المملكة الأردنية الهاشمية
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

# الرياضيات

## الصف الثاني عشر

### للفرعين العلمي والصناعي

الرياضيات
الصف الثاني عشر
للفرعين العلمي والصناعي
١٤٣٨هـ / ٢٠١٧م

ISBN:978-9957-84-771-5
9 789957 847715

مطبعة مكة

# الرياضيات

## الصف الثاني عشر

### للفرعين العلمي والصناعي

النّاشر
وزارة التربية والتعليم
إدارة المناهج والكتب المدرسية

يسر إدارة المناهج والكتب المدرسية استقبال ملاحظاتكم وآرائكم على هذا الكتاب على العناوين الآتية:
هاتف: ٤٦١٧٣٠٤/٥٠٨، فاكس: ٤٦٣٧٥٦٩، ص.ب. (١٩٣٠)، الرمز البريدي: ١١١١٨
أو على البريد الإلكتروني: E-mail: Scientific.Division@moe.gov.jo

قررت وزارة التربية والتعليم تدريس هذا الكتاب في جميع مدارس المملكة الأردنية الهاشمية بناءً على قرار مجلس التربية والتعليم رقم ٢٠١٧/٢م تاريخ ٢٠١٧/١/١٧م بدءًا من العام الدراسي ٢٠١٧ / ٢٠١٨م.



عمان / الأردن – ص . ب (١٩٣٠)

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنيّة
( ١٥٦٩/ ٣ /٢٠١٧)

ISBN: 978 – 9957 – 84 – 771-5

أشرف على تأليف هذا الكتاب كل من:

أ.د. حسن زارع هديب (رئيسًا)
أ.د. أحمد عبد الله رحيل
أ.د. عبد الله محمد ربابعة
د. معاذ محمود الشياب

وقام بتأليفه كل من:

د. لانا كمال عرفة
إبراهيم أحمد عمايرة
د. يوسف محمد صبح
د. حسين عسكر الشرفات
نفين أحمد جوهر
أمل حسني الخطيب

التحرير العلمي : نفين أحمد جوهر

التصميم : عمر أحمد أبوعليان
الرسم : عمر أحمد أبو عليان
التصوير : أديب أحمد عطوان
التحرير اللغوي : ميساء عمر الساريسي
التحرير الفني : نداء فؤاد أبو شنب
الإنتاج : علي محمد العويدات

دقّق الطباعة : د. لانا كمال عرفة
راجعها : نفين أحمد جوهر

الطبعة الأولى
١٤٣٨هـ/ ٢٠١٧م

# قائمة المحتويات

الموضوع | الصفحة

## الفصل الدراسي الأول

## الفصل الدراسي الثاني

## المقدمة

بسم الله الرحمن الرحيم

نضع بين أيديكم كتاب الرياضيات للصف الثاني عشر للفرعين العلمي والصناعي، الذي أُعِدَّت محتوياته بشكل ينسجم مع التطورات والتغيرات في مختلف المجالات، ومعايير العمليات والمحتوى العالمية (NCTM,2000)*، مثل: حل المسألة، والتبرير والبرهان، والربط، والتواصل، والتمثيل، والنمذجة.

اعْتُمِدَت طرائق رياضية مختلفة في تقديم المحتوى الرياضي، كالاستقراء، وحلّ المشكلات، بالإضافة إلى تقديم المسائل والتمارين التي تنمي مهارات التواصل، والتفكير الرياضي، وحُلَّت العديد من التمارين والمسائل الرياضية بأكثر من طريقة؛ ما يكسب الطلبة مرونة التفكير.

هذا وقد تم التركيز في الكتاب على تقديم المفهوم الرياضي من خلال الرسوم والأشكال والألوان، مما يساعد على تثبيت المفهوم ومراعاة أنماط تعلم الطلبة المختلفة.

تقع مادة الكتاب في ست وحدات موزعة على فصلين دراسيين، حيث يضم الفصل الأول ثلاث وحدات هي: النهايات والاتصال، والتفاضل، و تطبيقات التفاضل.

أما الفصل الدراسي الثاني فيتضمن ثلاث وحدات هي: التكامل وتطبيقاته، والقطوع المخروطية، والإحصاء والاحتمالات.

ونسأل الله أن نكون قد وفقنا في تقديم المعرفة العلمية بطريقة منظّمة تنظيمًا منطقيًّا ونفسيًّا، الأمر الذي يُسهم في فهمها والتمكّن من مهاراتها.

علمًا بأنَّ عملية تطوير المناهج والكتب المدرسية عملية مستمرة، لذا نرجو من زملائنا المعلمين وأولياء الأمور تزويدنا بأي ملاحظات تغني الكتاب وتسهم في تحسينه، بما يلبي احتياجات الطلبة وطموحات المجتمع الأردني.

# الفصل

# الدراسي

# الأول

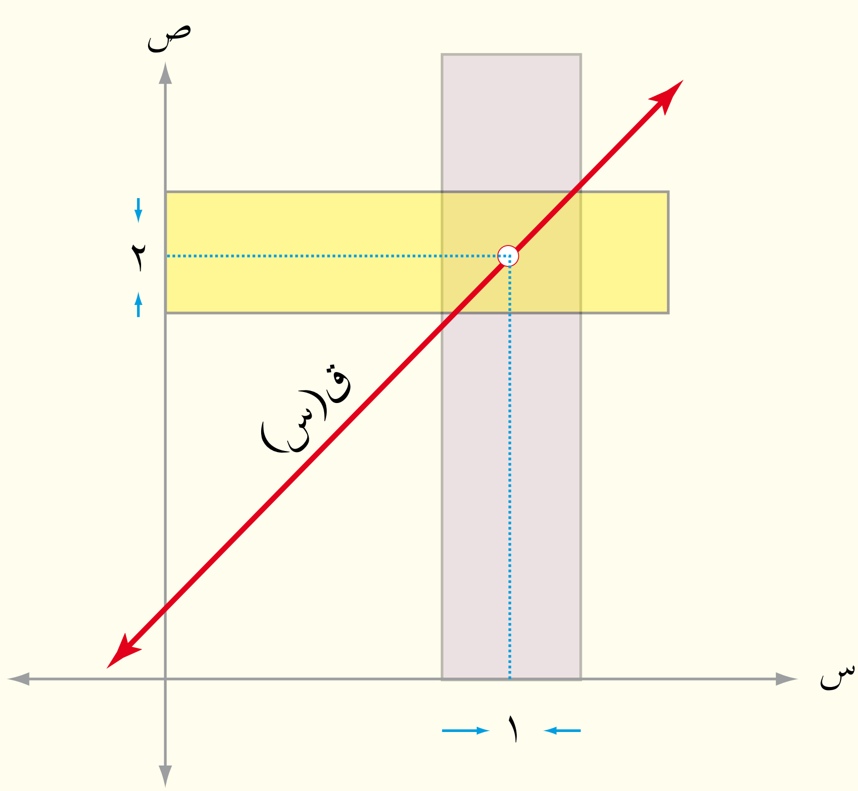
# الوحدة الأولى

١

# النهايات والاتصال

## Limits and Continuity

نشأ علم التفاضل والتكامل لوصف الكيفية التي تتغيرفيها الأشياء، ويعتمد كلٌّ من التفاضل والتكامل بصورة أساسية على مفهوم النهاية. تتناول هذه الوحدة مفهومي النهايات والاتصال اللذين يشكلان مقدمة لعلم التفاضل.



**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- تعرف مفهوم النهاية.
- إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًّا.
- تعرف نظريات النهايات وتوظيفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- إيجاد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.
- تعرف مفهوم الاتصال عند نقطة، وعلى فترة.
- البحث في اتصال اقتران عند نقطة، وعلى فترة.

الفصل الأول

# النهايات

# Limits

## النتاجات

- تتعرف مفهوم النهاية.
- تجد قيمة نهاية اقتران عند عدد بيانيًا.
- تتعرف نظريات النهايات وتوظفها لإيجاد قيمة النهاية عند عدد.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات نسبية وكسرية ومتشعبة.
- تجد قيمة النهاية عند عدد لاقترانات مثلثية.

## أولاً مفهوم النهاية Concept of Limit

إذا كان ق(س) $= \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ ، فما مجال الاقتران ق، وهل يمكن التنبؤ بسلوك الاقتران ق عندما تقترب قيم س من العدد ١؟

تعلمت سابقا إيجاد مجال الاقتران النسبي، فمجال الاقتران ق(س) $= \frac{س^٢ - ١}{س - ١}$ هو ح ـ{١}، لماذا؟

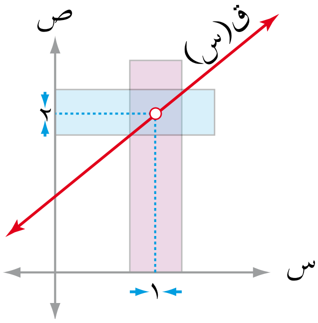
يمكن دراسة سلوك الاقتران ق عندما تقترب قيم س من العدد ١، من خلال دراسة الجدول الآتي:

| س | ١,١ | ١,٠١ | ١,٠٠١ | ١,٠٠٠١ | ١ | ٠,٩٩٩٩ | ٠,٩٩٩ | ٠,٩٩ | ٠,٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ٢,١ | ٢,٠١ | ٢,٠٠١ | ٢,٠٠٠١ | غير معرفة | ١,٩٩٩٩ | ١,٩٩٩ | ١,٩٩ | ١,٩ |

لاحظ أنه كلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهة اليمين (أي س>١)، فإنَّ قيم ق(س) تقترب من العدد ٢، ويعبر عن ذلك بالرموز: $\lim_{س \to ١^+}$ ق (س) = ٢

وتُقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهة اليمين تساوي ٢ .

وكلما اقتربت قيم س من العدد ١ من جهة اليسار (أي س<١)، فإن قيم ق(س) تقترب أيضا من العدد ٢، ويعبر عن ذلك بالرموز: $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٢



الشكل (١-١)

وتُقرأ: نهاية الاقتران ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهة اليسار تساوي٢.

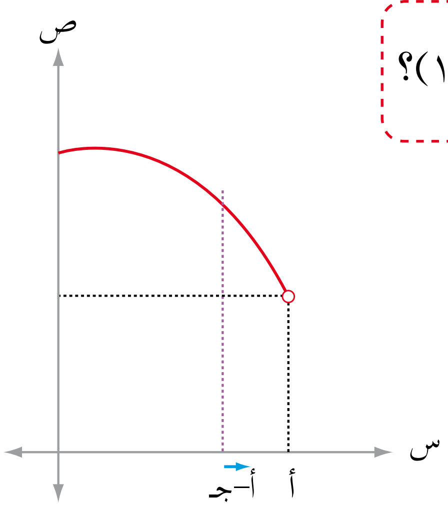
وفي حالة $\underset{س \to ١^+}{\text{نهـا}}$ ق (س) = $\underset{س \to ١^-}{\text{نهـا}}$ ق (س) ، نقول إنَّ نهاية ق(س) عندما تقترب قيم س من العدد ١ موجودة وتساوي ٢

ويعبر عن ذلك بالرموز: $\underset{س \to ١}{\text{نهـا}}$ ق (س) = ٢ ،

والشكل (١-١) يوضح منحنى الاقتران ق(س).

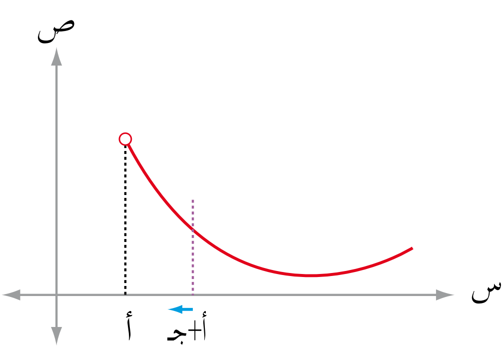
**فكر وناقش**

لماذا رسمت حلقة على منحنى الاقتران ق في الشكل (١-١)؟



الشكل (١-٢)

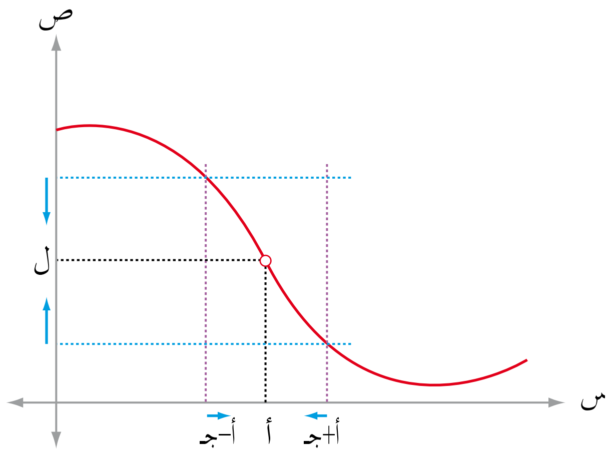
ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ من جهة اليسار، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند أ من جهة اليسار على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ - جـ، أ)، انظر الشكل (١-٢).



الشكل (١-٣)

ولتحديد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ من اليمين، فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند أ من اليمين على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة ( أ ، أ + جـ)، انظر الشكل(١-٣).

ولإيجاد نهاية اقتران عندما تقترب قيم س من عدد حقيقي مثل أ فإنَّه من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا على فترة مفتوحة قصيرة الطول على الصورة (أ − جـ ، أ + جـ)، وتحوي العدد أ، حيث جـ عدد حقيقي صغيرجدًّا، (وليس من الضروري أن يكون الاقتران معرّفًا عند العدد أ نفسه). انظر الشكل (١−٤).



الشكل (١−٤)

**تعميم**

إذا كانت : $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) = ل، حيث أ ، ل أعداد حقيقية، فإنَّ:

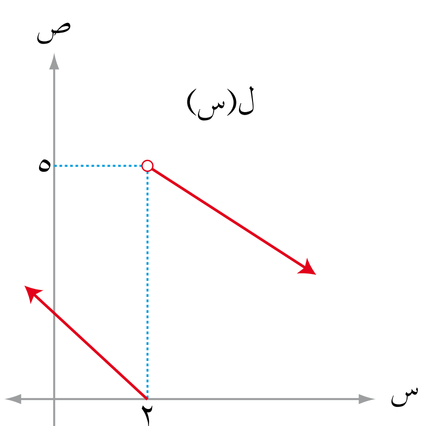
$\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة، وتكون $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ل

وإذاكانت $\lim_{س \leftarrow أ^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow أ^-}$ ق(س) ، فإنَّ $\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة.

**مثال ١**

معتمدًا الشكل (١−٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل المعرف على ح، جد:

$\lim_{س \leftarrow ٢}$ ل (س)



الشكل (١−٥)

**الحل**

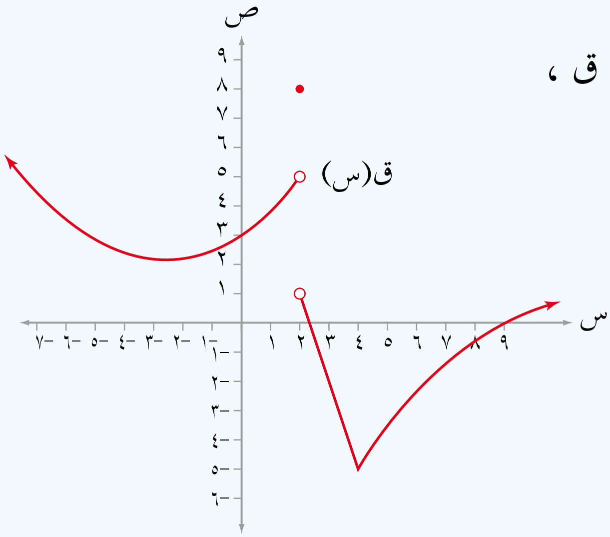
من خلال الشكل(١−٥) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره (لماذا؟)

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ٥ ، $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = صفرًا

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) ، إذن $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) غير موجودة.

## تدريب ١

معتمدًا الشكل(١–٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق ، جد كلًّا مما يأتي إن أمكن ذلك:




الشكل (١–٦)

١) $\lim_{\text{س} \to ٢^{+}} \text{ق (س)}$

٢) $\lim_{\text{س} \to ٢^{-}} \text{ق (س)}$

٣) $\lim_{\text{س} \to ٢} \text{ق (س)}$

## مثال ٢

معتمدًا الشكل (١–٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ك، جد كلًّا مما يأتي:

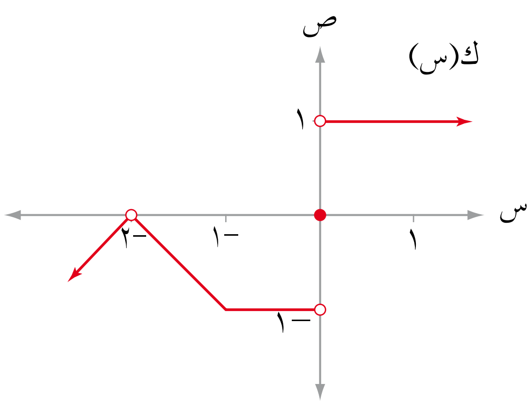
١) $\lim_{\text{س} \to ١} \text{ك (س)}$

٢) $\lim_{\text{س} \to ٠} \text{ك (س)}$

٣) $\lim_{\text{س} \to -٢} \text{ك (س)}$

٤) $\lim_{\text{س} \to -١^{-}} \text{ك (س)}$

٥) $\lim_{\text{س} \to -١} \text{ك (س)}$




الشكل (١–٧)

### الحل

١) ١ — تحقّق شرط النهاية

٢) غير موجودة — لأنَّ النهاية من اليمين لا تساوي النهاية من اليسار

٣) صفر — تحقّق شرط النهاية

٤) ١– — لماذا؟

٥) ١– — لماذا؟

## مثال ٣

معتمدًا الشكل (١–٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{-\text{س}}$ ، جد كلًّا مما يأتي:

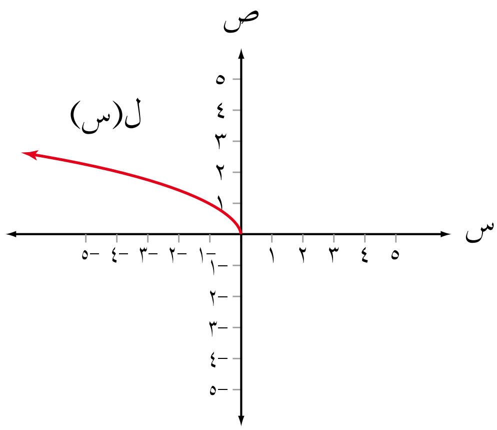
١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ل(س)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ل(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ل(س)

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ل(س)

٥) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ل(س)




الشكل (١–٨)

### الحل

لاحظ أنَّ مجال الاقتران ل هو: س ≤ صفر، لماذا؟

١) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة على يمين الصفر.

٢) صفر — الاقتران معرَّف على فترة مفتوحة على يسار الصفر.

٣) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة حول الصفر.

٤) غير موجودة — الاقتران غير معرَّف على فترة مفتوحة حول العدد ١.

٥) ١ — الاقتران معرَّف على فترة مفتوحة حول العدد –١ والنهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار.

