ب]^{+} + ٢ = ٨ - [ب]^{-}$

$[ب] + ٢ = ٨ - [ب]$

أيضاً $[ب]^{+} = [ب]^{-} = [ب]$

$[ب] + [ب] = ٦ \Leftarrow ٢[ب] = ٦$

$[ب] = ٣$

حل هذه المعادلة يكون $٣ \leq ب < ٤$ لكنه تحول إشارة المساواة لأن ب ∉ ص

الجواب $٣ < ب < ٤$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر
www.omaraljabr.com

تمرين محلول

٩ $ق(س) = \begin{cases} |س+٤| & ، س \le -٢ \\ [س] + ٢س & ، س > -٢ \end{cases}$

ما قيمة العدد الصحيح $ب$ علمًا بأن $\lim_{س \to ب} ق(س)$ موجودة

الحل $\lim_{س \to ب^+} ق(س) = \lim_{س \to ب^-} ق(س)$

$[ب] + ٢ب = |ب+٤|$

$ب + ٢ب = ب + ٤$

$٣ب = ب + ٤$

$ب$		-٤
$+$	0	$-$

عندما $ب > -٤$ فإن $٣ب = ب + ٤$

$٢ب = ٤ \Leftarrow ب = ٢$ تقبل لأن $٦ = ٦$

عندما $ب < -٤$ فإن $٣ب = -ب - ٤$

$٤ب = -٤ \Leftarrow ب = -١$ تهمل لأن $-٣ \neq ٥$

١٠ إذا كانت $\lim_{س \to -٢} \frac{\sqrt{أس+٧} - \sqrt{ب+٣}}{س+٢}$ موجودة

جد الثابتين $أ$ ، $ب$

الحل: بما أن النهاية موجودة إذن نأخذ المقولين $(-)$

لمذلوم المقولين في البسط = صفر

$\sqrt{-٢أ+٧} - \sqrt{ب+٣} = ٠$

$٩ = ب+٣ \Leftarrow$ تربيع الطرفين $\Leftarrow ب = ٦$

١١ إذا كان $ق(س) = أس^٣ + بس + ٤$ جد الثابتين $أ$ ، $ب$

علمًا بأن $ق(س)$ يمر بالنقطة $(٢، ٢٤)$ وكانت $\lim_{س \to -١} \frac{ق(س)}{س+١}$ موجودة.

الحل: نكون معادلتين

الأولى الزوج المرتب $(٢، ٢٤) \Leftarrow ق(٢) = ٢٤$

$٨أ + ٢ب + ٤ = ٢٤$

$٤أ + ب = ١٠ \quad \cdots ①$

الثانية من كلمة موجودة يكون المقولين في البسط = ٠

$ق(-١) = صفر \Leftarrow -أ - ب + ٤ = صفر \quad \cdots ②$

بحل الجهاد للبيه

$٤أ + ب = ١٠$

$-أ - ب = -٤$

$٣أ = ٦ \Leftarrow$ **$أ = ٢$** ، **$ب = ٢$**

١٢ إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٥س + أ}{س - ١} = ب٣$ جد الثابتين $أ$ ، $ب$

المقولين في البسط = صفر لأنه النهاية موجودة

$= ب٣$

$١ - ٥ + أ = صفر$

$-٤ + أ = ٠ \Leftarrow$ **$أ = ٤$**

أصبح السؤال

$\lim_{س \to ١} \frac{س^٤ - ٥س + ٤}{س - ١} = ب٣$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س-٤)(س-١)}{س-١} = ب٣$

$-٣ = ب٣ \Leftarrow$ **$ب = -١$**

١٣ $\lim_{س \to ٢} \frac{٣س^٤ - (أ-٦)س - ٢أ}{س - ٢} = ٤$ ما قيمة $أ$ ؟

(٢) نجعل البسط = صفر لكن لا نستفيد لأنه

$١٢ - (أ-٦)(٢) = ٤ \Leftarrow ١٢ - ٢أ + ١٢ = ٤$

بعد أن وجدت $أ$

$\lim_{س \to ٢} \frac{٣س^٤ - ٦س + ٤س - ٢٤}{س - ٢} = ٤$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(٣س + ٤)(س-٢)}{س-٢} = ٤$

$٦ + ٤ = ٤$

$ب = -٢$

١٤ $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^٤ + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ ما قيمة $أ$ ، $ب$

الحل: نأخذ المقولين مقدار = صفر لذلك لنصفر البسط

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

$أ + ٢ب + ٢ = ٠ \Leftarrow ٢ب = -٢ - أ$ ... ①

أصبح السؤال :

$\lim_{س \to ١} \frac{أ س^{٢} + (-٢ - أ) س + ٢}{س - ١} = ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{(أ س - ٢)(س - ١)}{(س - ١)} = ١$

$أ - ٢ = ١ \Leftarrow$ **$أ = ٣$**

نعوض في ① لنجد $ب$ $\Leftarrow ٢ب = -٢ - ٣$

$ب = \frac{-٥}{٢}$

$\lim_{س \to -١} \frac{(س + ٢)(س - ٢)}{(س + ٢)} = ٣ل$

$٣ل = -ل - ٢ \Leftarrow ٢ل = -٢$

$ل = -١$

تمرين محلول

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{أ س + ب} - ٢}{س - ٢} = \frac{١}{٦}$ جد الثابت $أ$ ، $ب$

الحل: نابع التعويض $\frac{\text{مقدار}}{\text{صفر}}$ $\Leftarrow$ نصفر البسط

$\sqrt{٢أ + ب} - ٢ = ٠$

$\sqrt{٢أ + ب} = ٢$ ..... ①

لذلك أصبح السؤال

$\lim_{س \to ٢} \frac{\sqrt{أ س + ب} - \sqrt{٢أ + ب}}{س - ٢} = \frac{١}{٦}$

بالضرب بالمرافق ..... أكمل الحل

$أ = ٧$ بالتعويض في ① **$ب = -٣$**

تمرين محلول

إذا كانت $\lim_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + ب س - ٣}{س - ١} = ٥$

ما قيمة الثوابت $أ$ ، $ب$ ؟

لأن النهاية موجودة ونابع التعويض مقدار

$\therefore$ البسط $= ٠$

$\lim_{س \to ١} (أ س^{٣} + ب س - ٣) = ٠$

$أ + ب - ٣ = ٠ \Leftarrow ب = ٣ - أ$ ... ①

$\lim_{س \to ١} \frac{أ س^{٣} + (٣ - أ) س - ٣}{س - ١} = ٥$

---

٤٥ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - أ س + ٣}{س - ١} & ، س < ١ \\ ب س - ٥ & ، س \geq ١ \end{cases}$

جد الثوابت $أ$ ، $ب$ علمًا بأن $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة

الحل: $\lim_{س \to ١} ق(س)$ موجودة لذلك نصفر البسط

$\lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٣} - أ س + ٣}{س - ١} = ٠ \Leftarrow ٤ - أ = ٠$

$أ = ٤$

$\lim_{س \to ١^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ١^{-}} ق(س)$

$\lim_{س \to ١^{+}} \frac{س^{٣} - ٤ س + ٣}{س - ١} = \lim_{س \to ١^{-}} (ب س - ٥)$

بالتعويض التركيبي $\Leftarrow ب - ٥ = -١$

$ب = ٤$

---

١٦ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٣} - ٤}{س + ٢} & ، س \neq ل \\ ٣ س & ، س > ل \end{cases}$

ما قيمة الثابت $ل$ التي تجعل $\lim_{س \to ل} ق(س)$ موجودة

الحل:

$\lim_{س \to ل^{+}} ق(س) = \lim_{س \to ل^{-}} ق(س)$

$\lim_{س \to ل^{+}} ٣ س = \lim_{س \to ل^{-}} \frac{س^{٣} - ٤}{س + ٢}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

نهـا $\frac{(س-١)(أس^{٣}+ب س+٣)}{س-١} = ٥$
س ← ١

$أ + ب + ٣ = ٥$

$٢أ + ب = ٢ \Leftarrow ٥ = ٣ + ب + أ$

$أ = ١$

	$س^{٣}$	$س^{٢}$	س	ثوابت
١	أ	ب	$-٣أ$	-٣
	أ	أ	$أ+ب$	٣
	١	١	٣	٠

$أ س^{٢} + ب س + ٣$

نعوض في (١)