## تدريب ٢

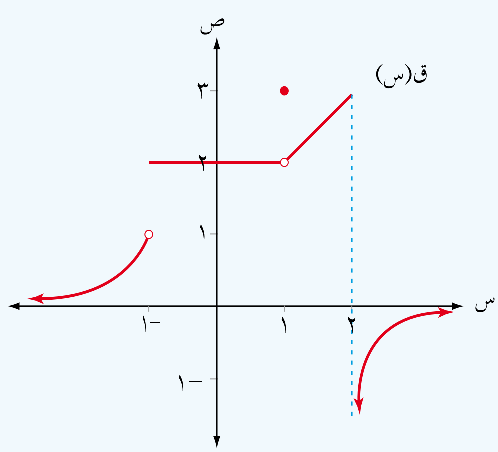
بالاعتماد على الشكل (١–٩) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرَّف على ح، جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow -١}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٤) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢^{-}}{\text{نهــا}}$ ق(س)




الشكل (١–٩)

### تحدث

تحدث إلى زملائك بشكل عام عن الحالات التي تكون فيها $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

١) معتمدًا الشكل (١–١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح ، جد كلًّا مما يأتي:

أ ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٦^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow ٦^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

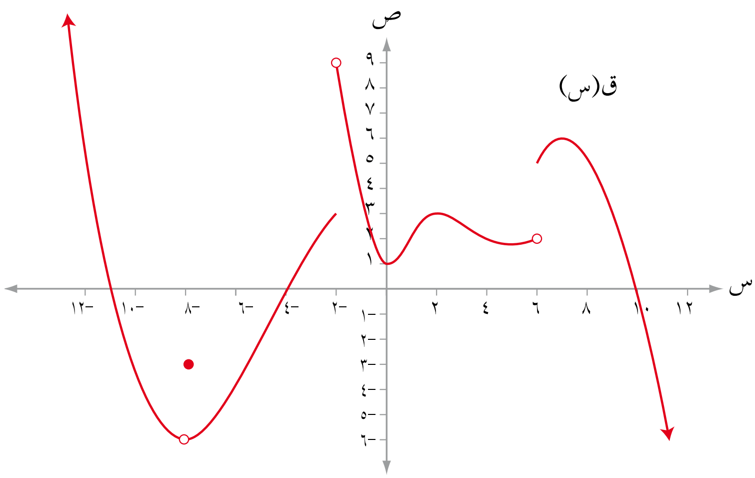
جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)

د ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـا}}$ ق (س)

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٨^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

و ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٨^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س)

ز ) $\underset{\text{س} \leftarrow ١٠}{\text{نهـا}}$ ق(س)




الشكل (١–١٠)

٢) معتمدًا الشكل (١–١١) الذي يمثل منحنى الاقتران ل(س) = $\sqrt{\text{س} + ٤}$

جد كلًّا مما يأتي:

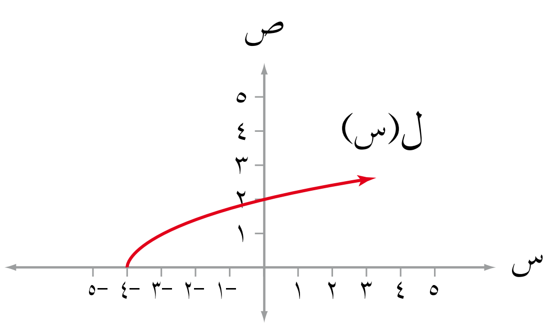
أ ) مجال الاقتران ل

ب) $\underset{\text{س} \leftarrow -٤^{+}}{\text{نهـا}}$ ل(س)

جـ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٤^{-}}{\text{نهـا}}$ ل(س)

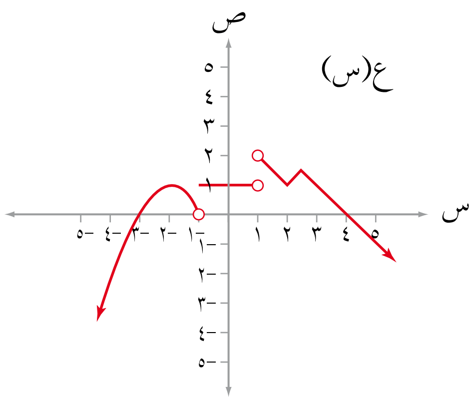
د ) $\underset{\text{س} \leftarrow -٤}{\text{نهـا}}$ ل(س)

هـ) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ل(س)




الشكل (١–١١)

٣) معتمدًا الشكل (١–١٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١–١٢)

أ ) مجموعة قيم أ حيث:

$\lim_{س \leftarrow أ}$ ع(س) = ١

ب) مجموعة قيم جـ حيث:

$\lim_{س \leftarrow جـ^{+}}$ ع (س) = ١

جـ) مجموعة قيم ك حيث:

$\lim_{س \leftarrow ك}$ ع(س) غير موجودة

د ) مجموعة قيم ل حيث:

$\lim_{س \leftarrow ل}$ ع(س) = صفرًا

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} ٢س + ١ & ،\ س \in ص \\ س^{٢} + ٤ & ،\ س \notin ص \end{cases}$ ، حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فجد $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ل(س)

# ثانيًا نظريات النهايات
## Theorems of Limits

إذا كان ق(س) = س$^{٤}$ + س$^{٢}$ ، فجد $\lim\limits_{س \leftarrow -١}$ $\sqrt{ق(س)}$

تعلمت في الدرس السابق إيجاد قيمة النهاية لاقتران عند عدد بيانيًّا، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد قيمة نهاية اقتران عند عدد جبريًّا باستخدام نظريات النهايات.

**نظرية (١)**

١) إذا كان أ، ب عددين حقيقيين، وكان ق(س) = ب لكلِّ س ∈ح، فإنَّ: $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ب

٢) إذا كانت أ ∈ح ، ن عدد صحيح موجب، وكان ق(س) = س$^{ن}$، فإنَّ:

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = أ$^{ن}$

**نظرية (٢)**

إذا كان ق ، هـ اقترانين، حيث أ، ب،جـ ، م أعداد حقيقية وكان:

$\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ب ، $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = جـ ، فإنَّ:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ( ق(س) + هـ (س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) + $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = ب + جـ

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ( ق(س) − هـ (س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) − $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = ب − جـ

٣) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ م ق(س) = م × $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = م × ب

٤) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ (ق(س) × هـ (س)) = $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) × $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ هـ (س) = ب × جـ

٥) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $\frac{ق(س)}{هـ (س)}$ = $\frac{\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)}{\lim\limits_{س \leftarrow أ} هـ (س)}$ = $\frac{ب}{جـ}$ ، حيث جـ ≠ صفرًا

٦) $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ $\sqrt[ن]{ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{\lim\limits_{س \leftarrow أ} ق(س)}$ = $\sqrt[ن]{ب}$ ، (بشرط ب ≥ صفر إذا كان ن عددًا زوجيًّا)

## مثال ١

إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ق}(\text{س})$      ٢) $\text{ق}(٢)$

**الحل**

١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{ق}(\text{س}) = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} (\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} + ٥)$

$= \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{س}^{٣} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} \text{س}^{٢} + \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} ٥$

$= ٨ + ٤ + ٥$

$= ١٧$

٢) $\text{ق}(٢)$ $= ٢^{٣} + ٢^{٢} + ٥$

$= ٨ + ٤ + ٥$

$= ١٧$      ماذا تلاحظ؟

### تعميم

إذا كان ق اقتران كثير حدود ، فإنَّ: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ق}(\text{أ})$

### فكر وناقش

أعطِ مثالًا يبين أنَّ العبارة الآتية غير صحيحة:

« إذا كان $\text{ق}(\text{أ}) = \text{ل}$ ، فإنَّ: $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \text{ق}(\text{س}) = \text{ل}$ »

## مثال ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} -\sqrt{\text{س} + ٣}$      ٢) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -١} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٥}{\text{س}^{٤} + ١}$

٣) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٢} (\text{س}+١)\sqrt{\text{س}^{٢} + ٢١}$

**الحل**

١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} -\sqrt{\text{س} + ٣} = \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} -١ \times \lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \sqrt{\text{س} + ٣}$

$$= -١ \times \sqrt{\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (س + ٣)}$$

$$= -١ \times \sqrt{٦} = -\sqrt{٦}$$

٢) $\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} \dfrac{س^{٢} + ٥}{س^{٤} + ١} = \dfrac{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (س^{٢} + ٥)}{\underset{س \leftarrow -١}{\text{نهـا}} (س^{٤} + ١)} = \dfrac{٦}{٢} = ٣$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) \sqrt{س^{٢} + ٢١} = \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} (س + ١) \times \underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \sqrt{س^{٢} + ٢١}$

$$= ٣ \times ٥ = ١٥$$

## تدريب ١

إذا كان ق(س) = ٢س ، هـ(س) = $س^{٣}$ + س ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهـا}} \Big( ق(س) + هـ(س) \times س \Big)$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{ق(س)}{هـ(س)}$

٣) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \Big( \sqrt{ق(س)} + ٣\sqrt{هـ(س)} \Big) + ١٥$

## مثال ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٣) $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

٤) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤|$

**الحل**

١) $\underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow -٣}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٤) = ٩ - ٤ = ٥$

٢) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} |س^{٢} - ٤| = \underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}} (س^{٢} - ٤) = ٥$

٣) لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٢ ويساره، (لماذا؟)

$$\lim_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^+} (س^٢ - ٤) = \text{صفرًا}$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} (٤ - س^٢) = \text{صفرًا}$$

وبما أن $\lim_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = \text{صفرًا}$

$$\therefore \lim_{س \leftarrow ٢} |س^٢ - ٤| = \text{صفرًا}$$

٤) $\lim_{س \leftarrow ١} |س^٢ - ٤| = \lim_{س \leftarrow ١} (٤ - س^٢) = ٣$

## تدريب ٢

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim_{س \leftarrow ٠} |س - ٨|$

٢) $\lim_{س \leftarrow ١٦} |س - ١٦|$

٣) $\lim_{س \leftarrow ٤} |س^٢ - ١٦|$

## مثال ٤

جد $\lim_{س \leftarrow ٤} [٠,٥ س]$

### الحل

أعد تعريف [ ٠,٥ س] دون استخدام رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد ٤

$$[٠,٥ س] = \begin{cases} ٠ \quad ، \quad ٠ \le س < ٢ \\ ١ \quad ، \quad ٢ \le س < ٤ \\ ٢ \quad ، \quad ٤ \le س < ٦ \end{cases}$$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد ٤ وعن يساره، (لماذا؟)

$\underset{\text{س}\leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}] = ٢$ ، $\underset{\text{س}\leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}] = ١$

بما أن $\underset{\text{س}\leftarrow ٤^{+}}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}] \neq \underset{\text{س}\leftarrow ٤^{-}}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}]$

$\therefore$ $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}]$ غير موجودة

### فكر وناقش

قامت سارة بحل المثال السابق كما يأتي:

$\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}} [٠,٥\ \text{س}] = [٠,٥ \times ٤] = [٢] = ٢$

ناقش مع زملائك الأخطاء التي ارتكبتها سارة في حلِّها للمثال.

### تدريب ٣

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نها}} [\text{س} - ٢]$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ١,٥}{\text{نها}} [٤ - ٢\text{س}]$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠,١}{\text{نها}} [\text{س} + ١]$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٤}{\text{نها}} [٠,٢٥\ \text{س}]$

### تدريب ٤

إذا كان ق(س) = [٢ − س] ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد قيم أ التي تجعل $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}}{\text{نها}}$ ق(س) غير موجودة

٢) جد قيم جـ التي تجعل $\underset{\text{س}\leftarrow \text{جـ}}{\text{نها}}$ ق(س) = −١

### فكر وناقش

بيِّن إذا كانت العبارات الآتية صحيحة أم لا، مبرّرًا إجابتك من خلال تقديم أمثلة:

١) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{+}}{\text{نها}} [\text{س}] = \text{أ}$ ، حيث أ عدد صحيح.

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow \text{أ}^{-}}{\text{نها}} [\text{س}] = \text{أ} - ١$ ، حيث أ عدد صحيح .

## مثال ٥

جد $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س - ٤}$

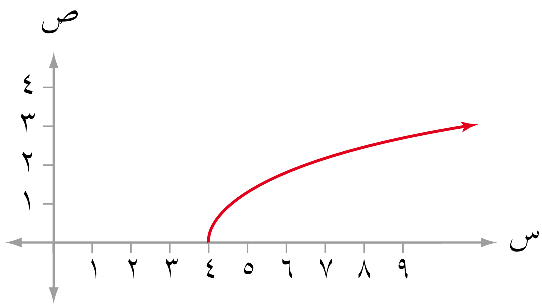
**الحل**

لابد من إيجاد مجال الاقتران

لاحظ أنَّ الاقتران معرَّف

على الفترة [٤ ، ∞)

انظر الشكل (١–١٣).




الشكل (١–١٣)

$\lim_{س \leftarrow ٤^+} \sqrt{س - ٤} = \sqrt{٤ - ٤} =$ صفرًا ق معرَّف على يمين العدد ٤

$\lim_{س \leftarrow ٤^-} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة ق غير معرَّف على يسار العدد ٤

∴ $\lim_{س \leftarrow ٤} \sqrt{س - ٤}$ غير موجودة لماذا؟

### فكر وناقش

أعط مثالًا على اقتران مثل ق(س) بحيث تكون ق(١) معرفة، لكن

$\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) غير موجودة

### تدريب ٥

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \leftarrow ٧} \sqrt{س - ٧}$

٢) $\lim_{س \leftarrow ٥} \sqrt{س - ٧}$

٣) $\lim_{س \leftarrow ٥} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

٤) $\lim_{س \leftarrow -٧} \sqrt{س^٢ - ٢٥}$

**مثال ٦**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س| & ، \quad س \geq ٠ \\ \sqrt{-س} & ، \quad س < ٠ \end{cases}$ ، فجد $\lim\limits_{س \to ٠}$ ق(س)، ثم جد ق(٠).

## الحل

بما أنَّ الاقتران ق يغير قاعدته عند س = ٠ ، فلا بد من البحث في النهاية عن يمين العدد صفر وعن يساره

$\lim\limits_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٠^+} |س|$ = $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ س = ٠

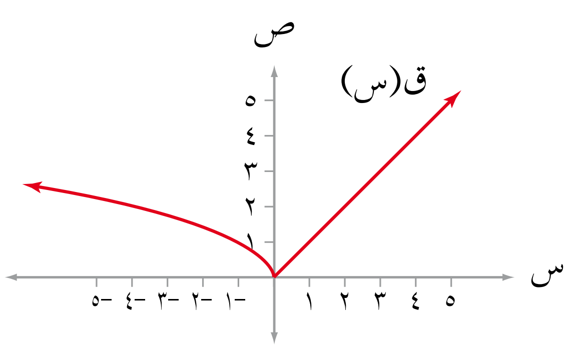
$\lim\limits_{س \to ٠^-}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٠^-} \sqrt{-س}$ = ٠

بما أن $\lim\limits_{س \to ٠^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \to ٠^-}$ ق(س) = ٠

∴ $\lim\limits_{س \to ٠}$ ق(س) = صفرًا

ق(٠) = صفرًا

انظر الشكل (١-١٤) الذي يبين منحنى الاقتران ق.




الشكل (١-١٤)

**تدريب ٦**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |س - ٢| & ، \quad س \geq ٢ \\ [٦ - س] & ، \quad س < ٢ \end{cases}$

فجد $\lim\limits_{س \to ٢}$ ق(س)

## تدريب ٧

إذا كان ق(س) = [س + ٥] ، ل(س) = [٤ − س] ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ق(س)

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ ل(س)

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ١}{\text{نهـا}}$ (ق(س) + ل(س))

ماذا تلاحظ؟

**تحدث**

تحدث إلى زملائك عن ملاحظاتك التي توصلت إليها من خلال حلك لتدريب (٧).

١) إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ − س − ٦ ، ل(س) = س$^{٢}$ −٢ س − ٣ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) $\lim_{س \leftarrow ١}$ (ق(س) + ل(س))

ب) $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س)×ل(س)

جـ) $\lim_{س \leftarrow ١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

د ) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (ل(س))$^{٤}$

هـ) $\lim_{س \leftarrow ٢} \sqrt[٣]{١ - ل(س)}$

و ) $\lim_{س \leftarrow -١} \frac{ل(س)}{ق(س)}$

٢)إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٢ ع(س) = ١٠ ، $\lim_{س \leftarrow ٢}$ ٣ل(س) +١ = ٧ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (٢ ع(س) + ل(س))

ب) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (ع$^{٣}$ (س) − ل$^{٢}$ (س))

جـ) $\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{\sqrt{ل(س)}}{ع(س)}$

د ) $\lim_{س \leftarrow ٢}$ (ع$^{٢}$ (س) − ل$^{٢}$ (س))

٣) جد كلًّا مما يأتي:

أ ) $\lim_{س \leftarrow ٥^{+}}$ | س$^{٢}$ − ٢٥ |

ب) $\lim_{س \leftarrow ٥^{-}}$ | س$^{٢}$ − ٢٥ |

جـ) $\lim_{س \leftarrow ٢^{-}}$ | س − ٢ |

د ) $\lim_{س \leftarrow ٨}$ | س$^{٢}$ − ٦٤ |

هـ ) $\lim_{س \leftarrow -٤}$ [س − ٢]

و ) $\lim_{س \leftarrow ١}$ (س [س] + | س |)

ز ) $\lim_{س \leftarrow ٥^{-}} \sqrt{٥ - س}$

ح) $\lim_{س \leftarrow ١} \sqrt{١ - س^{٢}}$

ط ) $\lim_{س \leftarrow -٢} \sqrt{س^{٢} + ٤س + ٤}$

٤) جد قيم جـ التي تجعل نهــــا (س←جـ) $\sqrt{٦ - س}$ غير موجودة.

٥) إذا كان ق(س)= [٢,٠س]، فجد قيم جـ التي تجعل نهــــا (س←جـ) [٢,٠س] = −١

٦) إذا كان ق(س) = { س$^{٢}$ − ٤ أ ، س ≤٣ ؛ [ ٦ − س ] ، س >٣ }

وكانت نهــــا (س←٣) ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

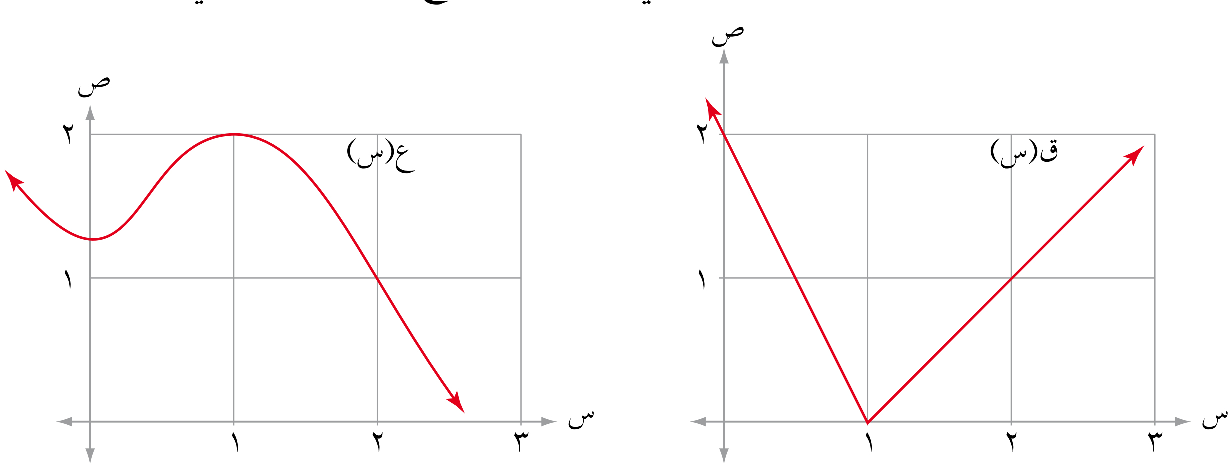
٧) معتمدًا الشكل (١−١٥) الذي يمثل منحنى الاقتران ل، جد كلًّا مما يأتي:

أ ) نهــــا (س←٢) ل(٣ س − ٣ )

ب) نهــــا (س←٢) (س + ل (س))

الشكل (١−١٥)

٨) معتمدًا الشكل(١−١٦)، الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، ع ،جد كلًّا مما يأتي:



الشكل (١−١٦)

أ ) نهــــا (س←١) (ق(س) + ع(س))

ب) نهــــا (س←٢) (ق(س) × ع(س))

جـ) $\lim_{س \leftarrow ١} \left( ٢\, ق(س-١) + ع(س) \right)$

٩) إذا كان ق كثير حدود يمر بالنقطة (−٣ ، ٤ )، وكانت $\lim_{س \leftarrow -٣} \left( س - ل(س) \right) = -١٠$

فجد $\lim_{س \leftarrow -٣} \left( ق^{٢}(س) - ٢\, ل(س) \right)$

١٠) إذا كان ع كثير حدود باقي قسمته على (س−٢) يساوي ٥ ، فجد
$\lim_{س \leftarrow ٢} (٣\, ع(س) + ٤\, س^{٢})$

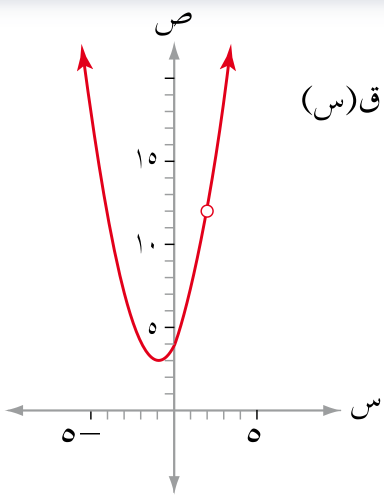
## ثالثًا نهايات اقترانات كسرية
## Limits of Fractional Functions

الشكل (١-١٧) يمثل منحنى $ق(س) = \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢}$

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ بيانيًّا.

٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ جبريًّا.



الشكل (١-١٧)

تعلمت في الدرس السابق إيجاد نهاية اقتران عند نقطة جبريًّا باستخدام نظريات النهايات، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهاية اقترانات كسرية.

ولإيجاد $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} ق(س)$ في المسألة الموضّحة بداية الدرس، لا نستطيع استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

حلِّل البسط لمحاولة اختصار المقدار (س - ٢) للتخلص من الحصول على صفر في المقام عند تطبيق نظرية (٢) فرع (٤)، كما يأتي:

$$\lim_{س \leftarrow ٢} \frac{س^{٣} - ٨}{س - ٢} = \lim_{س \leftarrow ٢} \frac{(س - ٢)(س^{٢} + ٢س + ٤)}{(س - ٢)}$$ لماذا؟

$$\lim_{س \leftarrow ٢} (س^{٢} + ٢س + ٤) = ١٢$$

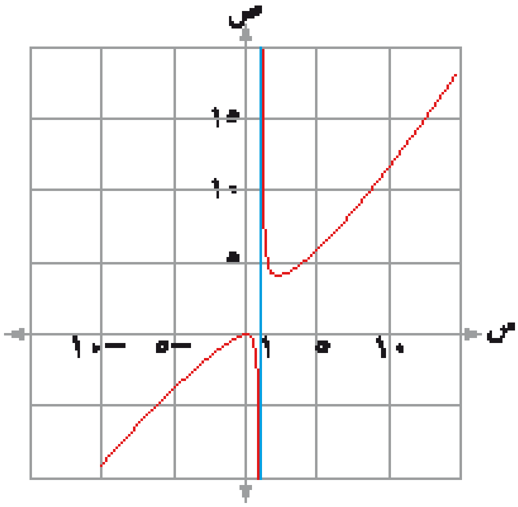
هل يمكنك التحقق من صحة الحل؟ كيف؟

**فكر وناقش**

لماذا يمكن اختصار المقدار (س - ٢) في البسط مع المقدار (س - ٢) في المقام عند إيجاد النهاية؟

## مثال ١

جد $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} \dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$



الشكل (١-١٨)

**الحل**

لاحظ أنَّ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ١} (\text{س} - ١)$ = صفرًا

وعليه لا يمكن استخدام النظرية الخاصة بحساب نهاية خارج قسمة اقترانين (لماذا؟)

ولا يمكن أيضا إجراء اختصار للتخلص من المقدار (س-١)، لماذا؟

وبالتالي فإنَّ النهاية هنا غير موجودة.

انظر الشكل (١-١٨) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$

**تحدث**

بالاستعانة بالشكل (١-١٨) تحدث لزملائك عن سلوك منحنى الاقتران ق(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ١}$ عندما تقترب قيم س من العدد ١ من جهتي اليمين واليسار.

**نتيجة**

إذا كانت $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ ق(س) = ل ، حيث ل عدد حقيقي ، ل ≠ ٠ ، $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}}$ هـ (س) = صفرًا ،

فإنَّ $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow \text{أ}} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{هـ (س)}}$ غير موجودة

## تدريب ١

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow -٥} \dfrac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} - ١٠}{\text{س} + ٥}$

٢) $\lim\limits_{\text{س} \leftarrow ٣} \dfrac{\text{س}^{٢} + ١}{\text{س} - ٣}$

## مثال ٢

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٤} + \dfrac{١}{-٤ + س}}{س}$

### الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟

ويمكن تبسيط المقدار من خلال توحيد المقامات كما يأتي:

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٤} + \dfrac{١}{-٤ + س}}{س} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{-٤ + س + ٤}{٤\,(-٤ + س) \times س}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س}{٤\,(-٤ + س) \times س}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \dfrac{١}{٤(-٤ + س)}$$

$$= \dfrac{-١}{١٦}$$

## مثال ٣

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\sqrt{س + ٦} - ٣}{س - ٣}$

### الحل

لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين، لماذا؟

يمكن تبسيط المقدار من خلال الضرب بمرافق البسط كما يأتي:

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\sqrt{س + ٦} - ٣}{س - ٣} \times \dfrac{\sqrt{س + ٦} + ٣}{\sqrt{س + ٦} + ٣}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س + ٦ - ٩}{(س - ٣)(\sqrt{س + ٦} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{\cancel{س - ٣}}{(\cancel{س - ٣})(\sqrt{س + ٦} + ٣)}$$

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٣} \dfrac{١}{\sqrt{س + ٦} + ٣} = \dfrac{١}{٦}$$

## تدريب ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \left(\frac{٢}{\text{س}} - \frac{٢}{٥}\right)\left(\frac{١}{\text{س}^{٢} - ٢٥}\right)$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٢}{\text{نهـا}} \frac{\text{س} - ٢}{\sqrt{\text{س} + ٣٤} - ٦}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ١} - \sqrt{١ - ٢\text{س}^{٢}}}{\text{س}^{٢}}$

## مثال ٤

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥^{+}}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$
٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٥}{\text{نهـا}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$

**الحل**

١) لا نستطيع تطبيق نظرية حاصل قسمة اقترانين لإيجاد النهاية، لماذا؟

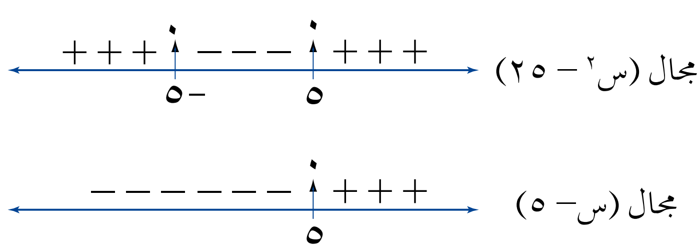
في هذه الحالة لابد من إيجاد مجال المقدار (لماذا؟)

مجال البسط هو: الفترة $[٥ ، \infty)$ ، والفترة $(-\infty ، -٥]$

مجال المقام هو: الفترة $[٥ ، \infty)$

إذن مجال المقدار هو: الفترة $(٥ ، \infty)$ (لماذا وُضِعَ رمز الفترة المفتوحة عند العدد ٥ ؟)

انظر الشكل(١-١٩)




الشكل (١-١٩)

لاحظ أنَّ كلًّا من البسط والمقام معرفان على يمين العدد ٥؛ لذا يمكن إيجاد نهاية المقدار عن يمين العدد ٥ فقط

إذن $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \sqrt{\dfrac{\text{س}^٢ - ٢٥}{\text{س} - ٥}}$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^+} \sqrt{\dfrac{(\text{س} + ٥)\cancel{(\text{س} - ٥)}}{\cancel{\text{س} - ٥}}} = \sqrt{١٠}$

**تذكر**

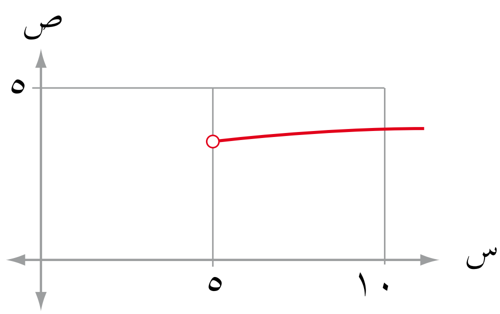
إذا كانت س > ٠ ، ص > ٠
فإنَّ:

$\dfrac{\sqrt{\text{س}}}{\sqrt{\text{ص}}} = \sqrt{\dfrac{\text{س}}{\text{ص}}}$

٢) $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ غير موجودة، لماذا؟

انظر الشكل (١-٢٠) الذي يبين منحنى الاقتران

$\text{ق(س)} = \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$




الشكل (١-٢٠)

**فكر وناقش**

١) بالاستعانة بالشكل (١-٢٠) فسّر لماذا $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ غير موجودة؟

٢) أوجد عبدالله $\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$ كما يأتي:

$\text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}} = \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \dfrac{\sqrt{\text{س}^٢ - ٢٥}}{\sqrt{\text{س} - ٥}}$

$= \text{نهـا}_{\text{س} \leftarrow ٥^-} \sqrt{\dfrac{(\text{س}+٥)\cancel{(\text{س}-٥)}}{\cancel{\text{س}-٥}}} = \sqrt{١٠}$

اكتشف الخطأ في حلّه ثم اكتب الصواب.

**تدريب ٣**

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٤}}{\sqrt{س - ٢}}$ ٢) $\lim\limits_{س \leftarrow ٢} \dfrac{\sqrt{س^٢ - ٤}}{\sqrt{س - ٢}}$

**مثال ٥**

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^٤ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$

**الحل**

حسب نظرية العامل فإنَّ المقدار(س – ١) عاملٌ من عوامل البسط ، و عاملٌ من عوامل المقام ، يمكن تحليل البسط باستخدام القسمة الطويلة أو القسمة التركيبية كما يأتي:

| | $س^٤$ | $س^٣$ | $س^٢$ | $س$ | $س^٠$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | ١ | ٠ | –٢ | ٠ | ١ |
| ١ | | ١ | ١ | –١ | –١ |
| | ١ | ١ | –١ | –١ | ٠ |

إذن، $س^٤ - ٢س^٢ + ١ = (س - ١)(س^٣ + س^٢ - س - ١)$

ومنه $\lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{س^٤ - ٢س^٢ + ١}{س^٣ - ١}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{\cancel{(س - ١)}(س^٣ + س^٢ - س - ١)}{\cancel{(س - ١)}(س^٢ + س + ١)}$

$= \lim\limits_{س \leftarrow ١} \dfrac{(س^٣ + س^٢ - س - ١)}{(س^٢ + س + ١)}$

= صفرًا (لماذا؟)

**تذكر**

$$\text{أ}^{3} - \text{ب}^{3} = (\text{أ} - \text{ب})(\text{أ}^{2} + \text{أب} + \text{ب}^{2})$$

$$\text{أ}^{3} + \text{ب}^{3} = (\text{أ} + \text{ب})(\text{أ}^{2} - \text{أب} + \text{ب}^{2})$$

## مثال ٦

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨}$

**الحل**

اضرب كلًّا من البسط والمقام بالمقدار $(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)$

$$\therefore \underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢}{\text{س} - ٨} \times \frac{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow ٨}{\text{نها}} \frac{\text{س} - ٨}{(\text{س} - ٨)(\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} + ٢\sqrt[٣]{\text{س}} + ٤)}$$

$$= \frac{١}{٤+٤+٤} = \frac{١}{١٢}$$

(حُلَّ المثال(٦) بطريقة أخرى من خلال فرض $\sqrt[٣]{\text{س}} = \text{ص}$ )

## تدريب ٤

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٧}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س} + ١} - ٢}{\text{س} - ٧}$

## مثال ٧

جد $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}} \dfrac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س} + ٢}$

**الحل**

**تذكَّر**

$$\sqrt{\text{س}^{٢}} = |\text{س}|$$

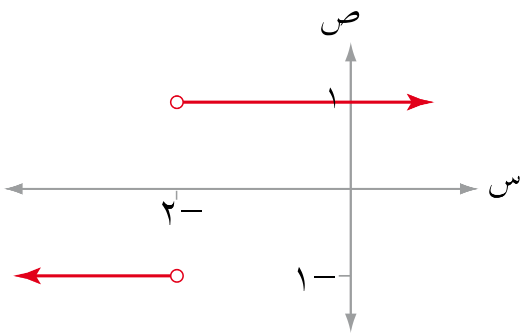
$$\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{\text{س}^{٢} + ٤\text{س} + ٤}}{\text{س} + ٢}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{\sqrt{(\text{س} + ٢)^{٢}}}{\text{س} + ٢} = \underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نها}} \frac{|\text{س} + ٢|}{\text{س} + ٢}$$

لا بد من إيجاد النهاية عن يمين العدد $-٢$ وعن يساره، لماذا؟

$$\lim_{س \leftarrow -٢^{+}} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -٢^{+}} \frac{س + ٢}{س + ٢} = ١$$



الشكل (١-٢١)

$$\lim_{س \leftarrow -٢^{-}} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$$

$$= \lim_{س \leftarrow -٢^{-}} \frac{-س - ٢}{س + ٢} = -١$$

إذن $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$ غير موجودة

انظر الشكل (١-٢١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) $= \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$ .

**فكر وناقش**

ادرس الشكل (١-٢١) ثم فسّر لماذا $\lim_{س \leftarrow -٢} \frac{|س + ٢|}{س + ٢}$ غير موجودة؟

١) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ ) $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \dfrac{(س + ١)^{٢} - ٨١}{(س - ٨)}$

ب) $\underset{س \leftarrow ٨}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt[٣]{س} - ٢}{٤ - \dfrac{س}{٢}}$

جـ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{١}{س} \left( \dfrac{١}{(س + ٢)^{٢}} - \dfrac{١}{٤} \right)$

د ) $\underset{س \leftarrow -٢}{\text{نهــا}} \dfrac{٥ - |٣س + ١|}{س^{٣} + ٨}$

هـ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{٦ - س\sqrt{س + ١}}{٩ - ٣س}$

و ) $\underset{س \leftarrow ٥}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١٠س + ٢٥}}{س - ٥}$

ز ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ١}}{\sqrt{س - ١}}$

ح ) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهــا}} \dfrac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١}$

ط ) $\underset{س \leftarrow ٧^{+}}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{س^{٢} - ٤٩}}{\sqrt{س - ٧}}$

ي ) $\underset{س \leftarrow ٢,٥}{\text{نهــا}} \dfrac{٢س - [٢س]}{٤س^{٢} - ٢٥}$

ك ) $\underset{س \leftarrow ٠}{\text{نهــا}} \dfrac{\sqrt{١ + س^{٢}} - \sqrt{١ - س^{٢}}}{س^{٢}}$

٢) إذا كان ق كثير حدود، وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \dfrac{ق(س) + ٥}{س - ٣} = ٤$ ،

$\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــا}} \left( ق(س) - ٢س + ٣ب \right) = ٧$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{٣ - س}{|س - ٣|} &، \quad س \le ٣ \\ جـ س^{٢} - ٤ &، \quad س > ٣ \end{cases}$

وكانت $\lim\limits_{س \to ٣}$ ق(س) موجودة، فجد قيمة الثابت جـ.

٤) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{أس^{٢} + ٢ب س + ٢}{س - ١} = ١$ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب.

٥) جد $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{(٦٤)^{س} - ٨^{س}}{١ - ٨^{س}}$

٦) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٣} - ٢٧}{٢س^{٢} + ٦س + ١٨} &، \quad س \le ع \\ س + ٥ &، \quad س > ع \end{cases}$

فجد قيمة الثابت ع التي تجعل $\lim\limits_{س \to ع}$ ل(س) موجودة.

٧) إذا كان ق(س) = $\dfrac{س^{٢} + ٥}{س^{٢} - ٥س + ٦}$

فجد قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \to أ}$ ق(س) غير موجودة.

٨) إذا كانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{ق(س) - ٦}{س - ١} = ٨$ ،وكانت $\lim\limits_{س \to ١} \dfrac{س^{٢} + ٢س - ٣}{ق(س) - ٦} + ب = \dfrac{٣}{٢}$

فجد قيمة الثابت ب.

٩) إذا كان هـ كثير حدود، وكانت $\lim\limits_{س \to ٠} \dfrac{هـ(س) + ٥}{س} = \dfrac{١}{٢}$ ،

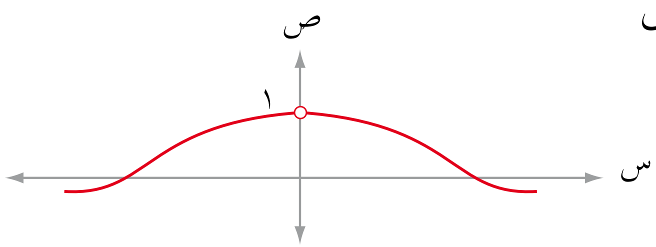
$\lim\limits_{س \to ٠} \left( هـ(س) - ٥ + ٣ جـ \right) = ٢$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

## رابعًا نهايات اقترانات مثلثية
## Limits of Trigonometric Functions

معتمدًا الشكل (١–٢٢) الذي يمثل منحنى

ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$

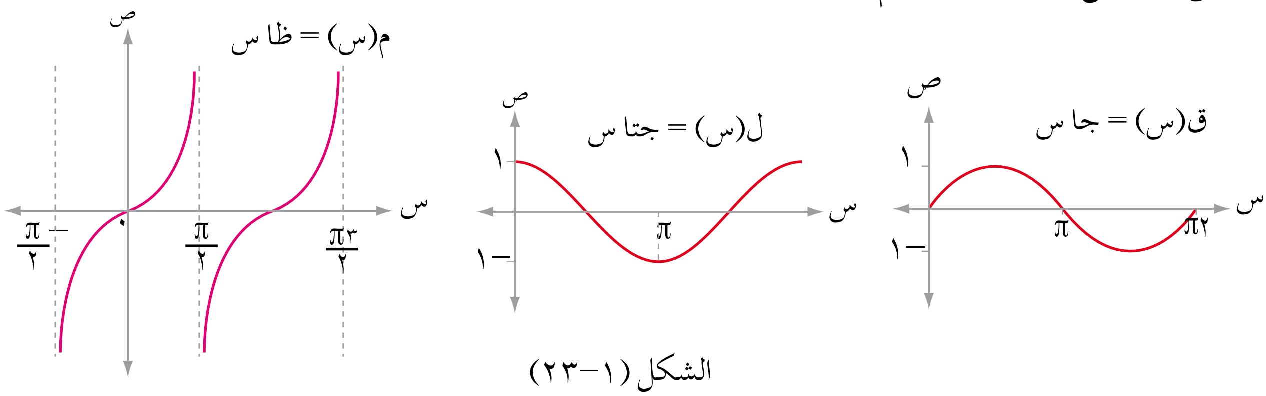
ما $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ق(س)؟



الشكل (١–٢٢)

تعلمت سابقًا إيجاد نهايات اقترانات كسرية، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد نهايات اقترانات مثلثية.

ادرس الشكل (١–٢٣)، ثم أجب عما يليه:



الشكل (١–٢٣)

١) $\underset{\text{س}\leftarrow \pi}{\text{نهـــا}}$ جاس =  ٢) جا π =

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow \pi}{\text{نهـــا}}$ جتاس =  ٤) جتا π =

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ ظا س =  ٦) ظا ٠ =

ماذا تلاحظ؟

من خلال إجابتك عما سبق يمكن التوصل إلى ما يأتي:

**تعميم**

١) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ جاس = جا أ

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ جتاس = جتا أ

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـا}}$ ظاس = ظا أ ، أ ∈ ح − $\{ \frac{\text{ن}}{٢} \pi ،$ ن = ١ ، ٣ ، ٥ ، ... $\}$

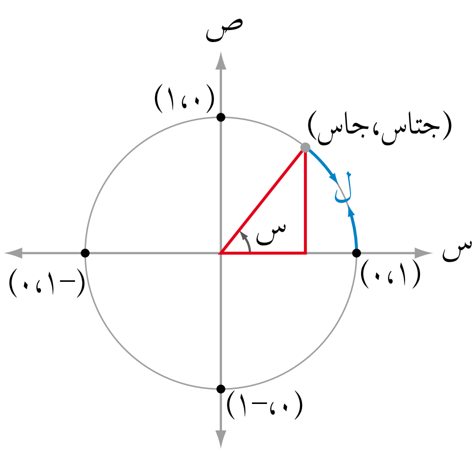
## مثال ١

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ( جاس + جتاس )

### الحل

$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ ( جاس + جتاس ) = $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ جا س + $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}}$ جتاس    (نظريات النهايات)

= ٠ + ١ = ١



الشكل (١-٢٤)

الشكل (١-٢٤) يمثل دائرة الوحدة، لاحظ أنَّ رأس الزاوية س في الوضع القياسي يقع على مركز الدائرة، وطول القوس(ل) المقابل لها يمثل قياسها بالتقدير الدائري (لماذا؟)، والإحداثي الصادي لنقطة تقاطع ضلع انتهائها مع الدائرة يمثل جاس (لماذا؟)، كلما صغر قياس الزاوية س فإنَّ طول القوس(ل) ≈ طول العمود أي أنَّ:

س ≈ جاس، وبذلك فإنَّ:

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{جاس}}{\text{س}} = ١$$

**تحدث**

بالاستعانة بالشكل(١-٢٢) تحدث إلى زملائك عن سلوك منحنى ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{س}}$ عندما تقترب قيم س من العدد صفر من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

**نظرية**

$\lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} = 1$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

$\lim_{س \to 0} \frac{س}{جا س} = 1$ ، حيث س زاوية بالتقدير الدائري.

**في هذا الكتاب، سنعتمد قياس الزوايا بالتقدير الدائري، مالم يُذكر غير ذلك.**

## مثال ٢

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٥س}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س}$

**الحل**

١) افرض أنَّ ٣ س = ص ، إذن س = $\frac{ص}{٣}$ ، وعندما س ← ٠ ، فإنَّ ص ← ٠ ، ومنه:

$$\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٥س} = \lim_{ص \to 0} \frac{جا ص}{٥ \times \frac{ص}{٣}} = \frac{٣}{٥} \lim_{ص \to 0} \frac{جا ص}{ص}$$

$$= \frac{٣}{٥} \times ١ = \frac{٣}{٥}$$

**حل آخر**

$$\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٥س} = \lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٣س} \times \frac{٣س}{٥س}$$

$$\lim_{س \to 0} \frac{جا ٣س}{٣س} \times \frac{٣}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{ظا س}{س}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{جا س}{جتا س}}{س}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{جا س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{١}{جتا س} = ١$$

## فكر وناقش

من خلال دراستك مثال(٢) ماذا تتوقع أن تكون قيمة كلٍّ مما يأتي:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{ب س}}$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س}}{\text{ظا أس}}$

## نتيجة

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظاس}}{\text{س}} = ١$

٢) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا أس}}{\text{ب س}} = \dfrac{\text{أ}}{\text{ب}}$ ، حيث أ ، ب أعداد حقيقية ، ب $\neq$ صفرًا

## مثال ٣

جد $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جاس}}$

### الحل

$$\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣\text{س}}{\text{جاس}} = \underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٣}{\dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}} = \dfrac{\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} ٣}{\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}} = ٣$$

## فكر وناقش

اكتشف الخطأ في ما يأتي، واكتب الصواب:

$$\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٤\text{س}}{٥\text{س}} = \dfrac{٤}{٥}$$

## تدريب ١

جد كلًّا من النهايات الآتية:

١) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}٧\text{س}}{٣\text{ س}}$ ٢) $\underset{\text{س} \leftarrow \pi}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}(\text{س} - \pi)}{(\text{س} - \pi)}$

٣) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{٩\text{س}}{\text{ظاس}}$ ٤) $\underset{\text{س} \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا}|\text{س}|}{\text{س}}$

## مثال ٤

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س\ جاس - ظا ٥س}{جا٤س - ٢س}$

**الحل**

بقسمة حدود المقدار على س ، حيث س ← ٠ تتضمن س ≠ صفرًا فتكون:

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{\frac{س\ جاس}{س} - \frac{ظا ٥س}{س}}{\frac{جا٤س}{س} - \frac{٢س}{س}} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جاس - \frac{ظا ٥س}{س}}{\frac{جا٤س}{س} - ٢}$$

$$= \frac{\lim\limits_{س \leftarrow ٠} جاس - \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{ظا ٥س}{س}}{\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جا ٤س}{س} - \lim\limits_{س \leftarrow ٠} ٢}$$ (نظريات النهايات)

$$= \frac{٠ - ٥}{٤ - ٢} = -\frac{٥}{٢}$$

### تدريب ٢

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{س - جا ٣س + ظا ٥س}{٣س - ظا^٢س}$

## مثال ٥

جد $\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{٣س^٢}$

**الحل**

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات ، لماذا؟

$$\lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - جتا ٢س}{٣س^٢} = \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{١ - (١ - ٢جا^٢س)}{٣س^٢}$$ ( جتا٢س = ١ − ٢ جا^٢س )

$$= \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{٢جا^٢س}{٣س^٢} = \frac{٢}{٣} \times \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جاس}{س} \times \lim\limits_{س \leftarrow ٠} \frac{جاس}{س}$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ١ \times ١ = \frac{٢}{٣}$$