$ب = ٢ - ١ = ١$

١٧ إذا كان $هـ(س)$ كثير حدود وكانت

نهـا $\left(\frac{هـ(س)+٥}{س}\right) = \frac{١}{٢}$ وكانت
س ← ٠

نهـا $(هـ(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ فجد
س ← ٠

قيمة الثابت ب ؟

لأن النهاية موجودة وناتج التعويض مقدار

∵ نهـا البسط = ٠
س ← ٠

نهـا $هـ(س) + ٥ = ٠$
س ← ٠

نهـا $هـ(س) = -٥$
س ← ٠

∵ نهـا $هـ(س) - ٥ + ٣ب = ٢$
س ← ٠

$-٥ - ٥ + ٣ب = ٢$

$٣ب = ١٢$

$ب = ٤$

١٨ إذا كانت نهـا $\frac{هـ(س)-٦}{س-١} = ٨$
س ← ١

وكانت نهـا $\left(\frac{س^{٢}+٢س-٣}{هـ(س)-٦} + ب\right) = \frac{٣}{٢}$
س ← ١

فجد قيمة الثابت ب ؟

الحل: نهـا $\frac{(س+٣)(س-١)}{هـ(س)-٦} + ب = \frac{٣}{٢}$
س ← ١

نهـا $\frac{س-١}{هـ(س)-٦}$ × نهـا $(س+٣) + ب = \frac{٣}{٢}$
س ← ١ س ← ١

$\frac{١}{٨} \times ٤ + ب = \frac{٣}{٢}$

$\frac{١}{٢} + ب = \frac{٣}{٢} \leftarrow$ **ب = ١**

١٩ إذا كانت نهـا $\frac{س+٣}{س^{٢}+٤س+٣}$
س ← -٣

غير موجودة ، فجد الثابت أ ؟

بما أن النهاية غير موجودة فيكون الناتج عبارة عن البسط ≠ ٠ ، لكن المقام = ٠

نهـا $(س+٣) \neq$ صفر ← **$أ \neq -٣$**
س ← -٣

نهـا $(س^{٢}+٤س+٣) = ٠$
س ← -٣

$٩ - ١٢أ + ٣ = ٠$

$(أ-٣)(أ-١) = ٠$

$أ = ٣$ مرفوض ×

$أ = ١$ ✓

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

٢٠ $\lim_{س \to 3^+} \frac{1}{س-3}$ غير موجودة ما قيم م

أ) $(-\infty, 3)$ ب) $(3, \infty)$

ج) $[3, \infty)$ د) $(-\infty, 3]$

الحل: ندرس الإشارة على الخط

	غير موجودة	موجودة
	− − −	+ + +
$-\infty$ ←	3	→ ∞

← الجواب (د)

٢١ $\lim_{س \to 3^+} \frac{1}{س-3}$ غير موجودة ما قيم م

أ) $(-\infty, 3)$ ب) $(3, \infty)$

ج) $[3, \infty)$ د) $(-\infty, 3]$

الخط لتذكره

	موجودة	غير موجودة
	+ + +	− − −
	3	

← الجواب (ج)

٢٢ $\lim_{س \to 3} \frac{1}{س-م}$ موجودة ما قيم م

أ) $(-\infty, 3)$ ب) $(3, \infty)$

ج) $[3, \infty)$ د) $(-\infty, 3]$

الحل: $\frac{1}{س-م}$ ندرس الإشارة

	غير موجودة	موجودة
	− − −	+ + +
	3	

الجواب (ج)

٢٣ $\lim_{س \to م} [\frac{س}{3} + 1]$ غير موجودة ما قيم م

أ) ٣ ن حيث ن ∈ ع

ب) ٢ ن حيث ن ∈ ص

ج) ٣ ن حيث ن ∈ ص+

د) $\frac{1}{3}$ ن حيث ن ∈ ص

الحل: مضاعفات طول الدرجة ← (ل ن)

ن ∈ ص شرط الإرتكاز من الصفر

∴ الجواب (ب)

اختبار قصير

① إذا كانت $\lim_{س \to 2} \frac{3س^3 - (م-6)س - 2م}{س^2 - 4} = -2$

فما قيمة م ؟

أ) −١٤ ب) صفر ج) ٢ د) −٤

② إذا كان:

$$و(س) = \begin{cases} \frac{س^3 + (ك-7)س - ك}{س - 3} & ، س \neq 3 \\ م & ، س = 3 \end{cases}$$

فإن قيمة الثابت ك التي تجعل $\lim_{س \to 3} و(س)$ موجودة

أ) ٦ ب) −٦ ج) ٣ د) −٣

③ $و(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{[\frac{س}{2}] - 4س + س^2}}{س - 2} & ، س > 2 \\ م & ، س = 2 \end{cases}$

و كانت $\lim_{س \to 2} و(س)$ موجودة فإن قيمة الثابت م

أ) −١ ب) ١

ج) $\frac{-1}{2}$ د) $\frac{1}{2}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

④ إذا كان $\lim_{س \to 0} \frac{د(س)}{س}$ اقتران كثير حدود، وكانت $\lim_{س \to 0} \frac{د(س) - ٥}{س}$ موجودة

وكانت $\lim_{س \to 0} (د(س) - ٥ + ٣ب) = ٢$ فما قيمة الثابت ب ؟

أ) -٤ ب) ٤ ج) $\frac{٤}{٣}$ د) $-\frac{٤}{٣}$

⑤ إذا كان $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} هـ(س) = \begin{cases} ٢ جتا س ، س < \frac{\pi}{٢} \\ ٩ س + ٨ ، س > \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإن قيمة ٩ التي تجعل $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} هـ(س)$ موجودة هي

أ) -٢ ب) صفر ج) -٤ د) ٤

⑥ $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{٦س + ٩} + ٩س - ٣}{س} =$ صفر

ما قيمة الثابت ٩ ؟

أ) -١ ب) -٦ ج) ٦ د) ١

⑦ إذا كان $\lim_{س \to ٩} هـ(س) = \frac{س - ٢}{س^٢ + س - ٦}$

فجد قيم ٩ التي تجعل $\lim_{س \to ٩} هـ(س)$ غير موجودة

أ) $\{٣\}$ ب) $\{-٣ ، ٢\}$

ج) $\{٢\}$ د) $\{-٣\}$

⑧ إذا كان $هـ(س) = \sqrt{٣ - س}$ ، فإن قيم الثابت ج التي تجعل $\lim_{س \to ج} هـ(س)$ موجودة

أ) $(-\infty ، -٢)$ ب) $[٣ ، \infty)$

ج) $(٣ ، -\infty)$ د) $(-\infty ، ٣]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مراجعة القانونات الدائرية

① جاس = المقابل / الوتر

② جتاس = المجاور / الوتر

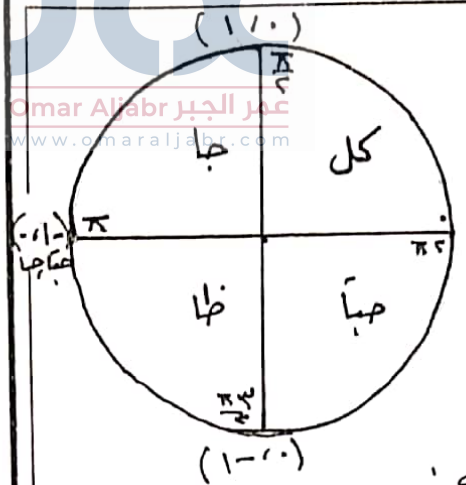
③ ظاس = المقابل / المجاور = جاس / جتاس

④ قاس = ١ / جتاس

⑤ قتاس = ١ / جاس

⑥ ظتاس = ١ / ظاس = جتاس / جاس

دائرة الوحدة



أمثلة

جد كل مما يلي :

١) جا ١٢٠ =

٢) جتا ٢١٠ =

٣) ظا ٣٠٠ =

٤) جتا ١٣٥ =

متطابقات عامة ورئيسية

① جا²س + جتا²س = ١ ..... عائلة قيم (١)

ظا²س + ١ = قا²س ..... عائلة قيم (٢)

١ + ظتا²س = قتا²س ..... عائلة قيم (٣)

② متطابقة الزوايا

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جا٦س = ٢ جا٣س جتا٣س

جاس = ٢ جا ١/٢ س جتا ١/٢ س

③ متطابقة الشم

جتا٢س = جتا²س - جا²س

جتا٢س = ١ - ٢جا²س ، جتا٢س = ٢جتا²س - ١

١ - جتا زاوية = ٢ جا² ١/٢ الزاوية

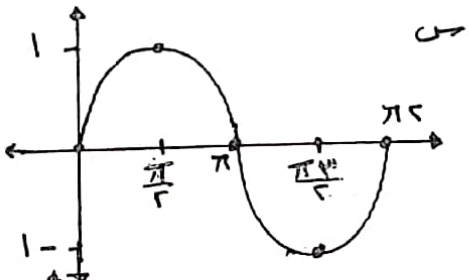
١ - جتا ٤س = ٢ جا²٢س

١ - جتاس = ٢ جا² ١/٢ س

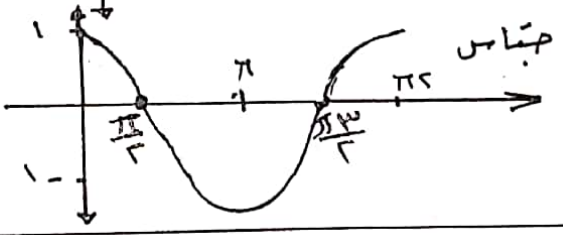
النسب المثلثية للزوايا الرئيسية

الزاوية	٣٠° = π/٦	٤٥° = π/٤	٦٠° = π/٣
جا	١/٢	١/√٢	√٣/٢
جتا	√٣/٢	١/√٢	١/٢
ظا	١/√٣	١	√٣

رسمة جاس



رسمة جتاس



عمر الجبر Omar Aljabr www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

نهاية المقترانات الدائرية

يتم حساب النهاية بالتعويض المباشر حيث تقبل كل الإجابات ما عدا $\frac{0}{0}$

أمثلة:

① $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{جتا}س} = \frac{0}{\text{جتا}0} = \frac{0}{1} = 0$

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} (2\text{ظا}س - \frac{1}{4}\text{ظا}4س)$

$= 2\text{ظا}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\text{ظا}4 \times \frac{\pi}{2} = 2 - \frac{1}{4} \times 0 = 2$

③ $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س + \pi)}{س + \pi} = \frac{\text{جا}2\pi}{2\pi} = \frac{0}{2\pi}$ غير موجودة

أولاً: نهاية دائرية عادية تعتمد على الاختصار

أمثلة

① $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}^2 س}{1 + \text{جتا}^3 س} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to \pi} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{1 + \text{جتا}^3 س}$

$\lim_{س \to \pi} \frac{(1 - \text{جتا}س)(1 + \text{جتا}س)}{(1 + \text{جتا}س)(1 - \text{جتا}س + \text{جتا}^2 س)} = \frac{2}{3}$

② $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}س}{\text{ظا}^2 س - 2} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}س}{1 + \text{ظا}^2 س - 2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}س}{\text{ظا}^2 س - 1}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - \text{ظا}س)}{(\text{ظا}س - 1)(\text{ظا}س + 1)} = \frac{-1}{2}$ (-1)

③ اثبت أن: $\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\text{جا}س - 1}{4\text{جتا}^2 س - 3} = \frac{-1}{2}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\text{جا}س - 1}{3 - (1 - \text{جا}^2 س)} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\text{جا}س - 1}{1 - 3\text{جا}^2 س} =$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{3}} \frac{2\text{جا}س - 1}{(1 - 2\text{جا}س)(1 + 2\text{جا}س)} = \frac{-1}{2}$ (-1)

④ $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}2س - \text{جتا}2س - 1}{\text{جا}س - \text{جتا}س} = \frac{0}{0}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جا}س\text{جتا}س - (2\text{جتا}^2 س - 1) - 1}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جا}س\text{جتا}س - 2\text{جتا}^2 س + 1 - 1}{\text{جا}س - \text{جتا}س}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{2\text{جتا}س(\text{جا}س - \text{جتا}س)}{(\text{جا}س - \text{جتا}س)} = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

امتحان قصير

1) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \text{ظا}س}{\text{جتا}2س}$

أ) 2 ب) $\frac{1}{2}$ ج) 1 د) -1

2) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}^2 س}{1 - \sqrt{2}\,\text{جا}س}$

أ) 2 ب) -2 ج) 1 د) -1

ثانياً: نهايات دائرية تعتمد على نظرية ونتائجها

النظرية: $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س} = 1$

حيث س بالراديان

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

نتائج

① $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } س}{س} = 1$

البرهان: $\lim_{س \to 0} \frac{\frac{\text{جا } س}{\text{جتا } س}}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س}{س \text{ جتا } س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\text{جتا } س} = 1 \times 1 = 1$

② $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$ ، $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ا س}{ب س} = \frac{ا}{ب}$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ا س}{\text{جا } ب س} = \frac{ا}{ب}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ا س}{\text{جا } ب س} = \frac{ا}{ب}$

④ $\lim_{س \to ا} \frac{\text{جا } (س - ا)}{س - ا} = 1$

أمثلة

[1] $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٣ س}{٥ س} = \frac{٣}{٥}$

[2] $\lim_{س \to 0} \frac{٤ س}{\text{ظا } ٧ س} = \frac{٤}{٧}$

[3] $\lim_{س \to 0} ٥ س \text{ ظتا } ٣ س = \lim_{س \to 0} \frac{٥ س}{\text{ظا } ٣ س} = \frac{٥}{٣}$

[4] $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢ ٥ س}{٦ س^٢}$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٥ س}{٦ س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٥ س}{س}$

$= \frac{٥}{٦} \times ٥ = \frac{٢٥}{٦}$

[5] $\lim_{س \to 0} ٥ س^٤ \text{ ظتا } ٤ س \text{ قتا } ٣ س$

$\lim_{س \to 0} (٥ س^٤ \times \frac{١}{\text{ظا } ٤ س} \times \frac{١}{\text{جا } ٣ س})$

$\lim_{س \to 0} \frac{٥ س}{\text{ظا } ٤ س} \times \lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{جا } ٣ س}$

$= \frac{٥}{٤} \times \frac{١}{٣} = \frac{٥}{١٢}$

[6] $\lim_{س \to 0} ٣ س (\text{ظتا } ٢ س + \text{قتا } ٣ س)$

$\lim_{س \to 0} ٣ س (\frac{١}{\text{ظا } ٢ س} + \frac{١}{\text{جا } ٣ س})$

$\lim_{س \to 0} \frac{٣ س}{\text{ظا } ٢ س} + \lim_{س \to 0} \frac{٣ س}{\text{جا } ٣ س}$

$\frac{٣}{٢} + ١ = \frac{٥}{٢}$

[7] $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٢ س}{٦ س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٥ س}{ا س - س} = ٢$

جد الثابتين ا ، ب ؟

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا } ٢ س}{٦ س} = ٢ \leftarrow \frac{٢}{٦} = ٢ \Leftarrow ٢ = ١٢$

$\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا } ٥ س}{(ا - ١) س} = ٢ \leftarrow \frac{٥}{ا - ١} = ٢$

$٢ ا - ٢ = ٥ \leftarrow ب = \frac{٧}{٢}$

[8] $\lim_{س \to ٥} \frac{\text{جا } (س - ٥)}{س - ٥} = 1$

[9] $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{جا } (\pi س - ٣ \pi)}{٣ - س} =$

$\lim_{س \to ٣} \frac{\text{جا } \pi (س - ٣)}{-(س - ٣)} = -\pi$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

١٠ $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٧س}{ظا ٩س} = \frac{٧}{٩}$

١١ $\lim_{س \to ٤} \frac{جا(س-٤)}{س^{٢} - ١٦} = \lim_{س \to ٤} \frac{جا(س-٤)}{س-٤} \div \lim_{س \to ٤} \frac{س^{٢}-١٦}{س-٤}$

$= \frac{١}{\lim_{س \to ٤} (س-٤)(س+٤)} = \frac{١}{٨}$

تمرين محلول

$\lim_{س \to ٣} \frac{ظا(س-٣)}{س^{٢}-٣س} = \lim_{س \to ٣} \frac{ظا(س-٣)}{س-٣} \div \lim_{س \to ٣} \frac{س^{٢}-٣س}{س-٣}$

$= \lim_{س \to ٣} \frac{١}{س} \times \frac{س+٣}{س+٣} = \frac{١}{٣+٣} = \frac{١}{٦}$

تمرين محلول

$\lim_{س \to 0} \frac{جا(ظا٥س)}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا(ظا٥س)}{ظا٥س} \div \lim_{س \to 0} \frac{ظا٥س}{س}$

$= \frac{١}{\frac{١}{٥}} = ٥$

١٢ $\lim_{س \to 0} \frac{س + جا٤س}{٥س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{٥س} + \lim_{س \to 0} \frac{جا٤س}{٥س}$

$= \frac{١+٤}{٥} = \frac{٥}{٥} = ١$ يوجد حل آخر

١٣ $\lim_{س \to 0} \frac{س - جا٣س + ظا٥س}{٢س - ظا٤س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{جا٣س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{ظا٥س}{س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٢س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{ظا٤س}{س} \times \lim_{س \to 0} ظا٤س$

$= \frac{١ - ٣ + ٥}{٠ \times ١ - ٢} = \frac{٣}{٢}$

١٤ $\lim_{س \to 0} \frac{٢س^{٢} + س ظا٢س}{جا^{٢}س + س^{٢}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}} + \lim_{س \to 0} \frac{س ظا٢س}{س^{٢}}$

$\lim_{س \to 0} \frac{جا^{٢}س}{س^{٢}} + \lim_{س \to 0} \frac{س^{٢}}{س^{٢}}$

$\lim_{س \to 0} ٢ + \lim_{س \to 0} \frac{ظا٢س}{س} = \frac{٢+٢}{١+٠} = ٤$

$(\lim_{س \to 0} \frac{جا٢س}{س})^{٢} + \lim_{س \to 0} س$

امتحان قصير

① $\lim_{س \to 0} ٧س^{٢} ظتا^{٢}٢س$ قتا٥س. تساوي

أ) ٧٠ ب) $\frac{٧}{١٠}$ ج) $\frac{١}{٢٠}$ د) $\frac{٧}{٢٠}$

② إذا كانت $\lim_{س \to 0} \frac{(ب^{٢}+٣)س}{ظا\frac{١}{٢}س} = ٨$

ب > ٠ . فإن قيمة الثابت ب =

أ) $\sqrt{٥}$ ب) ١ ج) $\sqrt{١٣}$ د) ٥

③ $\lim_{س \to 0} \frac{١}{س ظتا٩س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا٦س}{ب س - س} = ٢$