حُلَّ مثال (٥) بطريقة أخرى

إرشاد : $\dfrac{\text{١ − جتا ٢ س}}{\text{٣س}^{\text{٢}}} = \dfrac{\text{جتا ٠ − جتا ٢س}}{\text{٣س}^{\text{٢}}}$

**فكر وناقش**

ناقش مع زملائك طريقة أخرى ثالثة لحل مثال (٥)

## مثال ٦

جد $\lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{جتا ٦ س − جتا ٤ س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

**الحل**

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات، لماذا؟

باستخدام القانون:

$\text{جتاس − جتاص} = \text{−٢ جا}\left(\dfrac{\text{س + ص}}{\text{٢}}\right)\text{جا}\left(\dfrac{\text{س − ص}}{\text{٢}}\right)$ تجد أنَّ:

$$\lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{جتا ٦س − جتا ٤س}}{\text{س}^{\text{٢}}} = \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{−٢ جا ٥س جا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$$

$$= \text{−٢} \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{جا ٥ س}}{\text{س}} \times \lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{جاس}}{\text{س}}$$

$$= \text{−٢} \times \text{٥} \times \text{١}$$

$$= \text{−١٠}$$

### تدريب ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{١ − جتا س}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

٢) $\lim\limits_{\text{س}\to\text{٠}} \dfrac{\text{حا ٨س + جا ٤ س}}{\text{س}}$

## مثال ٧

جد $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}}$

### الحل

لا نستطيع استخدام نظريات النهايات. (لماذا)

بالضرب بمرافق المقدار جاس – جتاس

$$\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}} = \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جاس} - \text{جتاس}}{س - \frac{\pi}{٤}} \times \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}$$

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جا}^{٢}س - \text{جتا}^{٢}س}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{- \text{جتا}٢س}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{حاس} + \text{جتاس})}$$ (جتا٢س=جتا$^{٢}$س – جا$^{٢}$س)

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{- \text{جا}(\frac{\pi}{٢} - ٢س)}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ (جتاس=جا($\frac{\pi}{٢}$ – س))

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{(س - \frac{\pi}{٤})(\text{جاس} + \text{جتاس})}$$ إخراج ٢ عاملًا مشتركًا

$$= \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{-\text{جا}٢(\frac{\pi}{٤} - س)}{س - \frac{\pi}{٤}} \times \underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـــا}} \frac{١}{(\text{جا}س + \text{جتاس})}$$

$$= ٢ \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٢}$$

### تدريب ٤

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\underset{س \leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا}\,س}{س - \frac{\pi}{٢}}$

٢) $\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـــا}} \frac{\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢}\,س}{س - ١}$

جد النهاية المطلوبة في كلٍّ من التمارين من (١) إلى (٢١) :

١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جا ٨س}}{\text{٦س}}$

٢) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س + ظا٢س − جا س}}{\text{س}}$

٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{قاس + ظا ٥س}\right)$

٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{٧ س}^{٣}\ \text{ظتا}^{٢}\ \text{(٢س) قتا (٥س)}\right)$

٥) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ + جتا ٤س − ٢ جتا}^{٢}\text{س}}{\text{س}^{٢}}$

٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتاس}}{\text{س جا س}}$

٧) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتاس}}{\text{٢س} - \pi}$

٨) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظا س − جا س}}{\text{س}}$

٩) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جا س}}{(\pi - \text{٢س})^{٢}}$

١٠) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{قا(٢س) − ١}}{\text{س}^{٢}}$

١١) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{٢س}^{٢} + \text{س ظا٢س}}{\text{جا}^{٢}\ \text{س}}$

١٢) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٤}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\ \text{س}}{\text{س} - \frac{\pi}{٤}}$

١٣) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{١ − جتا ٦س}}{\text{جتا ٨س − ١}}$

١٤) $\underset{\text{س}\leftarrow ٠}{\text{نهـا}}\ \text{٣س(ظتا ٢س + قتا ٣س)}$

١٥) $\underset{\text{س}\leftarrow \frac{\pi}{٢}}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{ظتا س}}{\pi - \text{٢س}}$

١٦) $\underset{\text{س}\leftarrow ١}{\text{نهـا}} \dfrac{\text{س جا}\ \frac{\pi}{\text{س}}}{\text{س − ١}}$

١٧) $\underset{\text{س}\to -٤}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا}\,(\text{س} + ٤)}{\text{س}^{٢} - ١٦}$

١٨) $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{٢\text{س} - \text{جا س}}{\sqrt{١ - \text{جتا}\ ٢\text{س}}}$

١٩) $\underset{\text{س}\to ٣\pi}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س}}{\frac{\text{س}}{٣} - \pi}$

٢٠) $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{س} - ٢}{\text{ظا}\,\pi\,\text{س}}$

٢١) $\underset{\text{س}\to -\text{أ}}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا س} + \text{حا أ}}{\text{س} + \text{أ}}$ (إرشاد: $\text{جاس} + \text{جا ص} = ٢\ \text{جا}\left(\dfrac{\text{س} + \text{ص}}{٢}\right) \text{جتا}\left(\dfrac{\text{س} - \text{ص}}{٢}\right)$)

٢٢) إذا كانت $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{جا أس}}{٢\text{س}} = \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \dfrac{\text{ظا}\ ٣\,\text{س}}{\text{ب س} - \text{س}} = ٦$ فجد قيمة كل من الثابتين أ ، ب .

٢٣) إذا كان $\text{ق(س)} = \dfrac{\text{جا}\,(٢\pi - ٢\,\text{س})}{-٥\text{س}}$ ، فجد $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـــا}} \text{ق(س)}$

# الاتصال

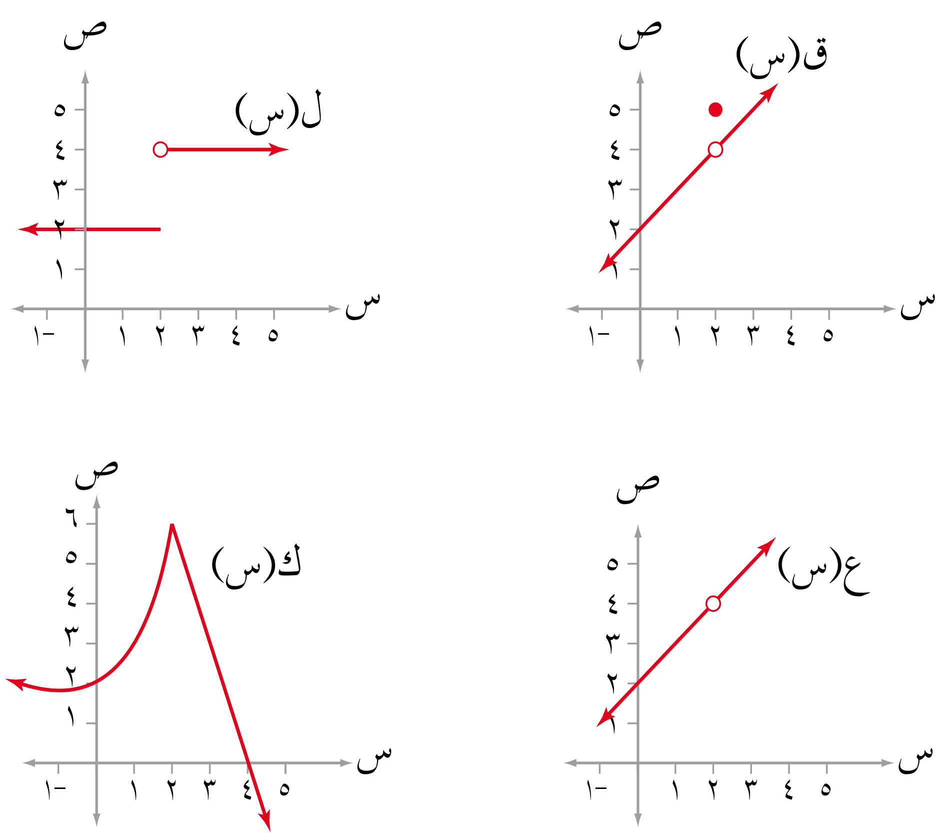
# Continuity

**النتاجات**

- تتعرف اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.
- تبحث في اتصال اقتران عند نقطة وعلى فترة.

## أولاً الاتصال عند نقطة Continuity at a point

معتمدًا الشكل (١–٢٥) أجب عن الأسئلة التي تليه:




الشكل (١–٢٥)

١) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) = ..................... ، ق(٢) = ............................

٢) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow ٢}$ ل(س) = ..................... ، ل(٢) = ............................

٣) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow ٢}$ ع(س) = ..................... ، ع(٢) = ............................

٤) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow ٢}$ ك(س) = ..................... ، ك(٢) = ............................

ماذا تلاحظ؟ أيُّ الاقترانات كان منحناه غير منقطع (متصل) على فترة مفتوحة تحوي العدد ٢؟ في مثل هذه الحالة نقول إنَّ الاقتران ك **اقتران متصل** عند س = ٢ ، بينما نقول إنَّ كلًّا من الاقترانات ق ، ل، ع **غير متّصل** (منفصل) عند س=٢

## فكر وناقش

تحدث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران عند نقطة.

## تعميم

يكون الاقتران ق متصلا عند س= أ ، إذا حقق الشروط الآتية:

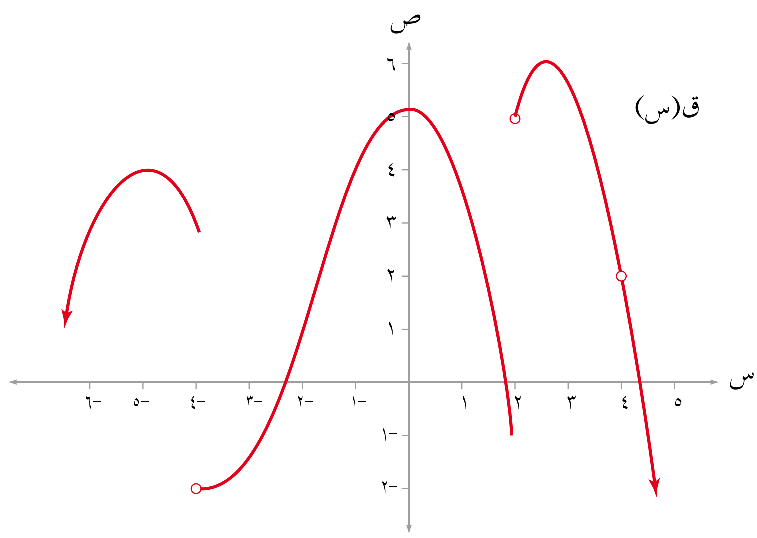
١) ق معرَّف عند س= أ ، أي أنَّ ق( أ ) موجودة كعدد حقيقي.

٢) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) موجودة.

٣) $\displaystyle\lim_{س \leftarrow أ}$ ق(س) = ق( أ )

## مثال ١

معتمدًا الشكل (١-٢٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق اقترانًا غير متصل، مع ذكر السبب ؟




الشكل (١-٢٦)

### الحل

$س_{١} = -٤$ ، لأن $\underset{س \to -٤}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

$س_{٢} = ٢$ ، لأن $\underset{س \to ٢}{\text{نهــا}}$ ق(س) غير موجودة.

$س_{٣} = ٤$ ، لأن ق غير معرف عند س = ٤

## مثال ٢

إذا كان $\text{ق(س)} = \begin{cases} \dfrac{س^{٢} - ٤}{٢ - س} & ، \quad س < ٢ \\ س - ٦ & ، \quad س \geq ٢ \end{cases}$ ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

### الحل

١) ق(س) معرف عند س = ٢ ، ق(٢) = -٤

٢) ابحث في نهاية ق عن يمين العدد ٢ ويساره، لماذا؟

$$\underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} \text{ ق(س)} = \underset{س \to ٢^{+}}{\text{نهــا}} (س - ٦) = -٤$$

$$\underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \text{ ق(س)} = \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} \frac{س^{٢} - ٤}{٢ - س} = - \underset{س \to ٢^{-}}{\text{نهــا}} (س + ٢) = -٤$$

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = $-٤$

∴ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س) موجودة وتساوي ق(٢)

∴ ق متصل عند س = ٢

## تدريب ١

إذا كان ق(س) = $\dfrac{|س - ٤|}{س + ٤}$ ، س $\neq -٤$

فابحث في اتصال ق عند س = ٤

## مثال ٣

إذا كان ق(س) = [ ٠,٥ س − ٤ ] ، فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٧

### الحل

أعد تعريف الاقتران ق دون كتابة رمز أكبر عدد صحيح في فترة تحوي العدد ٧ مثل [٦، ١٠):

$$ق(س) = \begin{cases} -١ &، ٦ \leq س < ٨ \\ صفر &، ٨ \leq س < ١٠ \end{cases}$$

ابحث في شروط الاتصال عند س = ٧

ق معرف عند س = ٧ ، حيث إنَّ: ق(٧) = $-١$

$\lim\limits_{س \leftarrow ٧^+}$ ق(س) = $\lim\limits_{س \leftarrow ٧^-}$ ق(س) = $-١$ لماذا؟

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٧}$ ق(س) = ق(٧)

∴ ق(س) متصل عند س = ٧

## تدريب ٢

١) إذا كان ق(س) = [ س ] ، فما مجموعة قيم س التي يكون عندها ق اقترانًا غير متصل؟

٢) اقترح قاعدة لاقتران أكبر عدد صحيح بحيث يكون متصلا عند س= ١ ، وغير متصل عند س = ٢

## مثال ٤

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^3 - \text{ب س} + 1 & \text{، س} < 1 \\ 5 & \text{، س} = 1 \\ \text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 2 & \text{، س} > 1 \end{cases}$

متصلًا عند س = ١ فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

**الحل**

بما أنَّ ق متصل عند س= ١ إذن:

١) $\lim_{\text{س} \to 1^-} (\text{أ س}^3 - \text{ب س} + 1) = \text{ق}(1)$

أ – ب + ١ = ٥ ........................................ (١)

٢) $\lim_{\text{س} \to 1^+} \left(\text{س}^2 - (\text{أ} + \text{ب})\text{س} + 2\right) = 5$

١ – (أ + ب ) + ٢ = ٥ .................................. (٢)

بتبسيط المعادلتين (١)، (٢) ينتج:

أ – ب = ٤ ، أ + ب = –٢

وبحلهما ينتج أ = ١ ، ب = –٣

## تدريب ٣

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{أ س}^2 + \text{ب} & \text{، س} < 3 \\ 6 & \text{، س} = 3 \\ \text{أ س} - 2\text{ ب} & \text{، س} > 3 \end{cases}$

متصلًا عند س = ٣ ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

## نظريات الاتصال (Continuity Theorems)

**نظرية (١)**

إذا كان ق اقتران كثير حدود فإنَّ ق متصل على ح.

**نظرية (٢)**

إذا كان ق ، ل اقترانين متصلين عند س = أ ، فإنَّ:

١) الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

٢) الاقتران ق − ل متصل عند س = أ

٣) الاقتران ق × ل متصل عند س = أ

٤) الاقتران $\frac{ق}{ل}$ متصل عند س = أ ، ل( أ ) ≠ صفرًا.

٥) $\frac{ق}{ل}$ غير متصل عند س = أ ، إذا كانت ل( أ ) = صفرًا.

**نظرية (٣)**

إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س = أ ، ق(س) ≥ ٠ ، في فترة مفتوحة تحتوي أ ، فإنَّ الاقتران هـ (س) = $\sqrt{ق(س)}$ اقتران متصل عند س = أ

برهان نظرية (٢) فرع (١)

المعطيات: الاقترانان ق، ل متصلان عند س = أ

المطلوب: إثبات أنَّ الاقتران ق + ل متصل عند س = أ

**البرهان:**

افرض أنَّ هـ = ق + ل

هـ ( أ ) = ق ( أ ) + ل ( أ )   من تعريف الاقتران هـ.

وحيث إنَّ ق، ل اقترانان متصلان عند س = أ فإنَّ:

$\lim\limits_{س \to أ}$ هـ (س) = $\lim\limits_{س \to أ}$ ق (س) + $\lim\limits_{س \to أ}$ ل(س)

= ق ( أ ) + ل ( أ )

وعليه فإنَّ الاقتران هـ متصل عند س = أ

## تدريب ٤

برهن الفروع: ٢، ٣، ٤ من نظرية (٢)

## فكر وناقش

اكتشف الخطأ في العبارات الآتية، ثم اكتب الصواب:

١) الاقتران ل(س) = [ س + ١ ] + [س]، غير متصل عند س = ٠ ؛ لأنه نتج عن جمع الاقتران [س + ١] ، والاقتران [س] و كلاهما غير متصل عند س= ٠

٢) إذا كان ق(س) = س − ١ اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، فإنَّ $\sqrt{ق(س)}$ هو اقتران متصل عند س = ١ .

## مثال ٥

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ٤ &، س < ٢ \\ س + ٦ &، س \geq ٢ \end{cases}$ ، ع(س) = $\begin{cases} س^٣ - ٢ &، س < ٢ \\ ٣ س &، س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق + ع) عند س = ٢

### الحل

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) = ٨

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) = ٨ ، ق(٢) = ٨

∴ ق(س) متصل عند س=٢

٢) ابحث في اتصال الاقتران ع عند س = ٢

$\lim_{س \leftarrow ٢^+}$ ع(س) = ٦

$\lim_{س \leftarrow ٢^-}$ ع(س) = ٦ ، ع(٢) = ٦

∴ ع(س) متصل عند س = ٢

وحسب نظرية (٢) فرع (١)، فإنَّ (ق + ع) (س) متصل عند س=٢

إرشاد: يمكنك حل المثال السابق من خلال إيجاد قاعدة الاقتران (ق+ع)(س)، ثم البحث في اتصاله عند س=٢

**تدريب ٥**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ١+٢س &، س<١ \\ ٣س^٢ &، س \geq ١ \end{cases}$ ، ع(س) = $\begin{cases} س^٢ &، س<١ \\ |س| &، س \geq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران (ق × ل) عند س = ١ بطريقتين.

**مثال ٦**

إذا كان ق(س) = $(س-١)^٢$ ، ل(س) = [ ٢ − س] ، فابحث في اتصال الاقتران (ق×ل) عند س = ٣

**الحل**

ق(س) = $(س - ١)^٢$ متصل عند س = ٣ لأنه كثير حدود متصل على مجاله.

ل(س) = [٢ − س] غير متصل عند س = ٣ ، لماذا؟

لا نستطيع استخدام نظرية (٢) فرع (٣) للبحث في اتصال الاقتران ق × ل ، لماذا؟

لابد من إيجاد قاعدة الاقتران (ق×ل)(س) والبحث في اتصاله عند س = ٣

(ق × ل)(س) = $(س-١)^٢$ × [ ٢ − س]

اكتب الاقتران بصورة مجزأة في فترة تحوي العدد ٣ مثل ( ٢ ، ٤ ]

(ق×ل)(س) = $\begin{cases} (س-١)^٢ \times -١ &، ٢<س \leq ٣ \\ (س-١)^٢ \times -٢ &، ٣<س \leq ٤ \end{cases}$

ابحث في اتصاله عند س = ٣

$\lim_{س \to ٣^+}$ (ق × ل)(س) = −٢ × $(٣-١)^٢$ = −٨

$$\underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــــا}} (ق \times ل)(س) = -١ \times (٣ - ١)^٢ = -٤$$

بما أنَّ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{\text{نهــــا}} (ق \times ل)(س) \neq \underset{س \leftarrow ٣^-}{\text{نهــــا}} (ق \times ل)(س)$ إذن $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهــــا}} (ق \times ل)(س)$ غيرموجودة

$\therefore$ (ق×ل)(س) غير متصل عند س = ٣

**تحدث**

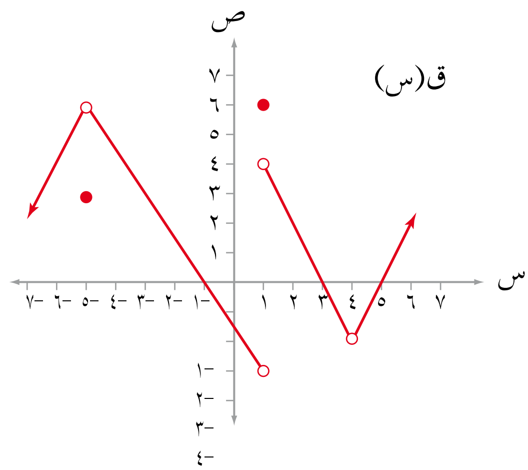
ناقش زملاءك في الحالات التي لا نستطيع فيها توظيف نظريات الاتصال في الحكم على اتصال الاقترانات.

**تدريب ٦**

إذا كان ق(س) = $(س - ٥)^٣$ ، هـ (س) = [س + ٢]

فابحث في اتصال الاقتران (ق×هـ) عند كلٍّ من س= −٢ ، س = ٥

١) معتمدًا الشكل (١–٢٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق، ما قيم س التي يكون عندها ق غير متصل مع ذكر السبب ؟




الشكل (١–٢٧)

٢) إذا كان ق(س) = [ ٤س – ٤ ] ،فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ١,٢٥

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق(س) = $\frac{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}{\text{س} - \text{١}}$ عند س = ١

٤) ابحث في اتصال الاقتران هـ (س) = $\frac{\text{س}^{\text{٢}} - \text{٤}}{\text{س} - \text{٢}}$ عند س = ٢

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \frac{|\text{ظا س}|}{\text{س}} &، \text{س} < \text{٠} \\ \text{١} - \text{جتاس} &، \text{س} \geq \text{٠} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٠

٦) إذا كان ل (س) = $\begin{cases} \sqrt{\text{س} - \text{٣}} &، \text{س} > \text{٣} \\ |\text{س}^{\text{٢}} - \text{٩}| &، \text{س} \leq \text{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = ٣

٧ ) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \dfrac{|س| - ٢}{س - ٢} &، \quad س \neq ٢ \\ ٥ &، \quad س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س=٢

٨ ) إذا كان $ك(س) = \begin{cases} ٦ + س &، \quad س \leq -٢ \\ ٢ - س &، \quad -٢ \leq س < ٢ \\ ٢س - ١ &، \quad س \geq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ك عند س= ٢

٩ ) إذا كان $ع(س) = \begin{cases} \dfrac{أ}{س} + س^{٢} &، \quad ٠ < س \leq ٢ \\ [س] + ٣ &، \quad ٢ < س < ٣ \\ ٧ &، \quad س = ٣ \end{cases}$

متصلًا عند س= ٢ ، فجد قيمة الثابت أ.

١٠) إذا كان $ل(س) = \begin{cases} \dfrac{س^{٣} + س^{٢} + ٢س - ٤}{س - ١} &، \quad س \neq ١ \\ ٥س - ١ &، \quad س = ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س= ١

١١) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^{٢} + س &، \quad س < ٢ \\ [س + ٤] &، \quad س = ٢ \\ \sqrt{س^{٢} + ٥} + \dfrac{٦}{س} &، \quad س > ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢

١٢) إذا كان ل(س)= $\begin{cases} س^٢ + ب &، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ |س| - ٥ &، \quad ٢ \leq س \leq ٣ \end{cases}$

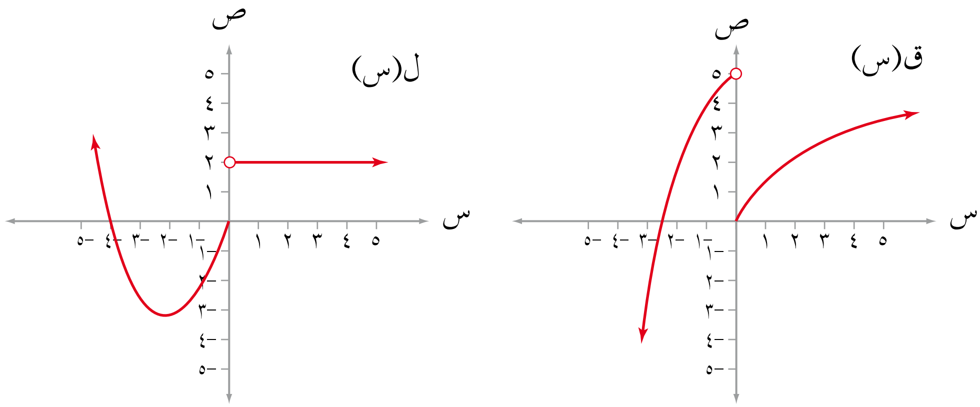
فجد قيمة الثابت ب التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س = ٢

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣ س + ٥ &، \quad س \in ص \\ ٢ س^٢ - ٤ &، \quad س \notin ص \end{cases}$ حيث ص مجموعة الأعداد الصحيحة

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٣

## ثانيًا الاتصال على فترة
## Continuity on an Interval

معتمدًا الشكل (١-٢٨) الذي يمثل منحنى كلٍّ من الاقتران ق والاقتران ل المعرفين على ح، جد كلًّا مما يأتي:




الشكل (١-٢٨)

١) $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س)

٢) ق(٠)

٣) $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ل(س)

٤) ل (٠)

ماذا تلاحظ؟

تعلمت في الدرس السابق شروط اتصال اقتران عند نقطة. وفي هذا الدرس ستتعرف شروط اتصال اقتران على فترة.

في الشكل (١-٢٨) لا بد أنك لاحظت أنَّ $\underset{س \leftarrow ٠^{+}}{\text{نهــا}}$ ق(س) = ق(٠) = ٠ وفي هذه الحالة يكون ق متصلًا عند س= ٠ من اليمين.

وأنَّ $\underset{س \leftarrow ٠^{-}}{\text{نهــا}}$ ل(س) = ل(٠) = ٠ ، وفي هذه الحالة يكون ل متصلًا عند س=٠ من اليسار.

**فكر وناقش**

ادرس الشكل (١-٢٨) ثم أجب عن كل مما يأتي:

١) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليمين؟

٢) ما شروط اتصال اقتران عند عدد من اليسار؟

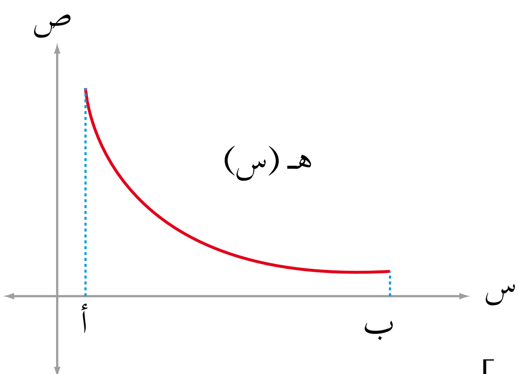
انظر الشكل(١-٢٩) لاحظ أنَّ:

الاقتران هـ متصل عند س = أ من اليمين، لماذا؟

وأيضا الاقتران هـ متصل عند س = ب من اليسار، لماذا؟

كما أن الاقتران هـ متصل عند كل س تنتمي للفترة (أ ، ب) ، لماذا؟

في هذه الحالة نقول إنَّ الاقتران هـ متصل على الفترة[أ ، ب].



الشكل (١-٢٩)

**تحدث**

تحدَّث بلغتك الخاصة عن شروط اتصال اقتران على فترة مغلقة، وفترة مفتوحة، وفترة نصف مغلقة أو نصف مفتوحة.

**تعريف**

إذا كان ق اقترانًا معرَّفًا على الفترة [ أ ، ب ] فإن:

١) ق يكون متصلًا عند س = أ من اليمين، إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow\text{أ}^{+}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق( أ )

٢) ق يكون متصلًا عند س = ب من اليسار، إذا كانت $\underset{\text{س}\leftarrow\text{ب}^{-}}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ق(ب)

٣) ق يكون متصلًا على الفترة (أ ، ب) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)

٤) ق يكون متصلًا على الفترة [أ ، ب] إذا كان متصلًا على الفترة (أ ، ب) ومتصلًا عند س = أ من اليمين، و متصلًا عند س = ب من اليسار.

**ملاحظة**

١) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة [أ ، ب)، إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)، ومتصلًا عند س= أ من اليمين.

٢) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة (أ ، ب]، إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ب)، ومتصلًا عند س= ب من اليسار.

٣) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة ( أ ، ∞) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (أ ، ∞) .

٤) يكون الاقتران ق متصلًا على الفترة (−∞ ، ب) إذا كان متصلًا عند كل س ∈ (−∞ ، ب).

٥) يكون الاقتران ق متصلًا على ح إذا كان متصلًا عند كل س ∈ ح .

**فكر وناقش**

اقرأ العبارات الآتية ثم أجب بنعم أو لا، وقدّم تبريرًا:

١) كثيرات الحدود متصلة على ح.

٢) الاقترانات النسبية متصلة على ح.

٣) إذا كان الاقتران متصلًا على ح، فإنه يكون متصلًا على أية فترة جزئية منها.

٤) الاقترانان الدائريان (الجيب، جيب التمام) متصلان على ح.

**تحدث**

تحدّث إلى زملائك كيف تحدد نقط عدم الاتصال للاقترانات الدائرية (القاطع، قاطع التمام، الظل ، ظل التمام).

**مثال ١**

إذا كان ق(س) = 
$$\begin{cases} \text{٢س + ٢} & \text{، } -\text{٢} \le \text{س} < \text{١} \\ \text{س + ٤} & \text{، } \text{١} \le \text{س} \le \text{٥} \end{cases}$$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢ ، ٥ ]

**الحل**

١) الاقتران ق متصل على الفترة (−٢ ، ١ ) لأنه على صورة كثير حدود.

٢) الاقتران ق متصل على الفترة (١، ٥) لأنَّه على صورة كثير حدود.

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: س=١

$\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س) = ١ + ٤ = ٥

$\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) = ٢ × ١ + ٢ = ٤

ق(١) = ٥

بما أنَّ $\lim_{س \leftarrow ١^-}$ ق(س) ≠ $\lim_{س \leftarrow ١^+}$ ق(س)، إذن $\lim_{س \leftarrow ١}$ ق(س) غير موجودة،

وعليه فإنَّ الاقتران ق غير متصل عند س =١

٤) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س= −٢ من اليمين.

$\lim_{س \leftarrow -٢^+}$ ق(س) = ٢ × −٢ + ٢ = −٢

ق(−٢) = −٢ ، بما أن $\lim_{س \leftarrow -٢^+}$ ق(س) = ق(−٢)

∴ الاقتران ق متصل عند العدد −٢ من اليمين.

٥) ابحث في اتصال ق عند س = ٥ من اليسار.

$\lim_{س \leftarrow ٥^-}$ ق(س) = ٩ ، ق(٥) = ٩

∴ الاقتران ق متصل عند س= ٥ من اليسار.

مما سبق ينتج أنَّ الاقتران ق متصل على الفترة [−٢ ، ٥] − {١} .

**تدريب ١**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^٢ & ، ٣ \leq س < ٥ \\ س + ٢٠ & ، ٥ \leq س < ٧ \\ ٩ & ، س = ٧ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٣ ، ٧) ، والفترة [٣ ، ٧].

## مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٣ - ٦٤}{س - ٤} &، س \leq ٣ \\ - س + ٤ &، س > ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على مجاله.

**الحل**

قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = ٣

في الفترة (− ∞ ، ٣) الاقتران ق متصل لأنَّه على صورة اقتران نسبي معرف على مجاله.

في الفترة (٣ ، ∞ ) الاقتران ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود.

ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع وهي: س = ٣

ق( ٣) = ٣٧

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـــا}$ ق(س) = − ٣ + ٤ = ١

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـــا}$ ق(س) = $\dfrac{٣^٣ - ٦٤}{٣ - ٤} = \dfrac{- ٣٧}{- ١} = ٣٧$

بما أنَّ $\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهـــا}$ ق(س) ≠ $\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهـــا}$ ق(س) ، إذن $\underset{س \leftarrow ٣}{نهـــا}$ ق(س) غير موجودة

وعليه فإنَّ الاقتران ق غير متصل عند س = ٣

مما سبق ينتج أنَّ الاقتران ق متصل على ح − {٣}

## تدريب ٢

إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{س^٢ - ٢٥}{س - ٥} &، س \neq ٥ \\ ٥ + س &، س = ٥ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

## مثال ٣

إذا كان ق(س) = |٣س − ٩| ، فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [ ١، ٥ ]

**الحل**

اكتب الاقتران ق بصورة مجزأة دون استخدام رمز القيمة المطلقة على الفترة [ ١ ، ٥ ] ، فتحصل على:

$$ق(س) = \begin{cases} ٩ - ٣\,س & ، \quad ١ \le س < ٣ \\ ٣س - ٩ & ، \quad ٣ \le س \le ٥ \end{cases}$$

١) الاقتران ق متصل على الفترة (١، ٣ ) ، لأنَّه على صورة كثير حدود.

٢) الاقتران ق متصل على الفترة (٣، ٥ ) ، لأنَّه على صورة كثير حدود.

٣) ابحث في اتصال الاقتران ق عند نقطة التفرع س= ٣

$\underset{س \leftarrow ٣^-}{نهــــا}$ ق(س) = ٩ − ٣ × ٣ = ٠

$\underset{س \leftarrow ٣^+}{نهــــا}$ ق(س) = ٣ × ٣ − ٩ = ٠ ، ق(٣) = ٠

بما أن $\underset{س \leftarrow ٣}{نهــــا}$ ق(س) = ق(٣) إذن ق (س) متصل عند س = ٣

٤) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ١ من اليمين:

$\underset{س \leftarrow ١^+}{نهــــا}$ ق(س)= ٩ − ٣ = ٦ ، ق( ١) = ٦

إذن ق(س) متصل عند العدد ١ من اليمين.

٥) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٥ من اليسار:

$\underset{س \leftarrow ٥^-}{نهــــا}$ ق(س)= ٣ × ٥ − ٩ = ٦ ، ق(٥) = ٦

إذن ق(س) متصل عند العدد ٥ من اليسار.

وعليه فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة [ ١ ، ٥ ].

### تدريب ٣

إذا كان ق(س) = |٠,١ − س| ، فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة[ ٠,٠١ ، ٠,٩ ].

## مثال ٤

إذا كان هـ (س) = $\begin{cases} \dfrac{س^{٢} - س - ٣٠}{أ\,س - ٦\,أ} & ،\quad س > ٦ \\ ١ & ،\quad س = ٦ \\ ب\,س & ،\quad س < ٦ \end{cases}$

متصلًا على ح ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب .

**الحل**

بما أنَّ الاقتران هـ متصل على ح إذن فهو متصل عند كل نقطة في ح .

وعليه: $\lim\limits_{س \to ٦^{+}} ق(س) = ق(٦)$

$$\lim_{س \to ٦^{+}} \frac{س^{٢} - س - ٣٠}{أ\,س - ٦\,أ} = ١$$

$$\lim_{س \to ٦^{+}} \frac{\cancel{(س - ٦)}(س + ٥)}{أ\,\cancel{(س - ٦)}} = ١$$

$\dfrac{١١}{أ} = ١$ ، ومنه أ = ١١

وكذلك $\lim\limits_{س \to ٦^{-}} ق(س) = ق(٦)$

$$\lim_{س \to ٦^{-}} ب\,س = ق(٦)$$

$٦ \times ب = ١$

ومنه ب $= \dfrac{١}{٦}$

## تدريب ٤

إذا كان ع(س) = $\begin{cases} \dfrac{جا\,أ\,س}{٥\,س} & ،\quad -\pi \leq س < ٠ \\ ٢ & ،\quad س = ٠ \\ ب\,(س+٢) & ،\quad ٠ < س \leq \pi \end{cases}$

متصلًا على الفترة $[-\pi ، \pi]$، فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب

١) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٣س^٢ + ٥ &، \quad -٢ \leq س < ١ \\ ٨ س &، \quad ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ٢ ].

٢) إذا كان ل(س) = |٢س − ١٠ |، فابحث في اتصال الاقتران ل على الفترة[−١٠، ٨].

٣) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} \frac{س^٣ - ٢٧}{س - ٣} &، \quad س < ٣ \\ ٥ + س &، \quad س \geq ٣ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على ح.

٤) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \sqrt{٤ - س} &، \quad س < ٤ \\ |س^٢ - ١٦| &، \quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل على مجاله.

٥) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٥ &، \quad س = ٣ \\ [س] + ٥ &، \quad ٣ < س < ٤ \\ ٤ &، \quad س = ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع على الفترة [٣، ٤].

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س + ١} &، \quad ٠ \leq س < ٣ \\ [٠,٢٥ \, س + ٢] &، \quad ٣ \leq س < ٦ \\ |٩ - س| &، \quad س = ٦ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [٠، ٦].

٧) إذا كان الاقتران ع(س) = $\begin{cases} \frac{س^٢ + ٢(هـ - ١)\,س - ٤هـ}{س - ٢} &، \quad س \neq ٢ \\ ٥ + س &، \quad س = ٢ \end{cases}$

متصلًا على ح، فجد قيمة الثابت هـ.

٨) إذا كان ع(س) = $\begin{cases} ٢س &، \quad س < ٢ \\ [٠,٥ \, س + ٢] &، \quad ٢ \leq س < ٤ \\ \frac{٥س}{س^٢ - ٣٦} &، \quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع لجميع قيم س الحقيقية.

٩) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [س] + س &، \quad -١ \leq س < ٠ \\ \frac{٣س^٢}{٥} + \sqrt{س} &، \quad ٠ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [-١، ٢].

١٠) إذا كان ل(س) = $\frac{س^٢ + ٥س + ٢}{أ\,س^٢ + س + ٣}$ ، فما قيم أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا على مجموعة الأعداد الحقيقية ح ؟

## أسئلة الوحدة

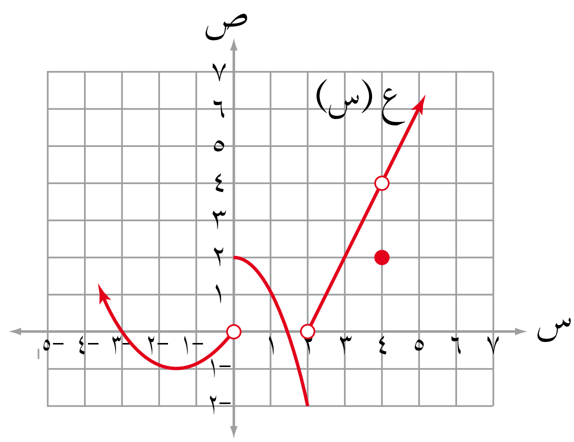
١) معتمدًا الشكل (١−٣٠)، الذي يمثل منحنى الاقتران ع، جد كلًّا مما يأتي:

أ ) $\underset{س \leftarrow ٠^+}{\text{نهـا}}$ ع(س)

ب) $\underset{س \leftarrow ٢^-}{\text{نهـا}}$ ع(س)

جـ) $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ع(س)

د ) $\underset{س \leftarrow ٤}{\text{نهـا}}$ ع(س)




الشكل (١−٣٠)

هـ) مجموعة قيم أ حيث $\underset{س \leftarrow أ}{\text{نهـا}}$ ع(س) غير موجودة.

و ) مجموعة قيم ب حيث ع اقتران غير متصل عند س = ب .

٢) إذا كانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦ ، فجد قيمة:

$$\underset{س \leftarrow ١}{\text{نهـا}} \left(ق^٢(٢س + ١) - س + ٢\right)$$

٣) إذا كان ق(س) = 
$$\begin{cases} \dfrac{٣ - س}{|س - ٣|} & ، \quad س > ٣ \\ جـ س^٢ - ٤ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$$

وكانت $\underset{س \leftarrow ٣}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة ، فما قيمة الثابت جـ؟

٤) إذا كان ق(س) = $\dfrac{س^٢ + (أ + ١٣) س + أ}{س - ٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل $\underset{س \leftarrow ٢}{\text{نهـا}}$ ق(س) موجودة.

٥) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢ - ٤س - ٥|}{|س - ٥|} & ، س > ٥ \\ أ\, جتا \dfrac{\pi}{٥}س + ٥ & ، س < ٥ \end{cases}$

وكانت $\lim_{س \leftarrow ٥}$ ق(س) موجودة ، فجد قيمة الثابت أ.

٦) جد كلًّا من النهايات الآتية:

أ ) $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س - جا\, س}{\sqrt{١ - جتا\, ٢س}}$

ب) $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س + جا\, ٢س}{٣س}$

جـ) $\lim_{س \leftarrow ١} \dfrac{١}{س - ١} \left( \dfrac{١}{\sqrt{س}} - ١ \right)$

د ) $\lim_{س \leftarrow ٣} \dfrac{س^٢ - ٣س}{س - \sqrt{س + ١} - ١}$

هـ ) $\lim_{س \leftarrow -٣} \dfrac{\dfrac{١}{س} + \dfrac{١}{٣}}{س^٢ + ٢س - ٣}$

و ) $\lim_{س \leftarrow ٤} \dfrac{\sqrt{س^٣} - ٢|س|}{٢س^٢ - ٥س - ١٢}$

ز ) $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{س^٢ + جا\, ٢س}{٣س}$

ح ) $\lim_{س \leftarrow \frac{\pi}{٦}} \dfrac{جتا\, س - \sqrt{٣}\, جا\, س}{٦س - \pi}$

ط) $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{قا ٢س - ١}{س^٢}$

ي ) $\lim_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{\dfrac{١}{٢} - جتا(\dfrac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$

ك) $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{جتا\, ٣س - جتا\, ٥س}{٢س^٢}$

٧) إذا كانت $\lim_{س \leftarrow ٠} \dfrac{٤س^٢ - جا\, ب\, س}{ب\, س - ظا\, ٤س} = \dfrac{١}{٤}$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٨ ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{|س^٢-٤|}{س-٢} & ، \quad س \neq ٢ \\ ٢ + س & ، \quad س = ٢ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق عند س= ٢

٩ ) إذا كا ن ع(س) = $\begin{cases} \left|\dfrac{س}{٢} - ١\right| & ، \quad -١ \leq س < ٣ \\ [٠,٥س + ٣] & ، \quad ٣ \leq س < ٤ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ع عند س= ٣

١٠) إذا كان ل(س) = $\begin{cases} \dfrac{٩س^٢ - ١}{\sqrt{١ - ٦س + ٩س^٢}} & ، \quad \dfrac{-١}{٣} < س < \dfrac{١}{٣} \\ -٢ & ، \quad س = \dfrac{١}{٣} \\ -٦س - [س] & ، \quad \dfrac{١}{٣} < س < \dfrac{٤}{٣} \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ل عند س = $\dfrac{١}{٣}$

١١) ابحث في اتصال الاقتران ع(س) = $\sqrt{[س] + س}$ على الفترة (١، ٢] .

١٢) إذا كان هـ(س) = $\begin{cases} س^٣ & ، \quad س < ١ \\ ٢س\sqrt{س} - ١ & ، \quad س \leq ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران هـ لجميع قيم س الحقيقية.

١٣) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ١} & ، \quad -٢ \le \text{س} < -١ \\ \text{س}[\text{س}] & ، \quad -١ \le \text{س} < ١ \end{cases}$

فابحث في اتصال الاقتران ق على الفترة [−٢، ١).