فإن قيمة أ ، ب على الترتيب ؟

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

أ) ٤ ، ١٠ ب) ١٠ ، ٤
د) ١٠ ، ١٢ هـ) $\frac{5}{2}$ ، ٤

④ $\lim_{س \to .} \frac{س + جا٢س}{٣س} =$

أ) صفر ب) ١ د) $\frac{2}{3}$ هـ) $\frac{1}{3}$

⑤ $\lim_{س \to .} \frac{١ - جا٢س - جتا٤س}{٤س}$ تساوي

أ) $\frac{1}{2}$ ب) -١ د) صفر هـ) $\frac{1}{2}$

⑥ $\lim_{س \to ٠^+} \frac{ظا س}{\sqrt{٢س^٢ + س^٣}}$ تساوي

أ) -١ ب) ١ د) غير موجودة هـ) صفر

تمرين محلول

$$\lim_{س \to .} \frac{٢س(س + جا٨س - جا٤س)}{س^٢ جتا س}$$

$$= \lim_{س \to .} \frac{٢}{جتا س} \times \lim_{س \to .} \frac{(س + جا٨س - جا٤س)}{س}$$

$$= ٢ \times \left(\lim_{س \to .} \frac{س}{س} + \lim_{س \to .} \frac{جا٨س}{س} - \lim_{س \to .} \frac{جا٤س}{س} \right)$$

$$= ٢ \times \frac{1}{2} (١ + ٨ - ٤) = ١٠$$

[١٥] $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا س}{س - \frac{\pi}{2}} =$

$$= \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جا(\frac{\pi}{2} - س)}{س - \frac{\pi}{2}} = -١$$

[١٦] $\lim_{س \to ٢} \frac{٢ - س}{جا \pi س} =$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{-جا(٢\pi - \pi س)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{-جا \pi (٢ - س)}{س - ٢}$$

$$= \lim_{ص \to .} \frac{-جا \pi ص}{ص} = \frac{1}{\pi}$$

[١٧] $\lim_{س \to ٣\pi} \frac{جا س}{\pi - \frac{س}{٣}} = \lim_{س \to ٣\pi} \frac{جا(٣\pi - س)}{\frac{٣\pi - س}{٣}}$

$$\lim_{ص \to .} \frac{جا ص}{\frac{-ص}{٣}} = -٣$$

ص = ٣π − س
س ← ٣π ⇒ ص ← .

[١٨] $\lim_{س \to \pi} \frac{ظا س}{\pi - س} =$

$$\lim_{س \to \pi} \frac{-ظا(\pi - س)}{\pi - س} = -١$$

[١٩] $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{ظا \pi س} =$

$$\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-ظا(٢\pi - \pi س)} = \lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{-ظا \pi (٢ - س)}$$

$$= \lim_{ص \to .} \frac{-ص}{-ظا \pi ص} = \frac{1}{\pi}$$

[٢٠] $\lim_{س \to ١} (س - ١) ظا \frac{\pi}{2} س$

$$\lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{ظتا \frac{\pi}{2} س} = \lim_{س \to ١} \frac{س - ١}{ظا(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} س)}$$

$$\lim_{س \to ١} \frac{(س - ١)}{ظا \frac{\pi}{2}(١ - س)}$$

$$= \frac{2}{\pi} = \frac{1}{-ص}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr Academic
www.omaraljabr.com

ثالثاً : نهاية تعتمد على المرافق

المقدار	المرافق	ناتج الضرب	المكافىء
$1-جتا س$	$1+جتا س$	$1-جتا^2 س$	$جا^2 س$
$1-جا س$	$1+جا س$	$1-جا^2 س$	$جتا^2 س$
$1-قا س$	$1+قا س$	$1-قا^2 س$	$-ظا^2 س$

(٢١) $\lim_{س \to 0} \frac{1-جتا س}{س \, جا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1-جتا س}{س \, جا س} \times \frac{1+جتا س}{1+جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س}{س \, جا س \times (1+جتا س)} = \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} \times \frac{1}{1+جتا س} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

(٢٢) $\lim_{س \to 0} \frac{قا^2 س - 1}{س^2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{قا^2 س - 1}{س^2} \times \frac{قا^2 س + 1}{قا^2 س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س}{س^2 (قا^2 س + 1)} = \lim_{س \to 0} \frac{ظا^2 س}{س^2} \times \frac{1}{2} = 1 \times \frac{1}{2} = 2$

(٢٣) $\lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{1-جتا^2 س}}{\sqrt{2} \, س}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{1-جتا^2 س}}{\sqrt{2} \, س} \times \frac{\sqrt{1+جتا^2 س}}{\sqrt{1+جتا^2 س}}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{1-جتا^2 س}}{\sqrt{2} \, س \times \sqrt{2}} = \lim_{س \to 0^+} \frac{\sqrt{جا^2 س}}{2 س}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{2 س} = \frac{1}{2}$

$= \lim_{س \to 0^+} \frac{|جا س|}{2 س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{2 س} = \frac{1}{2}$

تمرين محلول

$= \lim_{س \to \pi} \frac{\sqrt{1+جتا س}}{\pi - س}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{\sqrt{1+جتا س}}{\pi - س} \times \frac{\sqrt{1-جتا س}}{\sqrt{1-جتا س}}$

$= \lim_{س \to \pi} \frac{\sqrt{جا^2 س}}{(\pi - س) \times \sqrt{2}} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{|جا س|}{\sqrt{2} (س - \pi)}$

$= \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س}{\sqrt{2} (س - \pi)} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا(\pi - س)}{\sqrt{2} (س - \pi)}$

$= \frac{-1}{-\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

امتحان قصير

① $\lim_{س \to 0^+} \frac{5 س - ظا^2 س}{\sqrt{1-جتا^2 س}}$

أ) $\frac{-3}{\sqrt{2}}$ ب) -3 ج) 3 د) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

② $\lim_{س \to \pi^+} \frac{\sqrt{1+جتا س}}{جا س} =$

أ) صفر ب) $\frac{-1}{\sqrt{2}}$ ج) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ د) $\sqrt{2}$

③ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{جتا س}{س - \frac{\pi}{2}} =$

أ) -1 ب) صفر ج) 1 د) 2

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

④ $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2}$ تساوي

أ) 1 ب) -1 ج) صفر د) غير موجودة

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س \text{ ظا} س}$ تساوي

أ) -2 ب) 2 ج) صفر د) غير موجودة

⑥ $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} (\text{ظا} س - \text{قا} س)$ تساوي

أ) غير موجودة ب) صفر ج) $\frac{1}{2}$ د) $-\frac{1}{2}$

تمرين محلول: $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - 2س)^2}$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا} س}{(\pi - 2س)^2} \times \frac{1 + \text{جا} س}{1 + \text{جا} س}$$

$$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{(\pi - 2س)^2 \times 2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}^2 (\frac{\pi}{2} - س)}{2 (\frac{\pi}{2} - س)^2 \times 2}$$

$$\frac{1}{2} \times \left(\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا} (\frac{\pi}{2} - س)}{2 (\frac{\pi}{2} - س)} \right)^2$$

$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{8}$$

㉔ $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(1 - \text{جتا} س)}{س^2}$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}(1 - \text{جتا} س)}{1 - \text{جتا} س} = \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} س}{س^2}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{س^2}{1 - \text{جتا} س} \times \frac{1 + \text{جتا} س}{1 + \text{جتا} س} = \frac{1}{\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{س^2}}$$

$$= \frac{1}{\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

رابعًا: نهاية تعتمد على متطابقات هامة

$\text{جا} س - \text{جا} ص = 2 \text{جتا} (\frac{س + ص}{2}) \text{جا} (\frac{س - ص}{2})$

$\text{جتا} س - \text{جتا} ص = -2 \text{جا} (\frac{س + ص}{2}) \text{جا} (\frac{س - ص}{2})$

$\text{جا}(أ - ب) = \text{جا} أ \text{جتا} ب - \text{جتا} أ \text{جا} ب$

$\text{جتا}(أ - ب) = \text{جتا} أ \text{جتا} ب + \text{جا} أ \text{جا} ب$

$\text{ظا}(س - ص) = \frac{\text{ظا} س - \text{ظا} ص}{1 + \text{ظا} س \text{ظا} ص}$

㉕ أثبت أن $\lim_{س \to أ} \frac{\text{جا}^2 س - \text{جا}^2 أ}{س - أ} = 2 \text{جتا} 2أ$

$$\lim_{س \to أ} \frac{2 \text{جتا} \frac{(2س + 2أ)}{2} \times \text{جا} \frac{(2س - 2أ)}{2}}{س - أ}$$

$$\lim_{س \to أ} 2 \text{جتا}(س + أ) \times \lim_{س \to أ} \frac{\text{جا}(س - أ)}{(س - أ)}$$

$$2 \text{جتا} 2أ \times 1 = 2 \text{جتا} 2أ$$

㉖ $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا} 8س - 2 \text{جا}^2 س}{س^4}$

$$\lim_{س \to 0} \frac{1 - 2 \text{جا}^2 س - \text{جتا} 8س}{س^4}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}^2 س - \text{جتا} 8س}{س^4} = \lim_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا} 5س \times \text{جا} -3س}{س^4}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{-2 \text{جا} 5س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} -3س}{س}$$

$$-2 \times 5 \times -3 = 30$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