١٤) إذا كان ل(س) = $\dfrac{\text{س}^{٢} - ١}{\text{س} + ٢}$ ، هـ(س) = [س] ، فابحث في اتصال الاقتران ل × هـ على الفترة [٠، ٢]

١٥) يتكون هذا السؤال من (١٠) فقرات، كل فقرة لها أربعة بدائل مختلفة، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح في ما يأتي:

(١) إذا كانت $\lim_{\text{س} \to ٣}$ ق(س) = ٤ ، ق(٣) = ٦، فما قيمة $\lim_{\text{س} \to ١}$ (ق$^{٢}$(٢س+١) − س+٧)؟

أ) ١٧ ب) ١٣ جـ) ٢٠ د) ٣٧

(٢) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س=٤ ، وكان ٣ق(٤)=٦، وكانت $\lim_{\text{س} \to ٤^{+}}$ ق(س)=٤ب،

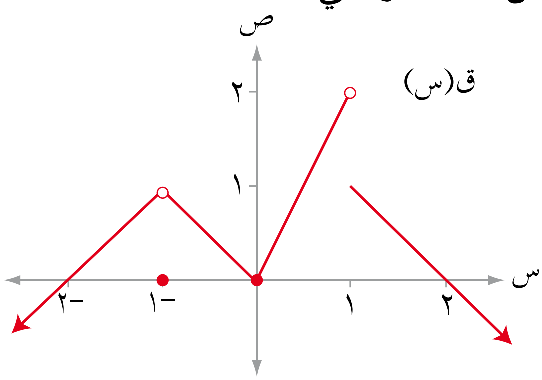
فإنَّ قيمة الثابت ب تساوي:

أ) $\frac{١}{٣}$ ب) ٢ جـ) $\frac{١}{٢}$ د) −٢

(٣) إذا كان ق اقترانَ كثير حدود ، وكانت $\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{ق(س)}}{\text{س}}$ = ٣ ، فإنَّ $\lim_{\text{س} \to ٢} \dfrac{\text{ق}^{٢}\text{(س)}}{\text{س}}$ تساوي:

أ) ٩ ب) ١٨ جـ) ٦ د) ٣٦

(٤) معتمدًا الشكل(١-٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرَّف على مجموعة الأعداد الحقيقية ح، فإنَّ مجموعة قيم أ حيث $\underset{\text{س} \leftarrow \text{أ}}{\text{نهـــا}}$ ق(س) = صفرًا هي:



الشكل (١-٣١)

أ ) {-٢ ، ٠ }

ب) { ٠ }

جـ) { ٠ ، ٢ }

د ) {-٢ ، ٠، ٢ }

(٥) $\underset{\text{س} \leftarrow -٢}{\text{نهـــا}}$ $\dfrac{٤ - \text{س}^٢}{٢ - \text{س}}$ تساوي:

أ ) -١ ب) صفر جـ) -٣ د ) ٣

(٦) $\underset{\text{س} \leftarrow ٠}{\text{نهـــا}}$ $\dfrac{٦\text{س}^٤ + ١٨\text{س}^٢}{٢\text{س}^٢ - ٣\text{س}^٣}$ تساوي:

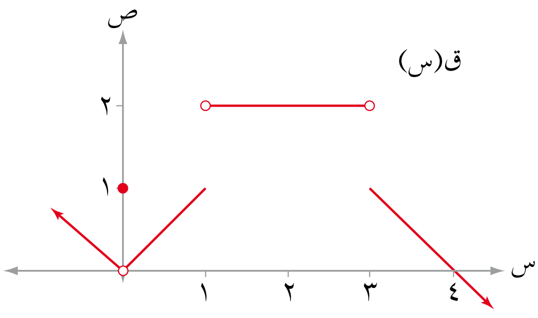
أ ) -٦ ب) -٢ جـ) ٣ د ) ٩

(٧) إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= ١ ، وكان ق(١) = ٤ ، فإنَّ

$\underset{\text{س} \leftarrow ١^+}{\text{نهـــا}}$ $\left(\dfrac{|\text{س} - ١|}{\text{س} - ١} + \text{ق(س)}\right)$ تساوي:

أ ) ٣ ب) ١ جـ) ٥ د ) غير موجودة

( ٨ ) معتمدًا الشكل (١–٣٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المعرف على ح، ما مجموعة قيم أ التي تجعل $\lim\limits_{س \leftarrow أ}$ ق(س) غير موجودة؟



الشكل (١–٣٢)

أ) {٠، ١، ٣}  ب) {١، ٣، ٤}  جـ) {٠، ١، ٣، ٤}  د) {١، ٣}

( ٩ ) إذا كان ل(س)= $\begin{cases} ٢\text{جتا}^٢ س &، \quad س < \frac{\pi}{٢} \\ أ س^٢ + \pi^٢ &، \quad س \geq \frac{\pi}{٢} \end{cases}$

فإنَّ قيمة أ التي تجعل الاقتران ل متصلًا عند س= $\frac{\pi}{٢}$ هي:

أ ) −٢  ب) صفر  جـ) −٤  د ) ٤

(١٠) إذا كان ق(س)= $\begin{cases} ٣ &، \quad س = ١ \\ [س] + ٥ &، \quad ١ < س < ٢ \\ ٤ &، \quad س = ٢ \end{cases}$

فإنَّ الاقتران ق متصل على الفترة:

أ) [١ ، ٢]  ب) (١، ٢)  جـ) [١ ، ٢)  د ) (١ ، ٢]

# الوحدة الثانية

## ٢

# التفاضل

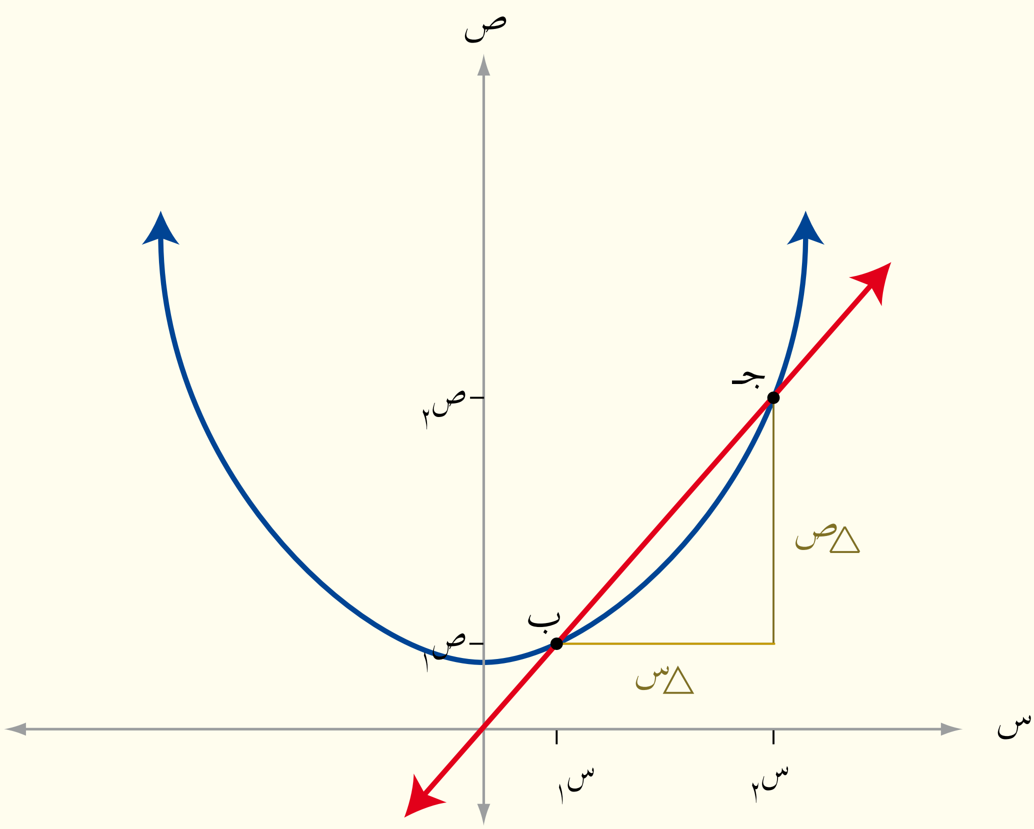
## Differentiation

تتضمن بعض الظواهر في حياتنا تغيرًا في كمياتها أو قياساتها بالنسبة لمتغير آخر، مثل سرعة صاروخ بالنسبة للزمن، أو قيمة العملة بالنسبة لعملة أخرى، أو حجم بالون كروي بالنسبة لطول نصف قطره ، ... إلخ، يُستخدم علم التفاضل في دراسة مثل هذه التغيرات.

تطور علم التفاضل عبر دراسة ثلاث مسائل رئيسة هي:

مسألة المماس و مسألة السرعة و مسألة القيم القصوى (الكبرى والصغرى).

و سنقدم في هذه الوحدة مفهوم المشتقة وقواعد إيجادها.



**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- وصف القاطع والمماس لمنحنى اقتران هندسيًّا.
- إظهار فهمٍ للمشتقة وإيجادها باستخدام التعريف.
- وصف وحساب المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف بصيغ مختلفة.
- استخدام رموز مختلفة للتعبير عن المشتقة الأولى.
- التمييز بين الاتصال والقابلية للاشتقاق عند نقطة.
- تعليل عدم قابلية الاشتقاق.

الفصل الأول

# معدل التغير والمشتقات

# Rate of Change and Derivatives

**النتاجات**

- تجد معدل التغير في فترة محددة.
- تفسر مفهوم معدل التغير هندسيًّا، وفيزيائيًّا.
- تتعرف المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة، وتُفسرها هندسيًّا وفيزيائيًّا.
- تجد المشتقة الأولى لاقتران عند نقطة باستخدام التعريف، وَبصورتها العامة .
- تبحث في قابلية اشتقاق اقتران على فترة.
- تفسر العلاقة بين اتصال اقتران عند نقطة، وقابلية اشتقاقه عند هذه النقطة.
- تدرس قابلية اقتران للاشتقاق عند نقطة معينة مستعينا بالاتصال، وتفسر الحالات التي يكون فيها الاقتران غير قابل للاشتقاق عند نقطة.

## أولاً معدّل التغير Rate of Change

عند رمي حجر في بركة ماء راكدة تتكون دائرة يزداد طول قطرها بمرور الزمن . ما معدّل الزيادة في مساحة الدائرة عندما يزداد طول قطرها من ٨ سم إلى ١٠ سم ؟

يُستعمل معدل التغير في مجالات كثيرة، مثل: دراسة تزايد عدد السكان ومعدّلات الإنتاج ومعدلات تدفق المياه، والسرعة والتسارع. وتُشكل دراسة حركة جُسَيم يتحرك على خط مستقيم (أفقي أو عمودي)، وميل القاطع الواصل بين نقطتين على منحنى اقتران مسألتين مهمتين في استخدامات معدل التغير.

**تعريف**

إذا تغيرت قيمة متغير مثل س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإنَّ **مقدار التغير في س** هو $س_٢ - س_١$، وسنرمز للتغير في س بالرمز **$\Delta$س** ( ويقرأ دلتا س ).

**مثال ١**

جد $\Delta$س إذا تغيّرت س من ٢,٣ إلى ٢,٥

**الحل**

$\Delta$ س = $س_٢ - س_١$ = ٢,٥ – ٢,٣ = ٠,٢

**تدريب ١**

جد $\Delta$ س في الحالات الآتية:

١) $س_١$ = ٤ ، $س_٢$ = ٣,٧

٢) إذا تغيرت س من $س_١$ = ن إلى $س_٢$ = ن + ١

**تعريف**

**مقدار التغير في الاقتران**

إذا كان ص = ق(س) اقترانًا معرفًا على الفترة[ أ ، ب ] وتغيرت س من $س_١$ إلى $س_٢$ فإنَّ ص ستتغير تبعًا لذلك من قيمة $ص_١$ إلى قيمة $ص_٢$، حيث $ص_١$ = ق($س_١$) ، $ص_٢$ = ق($س_٢$).

يُرمز لمقدار التغير في قيمة الاقتران ق بالرمز

$\Delta$ ص = $ص_٢ - ص_١$ = ق($س_٢$) – ق($س_١$)= $\Delta$ ق(س)

**مثال ٢**

إذا كان ص = ق(س) = $س^٢ -$ ٤س + ١ ، فَجِد مقدار التغير في الاقتران ق في الحالات الآتية :

١) إذا تغيرت س من ١ إلى ٣

٢) إذا تغيرت س من $س_١$ = ن إلى $س_٢$ = ن – ١

**الحل**

١) $\Delta$ ص = ص$_٢$ − ص$_١$

= ق(٣) − ق(١) = (٣$^٢$ − ٤ × ٣ +١) − ( ١ − ٤ + ١)

= (− ٢ ) − (− ٢ ) = صفرًا

٢) $\Delta$ ص = ق(ن − ١) − ق(ن)

= $\Big($(ن − ١)$^٢$ − ٤ ( ن − ١ ) + ١ $\Big)$ − $\Big($ن$^٢$ − ٤ن + ١ $\Big)$

= ن$^٢$ − ٢ ن + ١ − ٤ ن + ٤ + ١ − ن$^٢$ + ٤ ن − ١ = ٥ − ٢ن

**تعريف**

إذا كان ص = ق(س) ، س$_١$ ≠ س$_٢$ فإنَّ المقدار $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ يُسمى **معدل التغير** في ص عندما تتغير س من س$_١$ إلى س$_٢$ حيث:

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$

حيث س$_٢$ = س$_١$ + $\Delta$ س

**مثال ٣**

إذا كان ق(س) = س$^٣$ − س ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من −١ إلى ٢

**الحل**

$\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ق(٢)} - \text{ق(}-١)}{٢ - (-١)}$ = $\frac{٦ - ٠}{٣}$ = ٢

**تدريب ٢**

إذا كان ص = ق(س) = ٥ − س$^٢$، جد معدل التغير في الاقتران ق إذا تغيرت س من ٢ إلى ٢,١ .

**مثال ٤**

إذا كان ق(س) = | ٢س − ٦ | ، فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [ ١ ، ٤ ].

**الحل**

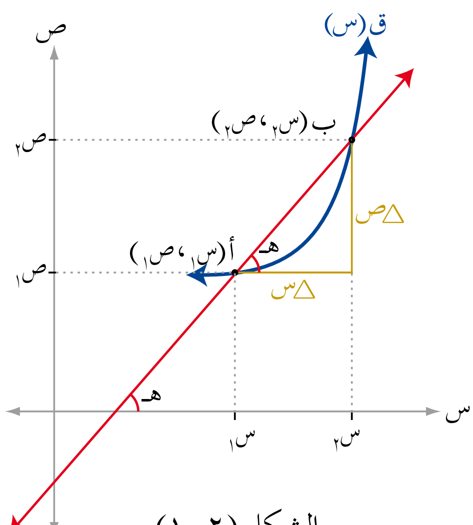
ق(س) = $\begin{cases} \text{٢س} - ٦ & \text{، س} \geq ٣ \\ ٦ - \text{٢ س} & \text{، س} < ٣ \end{cases}$ ، س$_١$ = ١ ، س$_٢$ = ٤

$\therefore \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} = \frac{\text{ق}(٤) - \text{ق}(١)}{٤ - ١} = \frac{٢ - ٤}{٣} = \frac{-٢}{٣}$

## تدريب ٣

إذا كان ق(س)= $[\frac{١}{٢}\text{س} - ١]$ فجد معدل التغير في الاقتران ق في الفترة[٣ ، ٥].

## التفسير الهندسي لمعدّل التغير




الشكل (٢-١)

يمثل الشكل (٢ − ١) منحنى الاقتران ق.

النقطتان أ(س١، ص١) ، ب(س٢، ص٢)

واقعتان عليه.

يُسمى المستقيم الواصل بين النقطتين أ ، ب قاطعًا لمنحنى الاقتران ق.

ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}} = \frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١} = \frac{\text{ق(س}_٢) - \text{ق(س}_١)}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ تعريف ميل المستقيم إذا عُلمت نقطتان عليه

$= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}} =$ ظا هـ العلاقة بين ميل المستقيم وزاوية ميله

حيث هـ زاوية ميل $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ (وهي الزاوية المحصورة بين $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ والاتجاه الموجب لمحور السينات).

أي أنَّ:

ميل القاطع = معدّل التغير = ظا هـ

## مثال ٥

جد ميل القاطع الواصل بين النقطتين (٢ ، ق(٢)) ، (٥ ، ق(٥)) الواقعتين على منحنى الاقتران ق حيث ق(س) = س$^٢$ − ٣س .

### الحل

ميل القاطع = معدّل تغير الاقتران ق في الفترة[٢ ، ٥]

$= \frac{\text{ق}(٥) - \text{ق}(٢)}{٥ - ٢} = \frac{١٠ - (-٢)}{٣} = \frac{١٢}{٣} = ٤$

**تدريب ٤**

إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١))، (٣ ، ق(٣)) يصنع زاوية قياسها ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد معدّل تغير الاقتران ق في الفترة [١ ، ٣].

## التفسير الفيزيائي لمعدّل التغير

في دراسة حركة جُسيم يتحرك على خط مستقيم أفقي أو عمودي غالبًا ما يُستخدم محور أفقي مع نقطة أصل عليه بوصفه نموذجًا للمستقيم الذي يتحرك عليه الجسيم. في هذه الحالة يُعتبر التحرك في الاتجاه الموجب إذا كان من اليسار إلى اليمين، وفي الاتجاه السالب إذا كان من اليمين إلى اليسار.
على فرض أنَّ جُسيمًا يتحرك على خط مستقيم بحيث كان موقعه من نقطة الأصل في أية لحظة ن معرفًا بالقاعدة ف(ن)، إذا تغيرت ن من $ن_١$ إلى $ن_٢$ فإنَّ موقع الجُسيم سيتغير من الموقع ف($ن_١$) إلى الموقع ف($ن_٢$) .إذا قطع الجُسيم خلال الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] مسافة Δ ف فإنَّ النسبة :

$$\frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن} \quad ، \quad \Delta ن > ٠$$

تُسمى **السرعة المتوسطة** للجُسيم في الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] ويُرمز لها بالرمز $\bar{ع}$ ، أي أنَّ $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$

**تعريف**

السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) لجُسيم يتحرك على خط مستقيم في الفترة الزمنية [$ن_١$ ، $ن_٢$] هي معدل التغيرفي اقتران المسافة ف(ن) وبالرموز:

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_٢) - ف(ن_١)}{ن_٢ - ن_١} = \frac{ف(ن_١ + \Delta ن) - ف(ن_١)}{\Delta ن} \quad ، \quad \Delta ن > ٠$$

**مثال ٦**

يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = $ن^٢$ – ن حيث ن الزمن بالثواني ، ف(ن) المسافة بالأمتار ، أجب عن السؤالين الآتيين:

١) هل سرعة الجُسيم ثابتة أم متغيرة ؟ برِّر إجابتك.

٢) احسب السرعة المتوسطة للجُسيم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥] .

**الحل**

١) المسافة المقطوعة بين ن = ١ ، ن = ٢ : هي ف(٢) – ف(١) = ٢ – ٠ = ٢ م

المسافة المقطوعة بين ن = ٢ ، ن = ٣ : هي ف(٣) – ف(٢) = ٦ – ٢ = ٤ م

السرعة متغيرة؛ لأنَّ المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [١ ، ٢] تختلف عنها في الفترة الزمنية [٢، ٣]

٢) $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٢٠ - ٢}{٣} =$ ٦م/ث

## تدريب ٥

يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ف(ن) = ٣ ن$^{٢}$ – ٤ن + ٢٠؛ حيث ف بُعد الجسيم بالأمتار عن نقطة ثابتة (و) ، ن الزمن بالثواني ، احسب السرعة المتوسطة للجسيم في الفترة الزمنية [١ ، ٤] .

## مثال ٧

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٦] يساوي ١٢، وكان هـ (س) = ٢س – ٣ ق(س) ، فَجِد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٦].

**الحل**

$\frac{ق(٦) - ق(١)}{٦ - ١} = ١٢$

لماذا؟

$\frac{\Delta هـ}{\Delta س} = \frac{هـ(٦) - هـ(١)}{٦ - ١} = \frac{\left(٢ \times ٦ - ٣ق(٦)\right) - \left(٢ \times ١ - ٣ق(١)\right)}{٥}$

$= \frac{١٢ - ٣ق(٦) - ٢ + ٣ق(١)}{٥} = \frac{١٢ - ٢}{٥} - ٣\left(\frac{ق(٦) - ق(١)}{٥}\right)$

$= \frac{١٠}{٥} - ٣ \times ١٢ = ٢ - ٣٦ = -٣٤$

## تدريب ٦

إذا كان معدل التغير في الاقتران ق في الفترة [١ ، ٤] يساوي ٦ ، وكان هـ (س) = ٣ س – ق(س) + ٢ ، فَجِد معدل التغير في الاقتران هـ في الفترة [١ ، ٤].

١) إذا كان ق(س) = $س^٢$ − س ، فجد مقدار التغير في قيمة الاقتران ق إذا تغيرت س من :

أ ) ٣ إلى ٤ ب) $س_١$ = ٢ إلى $س_٢$ = ٢ + هـ

٢) إذا كان ق(س) = $س^٢$ − ٣ ، فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من (١) إلى (١ + هـ).

٣) تحرك جُسيم في المستوى الإحداثي على خط مستقيم من النقطة أ (س ، ص) إلى النقطة ب (٢، ٥). إذا كانت $\Delta$س = ٠,١ ، $\Delta$ ص = ٠,٦ فجد إحداثيي النقطة أ.

٤) صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بالحرارة محافظة على شكلها، إذا زاد طول ضلعها من ٦سم إلى ٦,١ سم، فَجِد معدل تغير مساحة الصفيحة بالنسبة إلى طول ضلعها.

٥) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [−١ ، ٢] يساوي ٥ ، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = ٤ $س^٢$ − ٣ق(س) على الفترة نفسها .

٦) قُذف جسم رأسيًا للأعلى بحيث يكون بُعده (ف) بالأمتار عن سطح الأرض بَعد (ن) ثانية معطىً بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن − ٥$ن^٢$ جد:

أ ) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [٢ ، ٥].

ب) السرعة المتوسطة للجسم بدلالة $\Delta$ ن ؛ إذا تغيرت ن من صفر إلى $\Delta$ ن.

٧) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [١ ، ٤] يساوي ٣ ، وكان ق(١) + ق(٤) = ٢، فجد معدل التغير في الاقتران هـ(س) = $ق^٢$(س) على الفترة [١ ، ٤] .

٨) إذا كان معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٥] يساوي ٧ ، و كان معدل تغيره على الفترة [٥ ، ٩] يساوي ١٤، فجد معدل التغير في الاقتران ق على الفترة [٢ ، ٩].

٩ ) إذا كان القاطع المارُّ بالنقطتين (١ ، ق(١)) ، (٢ ، ٤) الواقعتين على منحنى الاقتران ق يصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد ق(١).

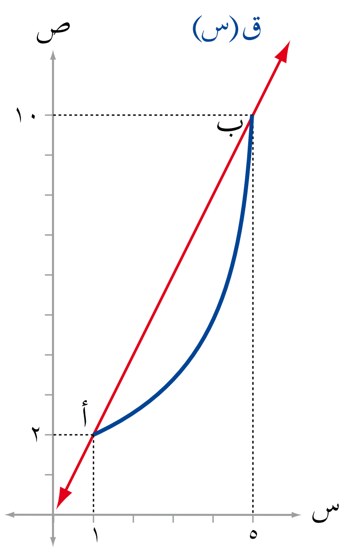
١٠) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} |٢\text{س} - ٣| & ، \quad ٠ \leq \text{س} < ٢ \\ [\text{س} + ١] & ، \quad ٢ \leq \text{س} < ٦ \end{cases}$

فجد معدل التغير في الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى ٤ .

١١) إذا كان ق(س) = $(\text{س}^{٢} + \text{س})^{-١}$ ، وكان مقدار التغير في قيمة الاقتران ق عندما تتغير س من ١ إلى $\text{س}_{٢}$ يساوي $(-\frac{١}{٣})$ ، فجد قيمة $\text{س}_{٢}$ حيث $\text{س}_{٢} > ٠$

١٢) يمثل الشكل (٢−٢) منحنى الاقتران ق على الفترة [ ١، ٥ ] .

جد ميل العمودي على القاطع $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ .

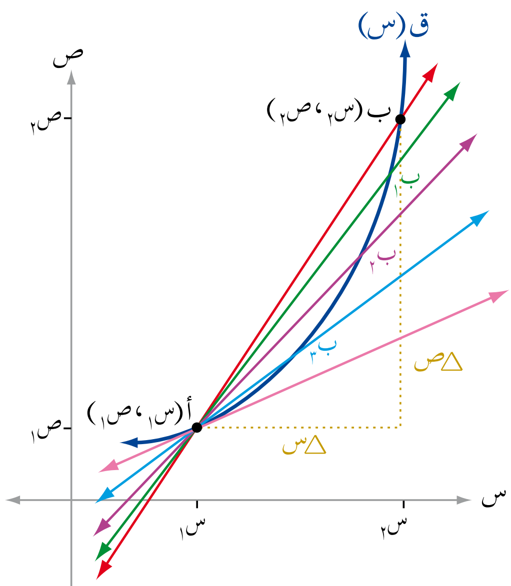


الشكل (٢−٢)

إذا كان ص = أس + ب ، فجد $\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$، وحدِّد علاقة هذه النهاية بميل المستقيم.

تعلَّمت سابقًا معدل التغير لاقتران معطىً وتفسيره الهندسي والفيزيائي. في هذا الدرس سوف تستخدم النهايات ومعدل التغير لإيجاد المشتقة قَ للاقتران ق ، وسيظهر لك أنَّ قَ (س$_1$) تمثل ميل المماس لمنحنى ص = ق(س) عند النقطة ( س$_1$، ق(س$_1$)) ، وإذا كان ص = ق(ن) يمثل اقتران مسافة لجسم يتحرك على خط مستقيم فإنَّ قَ (ن$_1$) يصف السرعة اللحظية للجسم عند الزمن ن$_1$.

في الشكل (٢-٣) إذا تحركت النقطة ب على منحنى الاقتران ق مقتربة من النقطة أ، فإنَّك تلاحظ أنَّ س$_2$ تقترب من س$_1$، وأنَّ $\Delta$س تصغر شيئًا فشيئًا، وتبعًا لذلك يأخذ القاطع ( $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ) أشكالًا مختلفة $\overleftrightarrow{\text{أب}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}_2}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أب}_3}$ ، ....وتتغير $\Delta$ ص.



الشكل (٢-٣)

عندما تؤول $\Delta$ س إلى الصفر (أي تقترب إلى القيمة صفر) يؤول القاطع ($\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$) إلى مماسّ لمنحنى الاقتران ق عند النقطة أ (تنطبق ب على أ )، أي يؤول ميل القاطع إلى ميل المماسّ عند النقطة أ(س$_1$ ، ص$_1$). في هذه الحالة يصبح ميل المماسِّ لمنحنى ق عند النقطة أ (س$_1$ ، ص$_1$) يساوي $\underset{\Delta \text{س} \to 0}{\text{نهـــا}} \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ إن وُجدت.

يُسمى المقدار $\underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{\Delta ص}{\Delta س}$ معدل التغير في ص بالنسبة إلى س أو **المشتقة الأولى للاقتران ق عند النقطة ($س_1$ ، ق($س_1$))** ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

$$ق\,'(س_1) \text{ أو } ص\,'\Big|_{س = س_1} \text{ أو } \frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س_1}$$

أي أنَّ $ق\,'(س_1) = \underset{س_2 \leftarrow س_1}{نهـــا} \frac{ق(س_2) - ق(س_1)}{س_2 - س_1} = \underset{\Delta س \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{ق(س_1 + \Delta س) - ق(س_1)}{\Delta س}$

**تعريف**

إذا كان ص = ق(س) اقترانًا معرَّفًا على فترة مفتوحة تحتوي $س_1$، وكانت $\underset{هـ \leftarrow 0}{نهـــا} \frac{ق(س_1 + هـ) - ق(س_1)}{هـ}$ موجودة ، فإنَّ هذه النهاية تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق عند س = $س_1$ .

ويُرمز لها بالرمز $ق\,'(س_1)$ أو $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س = س_1}$

ويكون $ق\,'(س_1)$ هو ميل المماس لمنحنى ق عند $س_1$.

لاحظ أنَّه تم استخدام هـ بدلًا من $\Delta$ س للتبسيط .

إذا كانت **النهاية موجودة** نقول إنَّ **ق قابل للاشتقاق عند $س_1$** ، أو يوجد لمنحنى الاقتران ق مماس عند $س_1$ .

أما إذا كانت **النهاية غير موجودة** فنقول إنَّ $ق\,'(س_1)$ غير موجودة أي إنَّ **ق غير قابل للاشتقاق عند $س_1$.**

## مثال ١

إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + ٣ ، فجد ، قَ(١).

**الحل**

$$قَ(١) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(١+هـ) - ق(١)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{((١+هـ)^{٢} + ٣) - (٤)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١+٢هـ+هـ^{٢} +٣ - ٤}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٢هـ + هـ^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ(٢+هـ)}{هـ} = ٢$$

لاحظ أنَّ قَ(١) = ٢ تمثل ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١ ، ٤).

## مثال ٢

إذا كان قَ(٢) = ٩ ، فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ}$ .

**الحل**

بفرض أنَّ ٤هـ = م ⟸ هـ = $\frac{م}{٤}$

عندما هـ ← ٠ فإنَّ م ← ٠

$$\therefore \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٢+٤هـ) - ق(٢)}{٦هـ} = \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٢+م) - ق(٢)}{٦ \times \frac{م}{٤}}$$

$$= \frac{٢}{٣} \lim_{م \to ٠} \frac{ق(٢+م) - ق(٢)}{م}$$

$$= \frac{٢}{٣} قَ(٢) = \frac{٢}{٣} \times ٩ = ٦$$

### تدريب ١

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ + ٢س ، فجد قَ(– ١).

٢) إذا كان قَ(٠) = ٦، فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٠) - ق(٥هـ)}{٣هـ}$

في تعريف المشتقة، إذا استخدمت الرمز س بدلًا من الرمز $س_١ + هـ$ (أي أنَّ $س = س_١ + هـ$) فإنَّ

$هـ = س - س_١$

وإنَّ $س \leftarrow س_١$ عندما $هـ \leftarrow ٠$ ويكون

$$قَ(س_١) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س_١ + هـ) - ق(س_١)}{هـ} = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

وعليه؛ يمكن التوصل إلى الصورة الآتية لمشتقة ق عند $س_١$:

**تعميم**

$$قَ(س_١) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$$

**مثال ٣**

إذا كان $ق(س) = \sqrt{س + ١}$ ، فجد $قَ(٣)$.

**الحل**

$$قَ(٣) = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{\sqrt{س + ١} - ٢}{س - ٣} \times \frac{\sqrt{س + ١} + ٢}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{س + ١ - ٤}{(س - ٣)(\sqrt{س + ١} + ٢)}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٣} \frac{١}{\sqrt{س + ١} + ٢} = \frac{١}{٤}$$

**تدريب ٢**

إذا كان $ص = ق(س) = \frac{س}{س + ١}$، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ٢$

**مثال ٤**

إذا كان $ق(س) = |س - ١|$ فجد $قَ(س)$ عند كلٍّ من القيم الآتية:

١) $س = ٣$ ٢) $س = ٠$

**الحل**

$$ق(س) = |س - ١| = \begin{cases} س - ١ & ، \quad س \geq ١ \\ ١ - س & ، \quad س < ١ \end{cases}$$

لماذا؟

١) $ق'(٣) = \lim_{س \to ٣} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣} \frac{س - ١ - ٢}{س - ٣} = ١$

٢) $ق'(٠) = \lim_{س \to ٠} \frac{ق(س) - ق(٠)}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ - س - ١}{س} = -١$

**تعريف**

ليكن الاقتران ق معرَّفًا عند العدد س = أ :

١) إذا كانت $ق'_+(أ) = \lim_{س \to أ^+} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجودة ، فإنَّ $ق'_+(أ)$ تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليمين عند س = أ .

٢) إذا كانت $ق'_-(أ) = \lim_{س \to أ^-} \frac{ق(س) - ق(أ)}{س - أ}$ موجودة ، فإنَّ $ق'_-(أ)$ تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق من اليسار عند س = أ .

٣) إذا كانت $ق'_-(أ) = ق'_+(أ) = ل$ ، فإنَّ $ق'(أ)$ موجودة وتساوي ل ، وبخلاف ذلك، فإنَّ $ق'(أ)$ غير موجودة أو ق(س) غير قابل للاشتقاق عند س = أ .

**مثال ٥**

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٢ & ، \quad س \geq ٣ \\ ٦س - ٩ & ، \quad س < ٣ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٣ .

**الحل**

لاحظ أنَّ قاعدة الاقتران ق تتفرع عند س = ٣ ؛ لذا يجب إيجاد $ق'_-(٣)$ ، $ق'_+(٣)$

$ق'_-(٣) = \lim_{س \to ٣^-} \frac{ق(س) - ق(٣)}{س - ٣} = \lim_{س \to ٣^-} \frac{٦س - ٩ - ٩}{س - ٣}$

$= \lim_{س \to ٣^-} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$

$$\text{قَ}_+(3) = \underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(٣)}}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهـــا}} \frac{\text{س}^2 - 9}{\text{س} - 3}$$

$$= \underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهـــا}} \frac{(\text{س}-3)(\text{س}+3)}{\text{س} - 3} = \underset{\text{س} \leftarrow 3^+}{\text{نهـــا}} (\text{س}+3) = 6$$

بما أنَّ $\text{قَ}_-(3) = \text{قَ}_+(3) = 6$

∴ قَ (٣) = ٦، أي أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٣

## تدريب ٣

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} 4\text{س} + 1 & ، \quad -3 \le \text{س} < 1 \\ 2\text{س} + 3 & ، \quad 1 \le \text{س} \le 5 \end{cases}$

جد قَ(−١) ، قَ (١) إن وجدت.

في كثير من الأحيان تحتاج دراسة مشتقة الاقتران عند أي نقطة في مجاله ، أي دراسة المشتقة الأولى كاقتران في س. لإيجاد هذا الاقتران ، ضع الرمز س بدلًا من الرمز $\text{س}_1$ في تعريف المشتقة.

### تعميم

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{هـ} \leftarrow 0}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} \quad ............ \quad (1)$$

وإذا استبدلت ع بـ ( س + هـ) ، أي أنَّ ع = س + هـ فإنَّ هـ = ع − س .

عندما هـ ← ٠ فإنَّ ع ← س . تصبح المعادلة (١) على الصورة الآتية:

### تعميم

$$\text{قَ(س)} = \underset{\text{ع} \leftarrow \text{س}}{\text{نهـــا}} \frac{\text{ق(ع)} - \text{ق(س)}}{\text{ع} - \text{س}} \quad ............ \quad (2)$$

يمكنك إيجاد قَ (س) باستخدام إحدى الصورتين (١) ، (٢).

### تعميم

إذا كان الاقتران ق معرَّفًا على الفترة [أ ، ب] ، فإنَّ قَ ( أ )، قَ (ب) غير موجودتين؛ لأنَّ ق غير معرّف على يسار العدد أ، وغير معرّف على يمين العدد ب.

## مثال ٦

إذا كان ق(س) = ١ − س$^{٢}$ ، س ∈ [ ١ ، ٤ ] ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) قَ (س)      ٢) قَ (٣)      ٣) قَ $(\frac{٣}{٢})$

### الحل

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - (س+هـ)^{٢} - (١ - س^{٢})}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{١ - س^{٢} - ٢س هـ - هـ^{٢} - ١ + س^{٢}}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{هـ (-٢س - هـ)}{هـ} = -٢س$$

∴ قَ(س) = −٢س لجميع قيم س ∈ (١ ، ٤)

٢) قَ(٣) = −٢ × ٣ = −٦

٣) قَ $(\frac{٣}{٢})$ = −٢ × $\frac{٣}{٢}$ = −٣

يمكن إيجاد قَ (س) ، س ∈ (١ ، ٤) في الفرع (١) بالطريقة الآتية :

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ع^{٢} - ١ + س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{س^{٢} - ع^{٢}}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{(س - ع)(س + ع)}{ع - س} = -٢س$$

## مثال ٧

إذا كان ل(س) = س$^{٣}$ − ٣ س$^{٢}$ + س، س ∈ ح فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

### الحل

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - ٣ع^{٢} + ع - س^{٣} + ٣س^{٢} - س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٣} - س^{٣}}{ع - س} - ٣\lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(ع - س)(ع^{٢} + ع\,س + س^{٢})}{ع - س} - ٣ \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(ع - س)\,(ع + س)}{ع - س} + ١$$

$$= ٣\,س^{٢} - ٦س + ١$$

## تدريب ٤

إذا كان ق(س) $= \frac{س}{س^{٢} + ٨}$ فجد قَ(س) باستخدام تعريف المشتقة.

## مثال ٨

أثبت أنَّ معدل تغير مساحة الدائرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أي قيمة) يساوي محيط الدائرة.

**البرهان**

معدل تغير اقتران عند نقطة هو مشتقة الاقتران عند تلك النقطة، كما تعلمت في بداية هذا الدرس.

بفرض أنَّ طول نصف قطر الدائرة س والمساحة م ، فتكون م(س) $= \pi\,س^{٢}$.

والمطلوب إثبات أنَّ مَ (س) $= ٢\pi س$

$$مَ\,(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{م(ع) - م\,(س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{\pi ع^{٢} - \pi\,س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{\pi\,(ع^{٢} - س^{٢})}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{\pi\,(ع - س)\,(ع + س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \pi\,(ع + س) = ٢\pi س$$ وحدة طول.

## تدريب ٥

صفيحة معدنية مربعة الشكل تتمدد بانتظام محافظة على شكلها. جد معدل التغير في مساحة هذه الصفيحة بالنسبة إلى طولها، عندما يكون طولها ٢٠ سم.

## مثال ٩

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ)} - \text{ق(س} - \text{٢هـ)}}{\text{هـ}} = \text{٤ق}'\text{(س)}$$

### البرهان

بطرح وإضافة ق(س) في البسط

$$\underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + هـ)} - \text{ق(س} - \text{٢هـ)}}{\text{هـ}} = \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ)} - \text{ق(س)} + \text{ق(س)} - \text{ق(س} - \text{٢هـ)}}{\text{هـ}}$$

$$= \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + ٢هـ)} - \text{ق(س)}}{\text{هـ}} + \underset{\text{هـ}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س} - \text{٢هـ)}}{\text{هـ}}$$

بفرض ل = ٢هـ ، فإن هـ = $\frac{\text{ل}}{٢}$

وأنَّ ل ← ٠ عندما هـ ← ٠

بفرض و = − ٢هـ ، فإن هـ = $\frac{-\text{و}}{٢}$

وأنَّ و ← ٠ عندما هـ ← ٠

$$= \underset{\text{ل}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + ل)} - \text{ق(س)}}{\frac{\text{ل}}{٢}} + \underset{\text{و}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س)} - \text{ق(س + و)}}{\frac{-\text{و}}{٢}}$$

$$= ٢\underset{\text{ل}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + ل)} - \text{ق(س)}}{\text{ل}} + ٢\underset{\text{و}\leftarrow ٠}{\text{نهــا}}\ \frac{\text{ق(س + و)} - \text{ق(س)}}{\text{و}}$$

$$= ٢\text{ق}'\text{(س)} + ٢\text{ق}'\text{(س)} = ٤\ \text{ق}'\text{(س)}$$

١) استخدم تعريف المشتقة لإيجاد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة (قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ ) ق(س) = ٨ − ٥س ، س = ٣

ب) م(س) = س$^{٣}$ + س$^{٢}$ ، س = −١

جـ) ل(س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ ، حيث س ≥ ١ ، س = ٥

د ) ع(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٢} - \text{س} & ، ٠ < \text{س} \leq ٣ \\ ٥\text{س} - ٩ & ، ٣ < \text{س} < ٦ \end{cases}$

عند س = ٠ ، س = ٣، س = ٦

هـ) ك(س) = |س$^{٢}$ − ٤| ، س = ١ ، س = ٢

و ) ص = $\dfrac{٢\text{س}}{\text{س} + ٣}$ ، س = −١

٢) جد $\dfrac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية مستخدمًا تعريف المشتقة:

أ ) ص = س$^{٢}$ − $\dfrac{٤}{\text{س}}$ ، س ≠ ٠      ب) ص = $\sqrt{٢\text{س} - ٦}$ ، س > ٣

جـ) ص = س$^{٣}$      د ) ص = $\sqrt[٣]{\text{س}}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلا للاشتقاق، فأثبت أنَّ:

أ ) $\lim\limits_{\text{هـ} \to ٠} \dfrac{\text{ق(س+هـ)} - \text{ق(س} - \text{هـ)}}{\text{هـ}}$ = ٢قَ(س)

ب) $\lim\limits_{\text{ع} \to \text{س}} \dfrac{\text{ع ق(س)} - \text{س ق(ع)}}{\text{ع} - \text{س}}$ = ق(س) − س قَ(س)

جـ ) $\lim_{ع \to س} \frac{٣ ع ق(ع) - ٣ س ق(س)}{ع - س} = ٣ ق(س) + ٣ س ق\prime(س)$

٤ ) إذا كان $ق\prime(٥) = ٦$ فجد $\lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(٥ - ٢هـ) - ق(٥ + ٤هـ)}{هـ}$

٥) إذا كان $ق(س) = (س - أ)\, ل(س)$ ، حيث $ل(س)$ اقتران متصل عند $س = أ$ ، أ ثابت، فبيِّنْ باستخدام تعريف المشتقة أن $ق\prime(أ) = ل(أ)$ .

٦) أنبوب من المعدن أسطواني الشكل يزيد ارتفاعه عن طول نصف قطر قاعدته بمقدار وحدتين، سُخِّن الأنبوب بالحرارة فبدأ بالتمدد محافظًا على شكله، جد معدل تغير مساحته الجانبية بالنسبة إلى طول نصف قطر قاعدته؛ عندما يكون طول نصف قطر قاعدته ٦ سم .

٧) إذا كان معدل التغير للاقتران ق عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي $(٦ س^٢ هـ - ٣ س هـ^٢)$، حيث: هـ عدد حقيقي يقترب من الصفر، فجد $ق\prime(-٢)$.

٨) مكعب معدني يتمدد بانتظام محافظًا على شكله، جد معدّل تغير حجم المكعب بالنسبة إلى طول ضلعه، عندما يكون طول ضلعه وحدتَيْ طولٍ.

٩) أثبت أنَّ معدل تغير حجم الكرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها (عند أية قيمة)، يساوي مساحة سطحها.

إذا كان ق(س) = |س − ١|، فأجب عما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س=١ .

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=١ .

١) للبحث في اتصال الاقتران ق عند س=١ يجب إيجاد النهاية عن يمين العدد ١ وعن يساره، لماذا؟

$$\lim_{س \to 1^+} ق(س) = \lim_{س \to 1^+} (س - ١) = ٠.$$

$$\lim_{س \to 1^-} ق(س) = \lim_{س \to 1^-} (١ - س) = ٠.$$

ومنه $\lim_{س \to 1} ق(س) = ٠.$

ق(١) = ٠.