٢٠٧ $\lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س - 2 ظا س}{س^3}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س جتا س - 2 ظا س}{س^3}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{2 جا س (جتا س - 1)}{س^3} \times \frac{جتا س + 1}{جتا س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-2 جا^3 س}{س^3 \times 2}$

$= -\left(\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س}\right)^3 = -1$

③ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا س - جا^2 س - جتا^2 س}{س^2}$

ا) غير موجودة ب) -1 ج) -2 د) 1

④ $\lim_{س \to 0} \frac{-جا^2 5س}{4 ظا^2 3س} =$

ا) $\frac{25}{36}$ ب) $-\frac{5}{12}$

ج) $\frac{5}{12}$ د) $-\frac{25}{36}$

تمرين محلول

$\lim_{س \to 0} \frac{جا س - ظا س}{س^3}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س - \frac{جا س}{جتا س}}{س^3} = \lim_{س \to 0} \frac{جا س جتا س - جا س}{س^3 جتا س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س (جتا س - 1)}{س^2 جتا س} \times \frac{(جتا س + 1)}{(جتا س + 1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{جا^2 س - جا^2 س}{س^3 جتا س \times 2}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{-1}{2 جتا س} \times \left(\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س}\right)^3$

$= -\frac{1}{2} \times 1 = \frac{-1}{2}$

⑤ $\lim_{س \to 0} \frac{جتا^4 س - جتا^3 س}{س^2}$

ا) -7 ب) -14

ج) 7 د) 14

امتحان قصير

① $\lim_{س \to 0} \frac{جتا 2س - جتا 5س}{س^2} =$

ا) -8 ب) 4 ج) 8 د) -4

② $\lim_{س \to 0} \frac{1 + جتا 4س - 2 جتا^2 3س}{س^2} =$

ا) -6 ب) 6 ج) 3 د) -3

٣٦

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

الإتصال عند نقطة

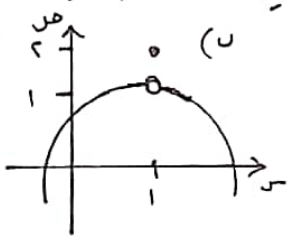
يكون الإقتران متصل عند س = أ
إذا حقق الشروط الآتية :

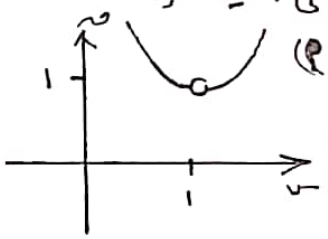
① ق(أ) معرفة
② $\lim_{س \to أ}$ ق(س) موجودة
③ $\lim_{س \to أ}$ ق(س) = ق(أ)

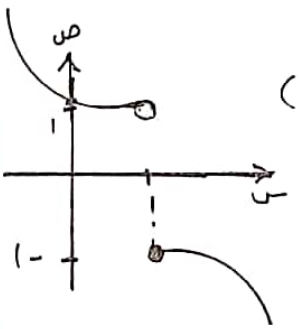
من رحم الإقتران يكون ق غير متصل عند الحلقات والإنقطاعات

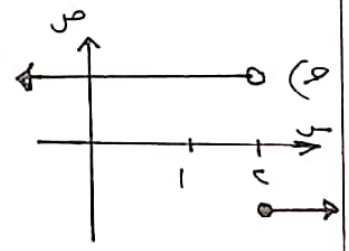
أمثلة :

① أي الإقترانات الآتية متصلاً عند س = ١

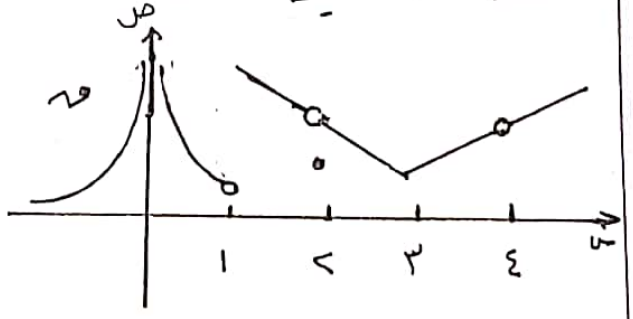
ب)


ج)


د)


هـ)


② الشكل يمثل ق ما قيمة س التي يكون عندها ق غير متصل



أ) {١، ٢، ٤}
ب) {٠، ١}
ج) {٤، ٦، ١١، ٢٠}
د) {٤، ٦، ١١، ٢٠، ٢٤}

③ $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+١} & ، س > ٣ \\ ٠ & ، س = ٣ \\ ١-س^{٢} & ، س < ٣ \end{cases}$

ابحث اتصال ق عند س = ٣

ق(٣) $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٣^{+}}$ ق(س) $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٣^{-}}$ ق(س)

٠ $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٣^{+}} \sqrt{س+١}$ $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٣^{-}} (١-س^{٢})$

٠ ≠ ٢ ≠ ٨

∴ ق غير متصل عند س = ٣

④ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢}-٢٥}{س-٥} & ، س \neq ٥ \\ ١٠ & ، س = ٥ \end{cases}$

ابحث اتصال ق عند س = ٥

ق(٥) $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٥}$ ق(س)

١٠ $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٥} \frac{س^{٢}-٢٥}{س-٥}$ $= \lim_{س \to ٥} \frac{(س-٥)(س+٥)}{(س-٥)}$

١٠ = ١٠

∴ ق متصل عند س = ٥

تمرين محلول :

$ق(س) = \begin{cases} س^{٣}-١ & ، س \neq ص \\ ٢س & ، س = ص \end{cases}$

ابحث اتصال ق(س) عند س = ٢

ق(٢) $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٢}$ ق(س)

٧ $\stackrel{؟}{=}$ $\lim_{س \to ٢} ٢س$

٧ ≠ ٤ ∴ ق غير متصل عند س = ٢

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

⑤ أي الآتية إقتران غير متصل عند س = ٠

أ) $ق(س) = س^{٣}[س]$ ب) $ق(س) = [س]$

ج) $ق(س) = |س|$ د) $ق(س) = س|س|$

تمرين:

أي الإقترانات الآتية متصل عند س = ٤

أ) $ق(س) = \begin{cases} \frac{هـ^{س} - هـ^{٤}}{س - ٤} & ، س \neq ٤ \\ \pi - & ، س = ٤ \end{cases}$

ب) $ق(س) = \begin{cases} \frac{\sqrt{س+٥} - ٣}{س - ٤} & ، س < ٤ \\ \frac{١}{٣} & ، س \geq ٤ \end{cases}$

ج) $ق(س) = \begin{cases} ٢س + ١ & ، س \in ح \\ س^{٢} & ، س \notin ح \end{cases}$

د) $ق(س) = \begin{cases} [\frac{س}{٢} + ١] & ، س < ٤ \\ |س - ١٢| & ، س \geq ٤ \end{cases}$

أسئلة الثوابت

لكلمة متصل تعني

* نهاية موجودة
* الصورة = النهاية

أمثلة:

① $ق(س) = \begin{cases} \frac{٥ - س}{|س - ١٥|} & ، س < ٥ \\ ل\, م س^{٢} - ٦ & ، س \geq ٥ \end{cases}$

ما قيمة الثابت م التي تجعل ق متصلاً عند س = ٥

الحل: لأن ق متصلاً عند س = ٥

فإن $نها_{س \to ٥^{+}} ق(س) = نها_{س \to ٥^{-}} ق(س)$

$نها_{س \to ٥^{+}} \frac{٥ - س}{|س - ١٥|} = نها_{س \to ٥^{-}} (م س^{٢} - ٦)$

$نها_{س \to ٥^{+}} \frac{-(س - ٥)}{-(س - ١٥)} = نها_{س \to ٥^{-}} (م س^{٢} - ٦)$

$نها_{س \to ٥^{+}} \frac{١}{س - ١٥} = نها_{س \to ٥^{-}} (م س^{٢} - ٦)$

$\frac{١}{-١٠} = ٢٥م - ٦$

$-١ = ٢٥م - ٦$

$م = \frac{١}{٥}$

② $ق(س) = \begin{cases} م س - ب & ، س < ١ \\ ٣ & ، س = ١ \\ ب س^{٢} - ١ & ، س > ١ \end{cases}$

ما قيم الثوابت م ، ب علماً بأن ق متصل عند س = ١

الحل: ق متصل عند س = ١

$\because نها_{س \to ١^{+}} ق(س) = نها_{س \to ١^{-}} ق(س) = ق(١)$

$نها_{س \to ١^{+}} (ب س^{٢} - ١) = ٣ \leftarrow ب - ١ = ٣ \leftarrow ب = ٤$

$نها_{س \to ١^{-}} (م س - ب) = ٣ \leftarrow م - ب = ٣$

$م - ٤ = ٣ \Leftarrow م = ٧$

③ $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٤} - (٣ - ٢ب) س - ٦ب}{س - ٣} & ، س \neq ٣ \\ ٤س - ١ & ، س = ٣ \end{cases}$

ما قيمة الثابت ب التي تجعل ق متصل عند س = ٣

الحل: ق متصل عند س = ٣

$نها_{س \to ٣} ق(س) = ق(٣)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$\lim_{س \to 3} \frac{س^2 - (أ+2)س - 6أ}{س - 3} = 11$

$\lim_{س \to 3} \frac{(س-3)(س+2أ)}{(س-3)} = 11$

$3 + 2أ = 11 \Leftarrow أ = 4$

تمرين محلول

$د(س) = \begin{cases} أس - ب ، & س \geq 1 \\ 3س ، & 1 < س < 2 \\ ب س^2 - أ ، & س \geq 2 \end{cases}$

ما قيم الثوابت أ ، ب علمًا بأن د(س) متصل على ح

الحل: د(س) متصل عند س = 1 (تحول)

$\lim_{س \to 1^+} د(س) = \lim_{س \to 1^-} د(س)$

$3 = أ - ب$ ..... (1)

د(س) متصل عند س = 2 (تحول)

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = \lim_{س \to 2^-} د(س)$

$4ب - أ = 6$ ----- (2)

بحل المعادلتين ينتج أن $أ = 6$ ، $ب = 3$

تمرين محلول

$د(س) = \begin{cases} س \ قتا 4س ، & س \neq 0 \\ \frac{1}{4} أ ، & س = 0 \end{cases}$

ما قيمة أ التي تجعل د متصل عند س = 0

الحل: د متصل عند س = 0

$د(0) = \lim_{س \to 0} د(س)$

$\frac{1}{4} أ = \lim_{س \to 0} (س \ قا 4س)$

$\frac{1}{4} أ = \lim_{س \to 0} \frac{س}{\frac{1}{4} 4س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{جتا س}$

$\frac{1}{4} أ = 1 \Leftarrow \frac{1}{4} أ = 1 \times 1$

اختبار قصير

1) إذا كان $د(س) = \begin{cases} س^2 + 5 ، & س \neq 4 \\ 5أ + 16 ، & س = 4 \end{cases}$

فإن قيمة أ التي تجعل د(س) متصلاً عندما س = 4

أ) -1 ب) $\frac{25}{16}$ ج) $\frac{37}{5}$ د) 1

2) إذا كان د(س) متصلاً عند س = 2

وكانت $\lim_{س \to 2} د(س) = 5$ فإن:

$\lim_{س \to 2} (د(س) - [س - \frac{1}{2}]) =$

أ) 3 ب) 3,5 ج) 4 د) 4,5

3) إذا كان $د(س) = \begin{cases} [س] + ب ، & 1 \leq س < 3 \\ \frac{15}{س} ، & 3 \leq س \leq 6 \end{cases}$

فجد قيم الثابت ب التي تجعل د متصلاً عندما س = 3

أ) 2 ب) 3 ج) 1 د) -3

4) إذا كان د متصلاً عند س = 5 وكان $3 د(5) = 6$ ، وكانت $\lim_{س \to 5} 4ب(س) = 3$ فإن قيمة الثابت ب = ؟

أ) $\frac{1}{2}$ ب) 2 ج) -2 د) $\frac{3}{2}$

عمر الجبر Omar Aljabr www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

عمر الجبر Omar Aljabr
www.omaraljabr.com

٥ إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س^{٢} - ١}{س - ١} & ، س > ١ \\ ب & ، س = ١ \\ ٢ أ س & ، س < ١ \end{cases}$

متصل عند س = ١ ، فإن قيم الثابتين أ ، ب على الترتيب

أ) $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ب) $\frac{١}{٢}$ ، ١

ج) ٣ ، $\frac{٣}{٤}$ د) $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٢}$

نظريات في الإتصال

إذا كان ق(س) ، هـ(س) متصلين عند س = أ فإن :

* (ق ± هـ)(س) متصل عند س = أ
* (ق × هـ)(س) متصل عند س = أ
* $(\frac{ق}{هـ})(س)$ متصل عند س = أ ، هـ(أ) ≠ ٠

أمثلة :

١ ق(س) = |س - ٢| ، هـ(س) = ٤ + س

ابحث اتصال (ق + هـ)(س) عند س = ٢

الحل: ق متصل عند س = ٢

هـ متصل عند س = ٢

∴ (ق + هـ)(س) متصل عند س = ٢

٢ ق(س) = (س - ٢)^{٣} ، هـ(س) = [س + ١]

ابحث اتصال (ق × هـ)(س) عند س = ٢

الحل : هـ غير متصل عند س = ٢

∴ نطبق الشروط على

ل(س) = ق(س) × هـ(س)

عند س = ٢

ل(٢) = ق(٢) × هـ(٢) = ٠ × ٣ = ٠

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ (س - ٢)^{٣} × $\lim_{س \to ٢^{+}}$ [س + ١]

= ٠ × ٣ = ٠

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ (س - ٢)^{٣} × $\lim_{س \to ٢^{-}}$ [س + ١]

= ٠ × ٢ = ٠

∴ $\lim_{س \to ٢}$ ل(س) = ٠

ل(٢) = $\lim_{س \to ٢}$ ل(س) ∴ ل متصل عند س = ٢

تمرين محلول

ق(س) = [س + ٣] ، هـ(س) = [٤ - $\frac{١}{٢}$ س]

ابحث اتصال (ق - هـ)(س) عند س = ٢

الحل : ق غير متصل عند س = ٢

∴ نطبق الشروط على

ل(س) = ق(س) - هـ(س) عند س = ٢

ل(٢) = ٥ - ٣ = ٢

$\lim_{س \to ٢^{+}}$ ل(س) = $\lim_{س \to ٢^{+}}$ [س + ٣] - $\lim_{س \to ٢^{+}}$ [٤ - $\frac{١}{٢}$ س]

= ٥ - ٢ = ٣

$\lim_{س \to ٢^{-}}$ ل(س) = $\lim_{س \to ٢^{-}}$ [س + ٣] - $\lim_{س \to ٢^{-}}$ [٤ - $\frac{١}{٢}$ س]

= ٤ - ٣ = ١

∴ $\lim_{س \to ٢}$ ل(س) غير موجودة

∴ ل(س) غير متصل عند س = ٢

٣ ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} + ١ & ، س \leq ٢ \\ ٢ س & ، س > ٢ \end{cases}$

هـ(س) = $\begin{cases} س & ، س < ٢ \\ ٣ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

ابحث اتصال $(ق + هـ)(س)$ عند $س = ٢$

الحل: ق غير متصل عند $س = ٢$

∴ نطبق الشروط على

$ل(س) = ق(س) + هـ(س)$ عند $س = ٢$

$ل(٢) = ق(٢) + هـ(٢) = ٥ + ٢ = ٧$

$نها_{س \to ٢^+} ل(س) = نها_{س \to ٢^+} (س + ١) + نها_{س \to ٢^+} س$

$= ٥ + ٢ = ٧$

$نها_{س \to ٢^-} ل(س) = نها_{س \to ٢^-} ٣ نها + نها_{س \to ٢^-} س$

$= ٤ + ٣ = ٧$

∴ $نها_{س \to ٢} ل(س) = ٧$

$ل(٢) = نها_{س \to ٢} ل(س)$ ∴ ل متصل عند $س = ٢$

لاحظ

ق ، هـ متصلتين عند $س = ٢$

ب) $ل(٢) = ٤$

ج) $نها_{س \to ٢^+} ل(س) = ٤$

د) $نها_{س \to ٢^-} ل(س) = ل(٢) = ٤$

امتحان قصير

① إذا كان $(ق + هـ)(س)$ متصل عند $س = ٢$ فإن إحدى الجمل الآتية خاطئة

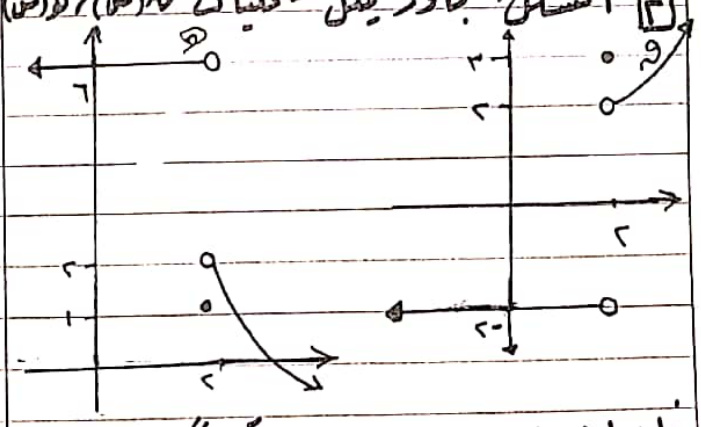
أ) ق ، هـ متصلتين عند $س = ٢$

ب) $(ق + هـ)(٢)$ معرفة

ج) $نها_{س \to ٢} (ق + هـ)(س)$ موجودة

د) $نها_{س \to ٢} (ق + هـ)(س) = (ق + هـ)(٢)$

② الشكل المجاور يمثل منحنيات $ق(س)$ ، $هـ(س)$



فإن $ل(س) = ق(س) + هـ(س)$ متصلاً عند $س = ٢$

مراجعة وتدريب

إعادة تعريف المطلق وأكبر عدد صحيح على فترة أو على ح

١) $ق(س) = |س^٢ - س - ٦|$ ، $س \in [٢ ، ٥]$

$س^٢ - س - ٦ = ٠$

$(س - ٣)(س + ٢) = ٠$

$س = ٣$ ، $س = -٢$

	٢		٣		٥
$س^٢ - س - ٦$	+		−		+
$-س^٢ + س + ٦$		−		+	

$ق(س) = \begin{cases} -س^٢ + س + ٦ & ، ٢ \le س < ٣ \\ س^٢ - س - ٦ & ، ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$