∴ ق متصل عند س = ١ لأنَّ $\lim_{س \to 1} ق(س) = ق(١)$

٢) وللبحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س=١، لا بد من إيجاد $ق'_-(١) = ق'_+(١)$، لماذا؟

$$ق'_+(١) = \lim_{س \to 1^+} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to 1^+} \frac{س - ١ - ٠}{س - ١} = ١$$

$$ق'_-(١) = \lim_{س \to 1^-} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \to 1^-} \frac{١ - س}{س - ١} = -١$$

∴ $ق'(١)$ غير موجودة لأنَّ $ق'_+(١) \neq ق'_-(١)$

لاحظ في المسألة السابقة أنَّ الاقتران ق متصل عند النقطة (١ ، ق(١)) لكنه غير قابل للاشتقاق عند هذه النقطة.

والآن، إذا كان اقتران ما قابلًا للاشتقاق عند $س = س_١$ فهل يكون متصلًا عندها ؟ وإذا كان غير متصل عند $س = س_١$ فهل يمكن أن يكون قابلًا للاشتقاق عند $س = س_١$؟

**نظرية ١**

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند $س = س_١$ فإنّه يكون متصلًا عند $س = س_١$.

## البرهان

بما أنَّ ق قابل للاشتقاق عند $س = س_١$ ، فإنَّ $قَ(س_١) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١}$ موجودة

والمطلوب إثبات أنَّ $\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) = ق(س_١)$

$$ق(س) - ق(س_١) = \left(ق(س) - ق(س_١)\right)\left(\frac{س - س_١}{س - س_١}\right) ، س \neq س_١$$

بأخذ النهاية للطرفين

$$\lim_{س \leftarrow س_١} \left(ق(س) - ق(س_١)\right) = \lim_{س \leftarrow س_١} \frac{ق(س) - ق(س_١)}{س - س_١} \times \lim_{س \leftarrow س_١} (س - س_١)$$

$$\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س_١) = قَ(س_١) \times ٠$$

$$\lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) - ق(س_١) = ٠$$

$$\therefore \lim_{س \leftarrow س_١} ق(س) = ق(س_١)$$

وبما أنَّ $ق(س_١)$ معرفة ، فإنَّ $ق(س)$ متصل عند $س = س_١$.

**مثال ١**

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} س^٣ - ٤س & ، س > -٢ \\ ٢س + أ & ، س \leq -٢ \end{cases}$

قابلًا للاشتقاق عند $س = -٢$ ، فَجد قيمة الثابت أ .

**الحل**

بما أنَّ ق اقتران قابل للاشتقاق عند س = −٢ ، فإنَّ ق(س) متصل عند س = −٢ ، أي أنَّ $\lim_{س \leftarrow -٢}$ ق(س) موجودة وعليه يكون:

$$\lim_{س \leftarrow -٢^-} (٢س + أ) = \lim_{س \leftarrow -٢^+} (س^٣ - ٤س)$$

$$-٤ + أ = -٨ + ٨ ، \text{ ومنه } أ = ٤$$

**هندسيًّا إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$ فإنَّه يوجد لمنحنى الاقتران ق مماسًا عند ($س_١$، ق($س_١$)).**

والمثال الآتي يوضح أنَّ عكس النظرية (١) غير صحيح. ( أي أنَّه: إذا كان ق اقترانًا متصلًا عند س= $س_١$ ، فليس شرطًا أن يكون قابلًا للاشتقاق عند س = $س_١$)

**مثال ٢**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س} + ٣ & ، س \geq ٤ \\ ٣س - ٧ & ، س < ٤ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٤

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٤

**الحل**

١) $\lim_{س \leftarrow ٤^-}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤^-}$ (٣س − ٧) = ١٢ − ٧ = ٥

$\lim_{س \leftarrow ٤^+}$ ق(س) = $\lim_{س \leftarrow ٤^+}$ ($\sqrt{س}$ + ٣) = $\sqrt{٤}$ + ٣ = ٥

ومنه: $\lim_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) = ٥

ق(٤) = $\sqrt{٤}$ + ٣ = ٥

∴ الاقتران ق متصل عند س$=$ ٤ لأنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٤}$ ق(س) $=$ ق(٤)

٢) لإيجاد قَ (٤) جد قَ$_-$ (٤) ، قَ$_+$ (٤) ، لماذا؟

$$قَ_-(٤) = \lim_{س \leftarrow ٤^-} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤^-} \frac{٣س - ٧ - ٥}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤^-} \frac{٣(س - ٤)}{س - ٤} = ٣$$

$$قَ_+(٤) = \lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{ق(س) - ق(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{\sqrt{س} + ٣ - ٥}{س - ٤} = \lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$$

$$= \lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{س} + ٢}{\sqrt{س} + ٢} = \lim_{س \leftarrow ٤^+} \frac{س - ٤}{(س - ٤)(\sqrt{س} + ٢)} = \frac{١}{٤}$$

قَ(٤) غير موجودة لأنَّ قَ$_-$ (٤) $\neq$ قَ$_+$(٤) . أي أنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س$=$ ٤ .

لاحظ هنا أنَّ ق اقتران متصل عند س$=$ ٤ لكن قَ (٤) غير موجودة.

**ملاحظة**

يمكنك إيجاد $\lim\limits_{س \leftarrow ٤^+} \frac{\sqrt{س} - ٢}{س - ٤}$ بتحليل المقام إلى ( $\sqrt{س}$ + ٢) ( $\sqrt{س}$ − ٢) .

## تدريب ١

إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \frac{٤}{س} + ١ &، س \geq ٢ \\ ٥س - ١ &، س < ٢ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س$=$٢

٢) ابحث في قابلية اشتقاق الاقتران ق عند س $=$ ٢

لا بدَّ أنَّك لاحظت أنَّ كل الاقترانات في الأمثلة السابقة التي تم بحث مشتقتها عند نقطة كانت متصلة عند هذه النقطة، لكن ماذا يحدث لمشتقة الاقتران عند نقطة؛ إذا كان الاقتران غير متصل عند هذه النقطة؟

تناقش النظرية الآتية علاقة عدم الاتصال عند نقطة بقابلية الاشتقاق عندها.

**نظرية ٢**

إذا كان ق اقترانًا غير متصل عند النقطة $(س_١ ، ق(س_١))$ فإنَّه غير قابل للاشتقاق عندها.

## مثال ٣

إذا كان ق(س) $= [\frac{١}{٣} س + ٢]$ ، فأجب عما يأتي :

١) ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١.

٢) ابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٣.

**الحل**

١) أعد تعريف الاقتران ق حول س = ١

ق(س) = ٢ لكل س ∈ ] ٠ ، ٣ (

ق متصل عند س = ١ . تحقَّقْ من ذلك. لماذا؟

$$ق'(١) = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{ق(س) - ق(١)}{س - ١} = \lim_{س \leftarrow ١} \frac{٢ - ٢}{س - ١} = ٠$$

٢) أعد تعريف ق حول س = ٣

$$[\frac{١}{٣} س + ٢] = \begin{cases} ٢ & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٣ & ، ٣ \le س < ٦ \end{cases}$$

ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٣ قبل أن تبحث قابليته للاشتقاق عند س = ٣.

$$\lim_{س \leftarrow ^-٣} ق(س) = ٢ ، \lim_{س \leftarrow ^+٣} ق(س) = ٣$$

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٣^-}$ ق(س) $\neq \lim\limits_{س \leftarrow ٣^+}$ ق (س) ، فإن:

$\lim\limits_{س \leftarrow ٣}$ ق(س) غير موجودة ، أي أنَّ ق غير متصل عند س = ٣ ، وعليه فإنَّ ق غير قابل للاشتقاق عند س = ٣ ( نظرية ٢ ).

## تدريب ٢

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \sqrt{س + ١} &، \quad ٠ \leq س < ٢ \\ س^٢ - ١ &، \quad ٢ \leq س \leq ٥ \end{cases}$

فابحث قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢ ، س = ٤ .

## مثال ٤

إذا كان ق(س)= $\begin{cases} \frac{٦}{س} - ٤ &، \quad ١ \leq س \leq ٢ \\ ٣س + ١ &، \quad ٢ < س \leq ٥ \end{cases}$ ، فجد قَ(س) على مجاله.

**الحل**

١) ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س=١ ، س= ٥ لأنَّهما طرفا فترة

٢) ابحث في اتصال الاقتران ق عند س = ٢ ، لماذا؟

$$\lim_{س \leftarrow ٢^-} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^-} (\frac{٦}{س} - ٤) = -١$$

$$\lim_{س \leftarrow ٢^+} ق(س) = \lim_{س \leftarrow ٢^+} (٣س + ١) = ٧$$

بما أنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^-}$ ق(س) $\neq \lim\limits_{س \leftarrow ٢}$ ق(س)، فإنَّ $\lim\limits_{س \leftarrow ٢^+}$ ق(س) غير موجودة

$\therefore$ ق غير متصل عند س = ٢ وعليه فإنَّ قَ(٢) غير موجودة.

٣) ابحث المشتقة عندما ١ < س < ٢

$$قَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{(\frac{٦}{ع} - ٤) - (\frac{٦}{س} - ٤)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٦}{ع} - \frac{٦}{س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{\frac{٦س - ٦ع}{ع س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{٦(س - ع)}{ع س(ع - س)} = \frac{-٦}{س^{٢}}$$

٤) ابحث المشتقة عندما $٢ < س < ٥$

$$قَ(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ق(س + هـ) - ق(س)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{\left(٣(س + هـ) + ١\right) - \left(٣س + ١\right)}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣س + ٣هـ + ١ - ٣س - ١}{هـ}$$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{٣هـ}{هـ} = ٣$$

مما سبق تجد أنَّ:

$$قَ(س) = \begin{cases} \frac{-٦}{س^{٢}} & ، \quad ١ < س < ٢ \\ \text{غير موجودة} & ، \quad س = ١، ٢، ٥ \\ ٣ & ، \quad ٢ < س < ٥ \end{cases}$$

١) ابحث في قابلية اشتقاق كل اقتران مما يأتي عند قيمة ( قيم) س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ ) $ق(س) = \frac{س}{س - ١}$ ، س = ١

ب) $ع(س) = (س - ٢)[س]$ ، س = ٢

جـ) $ل(س) = [٣ - ٢س]$ ، س = $\frac{١}{٤}$ ، س = −١

د ) $ك(س) = \begin{cases} س^٢ + ٢س & ، ٠ \le س < ٣ \\ ٦س - ٣ & ، ٣ < س \le ٥ \end{cases}$ س = ٠ ، س = ٣، س = ٥

٢) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} & ، س \ne ٩ \\ ٦ & ، س = ٩ \end{cases}$

فجد قَ(٩) إن وُجدت.

٣) إذا كان $هـ(س) = \begin{cases} س^٢ & ، س \le ١ \\ ٢س + أ & ، س > ١ \end{cases}$

اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ١ ، فَجد قيمة الثابت أ.

٤) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} -١-٢س & ، س < -١ \\ س^٢ & ، -١ \le س \le ١ \\ س & ، س > ١ \end{cases}$

ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

٥) إذا كان $ع(س) = \begin{cases} س^٢ - ٢س & ، س < ٢ \\ ٢س - س^٢ & ، س \ge ٢ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ع للاشتقاق عند س = ٢

٦) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} ٠ &, \quad س \leq ٠ \\ ٥ - س &, \quad ٠ < س < ٤ \\ \frac{١}{٥ - س} &, \quad س \geq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ (س).

٧) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} [\, س \,] &, \quad ١ \leq س < ٢ \\ |\, س - ٣ \,| &, \quad ٢ \leq س \leq ٤ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على مجاله، واكتب قاعدة قَ(س).

# قواعد الاشتقاق
# Rules of Differentiation

**النتاجات**

- تستخدم قواعد الاشتقاق لإيجاد المشتقات.
- تجد المشتقات العليا لاقترانات و علاقات معطاة حتى المشتقة الرابعة.
- تجد مشتقات الاقترانات الدائرية.
- تستخدم قاعدة السلسلة لإيجاد مشتقة صِيَغ الاقترانات المركّبة.
- تجد المشتقة الأولى لعلاقة ضمنية.

## أولًا قواعد الاشتقاق (١) Differentiation Rules 1

إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ |س| ، فَجد قَ(س) عند س = ٤ .

درست سابقًا إيجاد مشتقة اقترانات بسيطة باستخدام التعريف، ولكنَّ إيجاد مشتقات بهذه الطريقة لاقترانات مثل ق(س) = ( س$^{٣}$ + ٦س − ٥) أو ق(س) = س$^{٣}$|س| عند س = ٤ يتطلب إجراء عمليات جبرية مطولة.

في هذا الدرس ستتعلم قواعد تـمكنك من إيجاد المشتقة بطرق مختصرة.

**قاعدة (١)**

إذا كان ق(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت ، فإنَّ قَ(س) = صفرًا ، لكل س ∋ ح.

**البرهان**

باستخدام تعريف المشتقة يكون

$$قَ(س) = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{ق(س+هـ) - ق(س)}{هـ} = \lim_{هـ \leftarrow ٠} \frac{(جـ - جـ)}{هـ} = صفرًا$$

تفسير هذه النتيجة هندسيًّا بأنَّ التمثيل البياني للاقتران الثابت ق(س) = جـ مستقيم أفقي، وميل المستقيم الأفقي= صفرًا.

## مثال ١

إذا كان ق(س) $= \sqrt{3}$ فجد قَ(س) ، قَ(١)، قَ(– ٤)

**الحل**

قَ(س) = ٠، لكل س ∋ ح ؛ لأنَّ ق(س) اقتران ثابت.

قَ(١) = ٠، قَ(– ٤) = ٠

**قاعدة (٢)**

إذا كان ق(س) = سⁿ، حيث ن عدد صحيح موجب ، فإنَّ قَ(س) = ن س^(ن–١)

**البرهان**

سنحتاج الحقيقة الآتية في البرهان

ع^ن – س^ن = (ع – س) ( ع^(ن–١) + ع^(ن–٢) س + ع^(ن–٣) س^٢ + ... + ع س^(ن–٢) + س^(ن–١))

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$$ ( المشتقة الأولى من التعريف)

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ع^ن - س^ن}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(\cancel{ع - س})(ع^{ن-1} + ع^{ن-2}س + ع^{ن-3}س^2 + \dots + ع\,س^{ن-2} + س^{ن-1})}{\cancel{ع - س}}$$

$$= \lim_{ع \to س} (ع^{ن-1} + ع^{ن-2}س + ع^{ن-3}س^2 + \dots + ع\,س^{ن-2} + س^{ن-1})$$

$$= \underbrace{س^{ن-1} + س^{ن-1} + س^{ن-1} + \dots + س^{ن-1}}_{\text{ن من المرات}}$$

$$= ن\,س^{ن-1}$$

## مثال ٢

جد قَ(س) ثم جد قَ(–١) في كلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) = س^٥ ٢) ق(س) = س ٣) ق(س) = س^١٢

**الحل**

١) قَ(س) = ٥ س$^{٤}$ ، قَ(−١) = ٥

٢) قَ(س) = ١ × س$^{٠}$ = ١ ، قَ(−١) = ١

٣) قَ(س) = ١٢ س$^{١١}$ ، قَ(−١) = −١٢

نحتاج إيجاد مشتقات اقترانات مكونة من جمع أو طرح أو ضرب أو قسمة اقترانات بسيطةٍ، سنناقش إيجاد هذه المشتقات في القواعد الآتية.

**قاعدة (٣)**

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س، جـ عدد ثابت، وكان هـ (س) =جـ ق(س) ، فإنَّ: الاقتران هـ (س) قابل للاشتقاق عند س وأن هـَ(س) =جـ قَ(س).

**البرهان**

$$هـَ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{جـ ق(ع) - جـ ق(س)}{ع - س}$$

$$= جـ \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = جـ قَ(س)$$

أي أنَّ مشتقة عدد ثابت مضروبًا في اقتران يساوي العدد الثابت مضروبًا في مشتقة الاقتران.

**مثال ٣**

جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) =٤س$^{٥}$ ٢) ق(س) = − س$^{٦}$ ٣) ق(س) = $\frac{س^{٣}}{\pi}$

**الحل**

١) قَ(س) = ٤×(٥س$^{٤}$) = ٢٠س$^{٤}$

٢) قَ(س) = (−١)(٦س$^{٥}$) = −٦س$^{٥}$

٣) قَ(س) = $\frac{١}{\pi}$ (٣س$^{٢}$) = $\frac{٣}{\pi}$ س$^{٢}$

## تدريب ١

جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $ق_١(س) = ٦$ ٢) $ق_٢(س) = -٤س^٢$ ٣) $ق_٣(س) = \frac{س}{\sqrt{٢}}$

## مثال ٤

إذا كان $ق(س) = س^٤ |س|$ فجد $قَ(-٢)$

**الحل**

عبّر عن ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة حول العدد $-٢$:

$ق(س) = س^٤ \times -س = -س^٥$ ، لماذا؟

$قَ(س) = -٥س^٤$

$\therefore قَ(-٢) = -٥(-٢)^٤ = -٨٠$

### قاعدة (٤)

**قاعدة الجمع والطرح**

إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، م قابلًا للاشتقاق عند س، وكان،

$ق(س) = ل(س) + م(س)$ ، $هـ(س) = ل(س) - م(س)$

فإنَّ كلًّا من الاقترانين ق، هـ قابل للاشتقاق عند س، وتكون:

$قَ(س) = لَ(س) + مَ(س)$

$هـَ(س) = لَ(س) - مَ(س)$

**البرهان**

$$قَ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\left(ل(ع) + م(ع)\right) - \left(ل(س) + م(س)\right)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{ل(ع) - ل(س)}{ع - س} + \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س}$$

$$= لَ(س) + مَ(س)$$

لإثبات أنَّ $هـَ(س) = لَ(س) - مَ(س)$، يمكن كتابة هـ(س) على الصورة:

$هـ(س) = ل(س) + (-١) م(س)$ وباستخدام قاعدة مشتقة مجموع اقترانين؛ وقاعدة مشتقة حاصل

ضرب عدد ثابت في اقتران تجد أنَّ هـَ(س) = لَ(س) + (−١) مَ(س) ومنه هـَ(س) = لَ(س) − مَ(س)

## مثال ٥

جد قَ (س) في كلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = ٧ س$^{٢}$ + $\sqrt{٣}$ س$^{٤}$ ٢) ق(س) = ٤ س$^{٥}$ − $\pi$ س$^{٦}$

**الحل**

١) قَ (س) = ١٤ س + ٤ $\sqrt{٣}$ س$^{٣}$

٢) قَ (س) = ٢٠ س$^{٤}$ − ٦ $\pi$س$^{٥}$

وبصورة عامة : إذا كان كلٌّ من الاقترانات ق$_{١}$ ، ق$_{٢}$ ،... ، ق$_{ن}$ قابلًا للاشتقاق عند س وكان :

ل(س) = ق$_{١}$(س) + ق$_{٢}$(س) + ق$_{٣}$(س) + ... + ق$_{ن}$(س)،فإنَّ:

لَ (س) = قَ$_{١}$(س) + قَ$_{٢}$(س) + قَ$_{٣}$(س) + ... + قَ$_{ن}$(س)

**نتيجة**

إذا كان ق اقترانًا كثير حدود ، فإنَّ ق قابل للاشتقاق لكل س ∈ ح.

## مثال ٦

إذا كان ق(س) = س$^{٤}$ − ٦س$^{٢}$ + ٤ ، فجد كلًّا مما يأتي :

١) قَ(س) ٢) قيم س التي يكون عندها لمنحنى الاقتران ق مماس أفقي.

**الحل**

١) قَ(س) = ٤س$^{٣}$ − ١٢ س

٢) يكون المماس أفقيًّا عندما قَ(س) = ٠

أي أنَّ ٤س$^{٣}$ − ١٢ س = ٠

٤س (س$^{٢}$ −٣) = ٠

ومنه س = ٠ ، س = ± $\sqrt{٣}$

∴ يكون المماس أفقيًّا عند س = ٠، س = ± $\sqrt{٣}$

## تدريب ٢

إذا كان ق(س) = ٥س$^{٤}$ $\left(٢س - \frac{٣}{س}\right)$ فجد قَ ( −١)

## مثال ٧

إذا كان ق(س) = ٤ س$^{٣}$ − ⟦ ٢س +١ ⟧ فجد قَ (٠,٦)

**الحل**

أعد تعريف الاقتران ق دون استخدام رمز اقتران أكبر عدد صحيح حول س =٠,٦

⟦ ٢س +١ ⟧ يغير قاعدته بعد كل فترة طولها $\frac{١}{٢}$ ، وبما أنَّ ٠,٦ ∋ [ $\frac{١}{٢}$ ، ١)

⟦ ٢س +١ ⟧ = ⟦ ٢ × ٠,٦ + ١ ⟧ = ⟦ ٢,٢ ⟧ = ٢

إذن تصبح القاعدة ق(س) = ٤ س$^{٣}$ − ٢

قَ (س) = ١٢س$^{٢}$

قَ (٠,٦) = ١٢ × (٠,٦)$^{٢}$ = ٤,٣٢

## مثال ٨

إذا كان ق(س) = | س−٢ | + ٣ س$^{٢}$ ، فجد قَ (١).

**الحل**

أعد تعريف الاقتران ق(س) دون استخدام رمز القيمة المطلقة .

لاحظ أنَّ | س−٢ | = ٢− س حول العدد ١

وعليه فإنَّ ق(س) = ٣س$^{٢}$− س + ٢

قَ (س) = ٦س −١

قَ(١) = ٥

## تدريب ٣

أجب عن كلٍّ مما يأتي :

١) إذا كان ق(س)= ٢س$^{٣}$ ( ٤س − ٥س$^{٢}$) فجد قَ (س).

٢) إذا كان ق(س) = ⟦ ٣س + ١ ⟧ + | س | فجد قَ (٠,٤).

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ ) $ق(س) = \sqrt{٣٠}$ ب) $