٢) $ق(س) = س^٢ |س| + ٣$

$س = ٠$

		٠	
$س^٢(س) + ٣$	+	صفر	+
$س^٢(-س) + ٣$	−		

$ق(س) = \begin{cases} -س^٣ + ٣ & ، س \le ٠ \\ س^٣ + ٣ & ، س > ٠ \end{cases}$

٣) $ق(س) = |س - ١| + |س - ٤|$

$س - ١ = ٠$ ، $س - ٤ = ٠$

$س = ١$ ، $س = ٤$

		١		٤	
$س - ١ + س - ٤$		$س - ١ + ٤ - س$		$١ - س + ٤ - س$	
$٢س - ٥$		③		١	$٥ - ٢س$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$ق(س) = \begin{cases} ٥ - ٢س & ، س < ١ \\ ٣ & ، ١ \leq س \leq ٤ \\ ٢س - ٥ & ، س > ٤ \end{cases}$$

إعادة تعريف [ ]

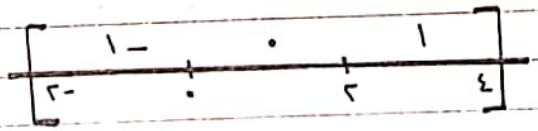
خطوات الحل:

- نجد طول الدرجة = $\frac{١}{\text{معامل س}}$
- نبدأ البدرتكاز من الصفر على خط الأعداد
- نحدد الفترة على خط الأعداد
- نجد كل قاعدة كعدد صحيح

أمثلة: اعد تعريف الاقترانات التالية:

١) $ق(س) = [\frac{س}{٢}]$ ، $س \in [-٢، ٤]$

الحل: ل = ٢ البدرتكاز من الصفر

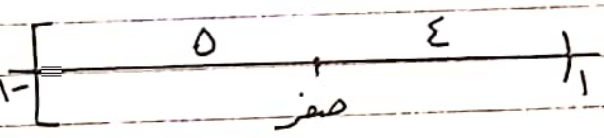


$$ق(س) = \begin{cases} ١- & ، ٢- \leq س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ١ & ، ٢ \leq س < ٤ \\ ٢ & ، س = ٤ \end{cases}$$

المساواة على اليمين لأن معامل س موجب

٢) $ق(س) = [٥ - س]$ ، $س \in [-١، ١]$

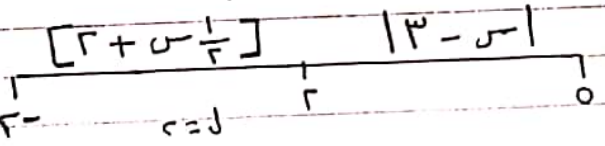
ل = ١ البدرتكاز من الصفر

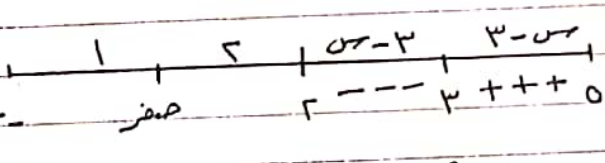


$$ق(س) = \begin{cases} ٦ & ، س = ١- \\ ٥ & ، ١- < س \leq ٠ \\ ٤ & ، ٠ < س < ١ \end{cases}$$

المساواة على اليسار لأن معامل س سالب

٣) $ق(س) = \begin{cases} [\frac{١}{٢}س + ٢] & ، ٢- \leq س < ٢ \\ |س - ٣| & ، ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$





$$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، ٢- \leq س < ٠ \\ ٢ & ، ٠ \leq س < ٢ \\ ٣ - س & ، ٢ \leq س < ٣ \\ س - ٣ & ، ٣ \leq س \leq ٥ \end{cases}$$

ثالثاً: بحث الاتصال على فترة

يتم بحث الاتصال على مرحلتين

١ البحث في القواعد

حيث تهتم بشكل ونوع القاعدة كما يلي:

- كل كثير حدود متصل دائماً
  ٣ ، س ، ٥ + س^{٢} ، س^{٢} - ٤س
- الاقترانات النسبية معرفة ومتصلة على ح ماعدا جذور المقام

$\frac{س + ١}{س - ١}$ متصل على ح - {١}

$\frac{٣س}{س^{٢} - ٤}$ متصل على ح - {±٢}

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com
الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

$\frac{س}{س^2+9}$ متصل على ح لأن المقام لا يتحلل

- اقتران جاس ، جتاس متصل دائماً
- الجذر التربيعي متصل على مجاله ويتم على الخط
- الجذر الفردي متصل على ح

ملاحظة:

يمكن خط كثير حدود مع نسبي مع جذر

$س^2 + \frac{4}{س}$ ، $س^2 - \sqrt{س}$

٢ البحث في النقط وهي نوعان

* التحول

* الأطراف المغلقة (التي لها مساواة)

حيث يتم بحث اتصالها من جهة واحدة فقط كما يلي

$[ب ، أ]$

$ق(أ) = نها_{س \to أ^+} ق(س)$ ، $ق(ب) = نها_{س \to ب^-} ق(س)$

أمثلة:

١) $ق(س) = \begin{cases} س^3 & ، س \geq 1 \\ \frac{س}{س-3} & ، س < 1 \end{cases}$

ابحث اتصاله على الأعداد الحقيقية (ح)

الحل: السؤال جاهز لعدم وجود $|س|$ ، $[س]$

- القواعد: متصلة على مجالاتها
- البحث في النقط ، عند $س = 1$ (تحول)

$ق(1) \stackrel{؟}{=} نها_{س \to 1^+} ق(س) = نها_{س \to 1^-} ق(س)$

$1 = 1 \neq -1$

ق غير متصل عند $س = 1$

ق متصل على ح $- \{1\}$

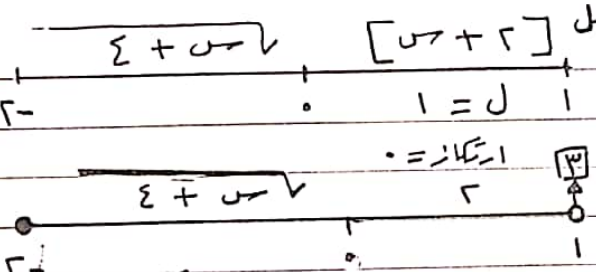
٢) $ق(س) = \begin{cases} \sqrt{س+4} & ، -2 \leq س < 0 \\ 2 & ، س = 0 \\ [2 + س] & ، 0 < س \leq 1 \end{cases}$

فإن ق متصلاً على الفترة

أ) $[-2 ، 1]$ ب) $[-2 ، 1] - \{0\}$

ج) $(-2 ، 1)$ د) $(-2 ، 1) - \{0\}$

الحل



القواعد: متصلة على مجالاتها

عند $س = -2$ $ق(-2) = نها_{س \to -2^+} ق(س)$

عند $س = 0$

$ق(0) \stackrel{؟}{=} نها_{س \to 0} ق(س)$

$2 = 2 = 2$

ق متصل عند $س = 0$

عند $س = 1$

$ق(1) \neq نها_{س \to 1^-} ق(س)$

$\therefore$ ق متصل على $[-2 ، 1)$ (ع)

٣) $ق(س) = \begin{cases} س+2 & ، |س| \geq 2 \\ س^2 & ، |س| < 2 \end{cases}$

فإن الاقترانان متصل على الفترة

أ) ح ب) ح $- \{-2\}$

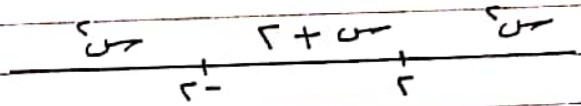
ج) ح $- \{-2 ، 2\}$ د) ح $- \{2\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

الحل :

$|س| \leq ٢ \leftarrow -٢ \leq س \leq ٢$ (محصورة)



قواعد متصلة على مجالاتها

$س = ٢ \leftarrow ه(٢) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٢^+} ه(س) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٢^-} ه(س)$

$٤ = ٤$ متصل عند $س = ٢$

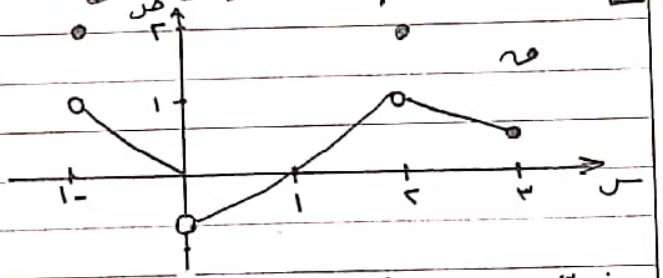
$س = -٢ \leftarrow ه(-٢) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to -٢^+} ه(س) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to -٢^-} ه(س)$

$٠ = ٠$ ، $٤ \neq ٠$

غير متصل عند $س = -٢$

$\therefore$ ه متصل على $ح - \{-٢\}$ (ب)

٤ الشكل المجاور يمثل منحنى ه



فإن ه(س) متصل على الفترة

أ) $[-١ ، ٣]$ ب) $(-١ ، ٣) - \{٠ ، ٢\}$

ج) $(-١ ، ٣] - \{٠\}$ د) $(-١ ، ٣] - \{٠ ، ٢\}$

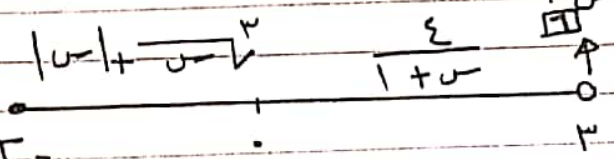
٥ $ه(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س + ١} + |س| & ، -٢ \leq س < ٠ \\ ٦ & ، س = ٣ \end{cases}$

فإن ه متصلاً على الفترة

أ) $[-٢ ، ٣]$ ب) $[-٢ ، ٣) - \{٠\}$

ج) $[-٢ ، ٣) - \{-١ ، ٠\}$ د) $(-٢ ، ٣]$

الحل :



القواعد : متصلة على مجالاتها

-٢^+ متصل ، ٣ غير متصل

$س = ٠ \leftarrow ه(٠) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٠^+} ه(س) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٠^-} ه(س)$

$٤ = ٤ \neq ٠$ غير متصل

$\therefore$ ه متصل على $[-٢ ، ٣) - \{٠\}$ (ب)

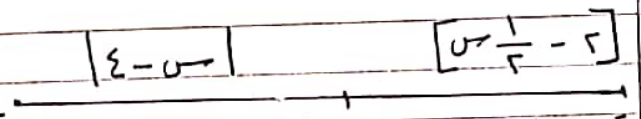
تمرين محلول

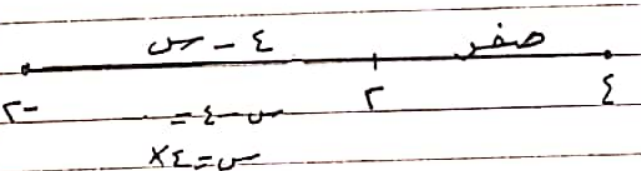
$ه(س) = \begin{cases} |س - ٤| & ، |س| \leq ٢ \\ [٢ - \frac{١}{٢}س] & ، ٢ < س \leq ٤ \end{cases}$

ابحث اتصال ه على $[-٢ ، ٤]$

الحل : نجزء المجال أولاً

$|س| \leq ٢ \leftarrow -٢ \leq س \leq ٢$





القواعد : متصلة على مجالاتها

$س = ٢ \leftarrow ه(٢) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٢^+} ه(س) \stackrel{؟}{=} \text{نها}_{س \to ٢^-} ه(س)$

$٢ \neq$ صفر $= ٢$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

ق غير متصل عند س = ٢

عند س = -٢^{+} متصل ، عند س = ٤ متصل

∴ ق متصل على $[-٢، ٤] - \{٢\}$

٦ إذا كان ق(س) = $\frac{٣}{[-س]+٣}$ ،

س ∈ $[-١، ٠]$ فإن ق متصل على الفترة

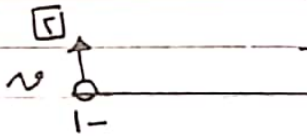
أ) $[-١، ٠]$ ب) $(-١، ٠]$

ج) $(-١، ٠)$ د) $[-١، ٠)$

الحل : نعيد تعريف $[-س]$ على $[-١، ٠]$

ل = ١ ، إذا كان $[-س] = ٠$ ⟸ صفر $\leq -س < ١$

ق(س) = $\begin{cases} ٢ & ، س = -١ \\ ٣ & ، -١ < س \leq ٠ \end{cases}$



ق متصل على الفترة $(-١، ٠]$ (ب)

تمرين محلول

ق(س) = $\begin{cases} \frac{ظا ٣س}{س} & ، ٠ < س < \frac{\pi}{٦} \\ ؟ & ، س = ٠ \\ ٣ جتا س & ، \frac{-\pi}{٦} \leq س < ٠ \end{cases}$

ابحث اتصال ق على $(\frac{-\pi}{٦}، \frac{\pi}{٦})$

الحل : القواعد متصلة على مجالاتها

عند س = ٠

ق(٠) ؟ نهـا ق(س) ؟ نهـا ق(س)
س ⟸ ٠ من اليمين ، س ⟸ ٠ من اليسار

٣ = ٣ = ٢

ق متصل عند س = ٠

∴ نبحث الأطراف لأنها مفتوحة

∴ ق متصل على $(\frac{-\pi}{٦}، \frac{\pi}{٦})$

٧ ق(س) = $\frac{س - ٢}{(س-٢)^{٢} - ٩}$

ما قيم س التي تجعل ق غير متصل

الحل : أصفار المقام

$(س-٢)^{٢} - ٩ = ٠ \leftarrow (س-٢)^{٢} = ٩$

س - ٢ = ٣ ، س - ٢ = -٣

س = ٥ ، س = -١

٨ ق(س) = $\frac{س^{٣}}{س^{٢} - ٩س + ٤}$ متصل على ح

ما قيمة الثابت ٩ ؟

الحل :

∵ ق نسبي متصل على ح

∴ لا يوجد أصفار مقام

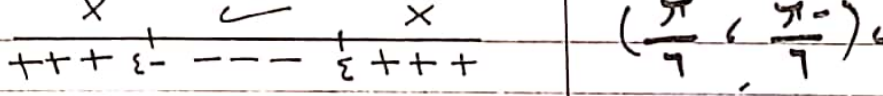
ولأن المقام تربيعي لا يوجد له أصفار

∴ لا يمثل لذلك المميز < صفر (سالب)

$ب^{٢} - ٤ ٩ جـ < ٠$

$٩^{٢} - ٤ \times ١ \times ٤ < ٠$

$٩^{٢} - ١٦ < ٠$



٩ ∈ $(-٤، ٤)$

تمرين محلول

ق(س) = $\begin{cases} \frac{ظا ٩س}{٢س} & ، -\frac{\pi}{٤} \leq س < ٠ \\ \frac{٣}{٢} & ، س = ٠ \\ ب(س+١) & ، ٠ < س \leq \frac{\pi}{٤} \end{cases}$

ما قيم الثوابت ٩ ، ب التي تجعل ق متصلاً على $[\frac{-\pi}{٤}، \frac{\pi}{٤}]$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

Omar Aljabr عمر الجبر
www.omaraljabr.com

الحل: $هـ$ متصل عند $س = ٠$

$\therefore هـ(س) = هـ(٠) \leftarrow ب = ٣$

$س \to ٠^+$

$\therefore هـ(س) = هـ(٠) \leftarrow \frac{م}{٢} = ٣ \leftarrow م = ٦$

$س \to ٠^-$

امتحان قصير

١ $هـ(س) = \begin{cases} [س+٢] & ، س = \frac{١}{٢} \\ ٤س & ، \frac{١}{٢} < س < ١ \\ |٦س - ٢| & ، س = ١ \end{cases}$

فإنّ $هـ$ متصل على الفترة

أ) $[\frac{١}{٢}, ١]$ ب) $[\frac{١}{٢}, ١)$

ج) $(\frac{١}{٢}, ١]$ د) $(\frac{١}{٢}, ١)$

٢ $هـ(س) = \begin{cases} \frac{|س|}{س} & ، س \neq ١ ، س \neq ٠ \\ \frac{١}{٢}س + \frac{١}{٢} & ، س \leq ١ \end{cases}$

فإنّ $هـ$ متصل على الفترة

أ) $ح$ ب) $ح - \{٠\}$

ج) $ح - \{١\}$ د) $ح - \{٠، ١\}$

٣ إذا كان $هـ(س) = \frac{س^٤}{م س^٤ + ٣س - ب}$

متصل على $ح - \{-٢، ١\}$ فإنّ قيم الثوابت $م$ ، $ب$ على الترتيب

أ) ٣ ، ٦ ب) ٦ ، ٣

ج) ١ ، -٢ د) -٢ ، ١

٤ إذا كان $هـ(س) = \frac{٥س + ١}{|س - ٢| - ٤}$

فإنّ قيم $س$ التي تجعل $هـ$ غير متصل

أ) $\{٦\}$ ب) $\{-٢\}$

ج) $\{-٢، ٦\}$ د) $\{٢، -٦\}$

٥ $هـ(س) = [\frac{س}{٢}]$

فإنّ قيم $س$ التي تجعل $هـ$ غير متصل

أ) $ح$ ب) $\{٢ن : ن \in ص^+\}$

ج) $ح - \{٠\}$ د) $\{٢ن : ن \in ص\}$

٦ $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & ، |س - ١| \leq ٣ \\ -٤س & ، |س - ١| > ٣ \end{cases}$

فإنّ $هـ$ متصل على الفترة

أ) $ح - \{-٢، ٣\}$

ب) $ح - \{-٢\}$

ج) $ح - \{-٢، ٤\}$

د) $ح - \{٤\}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner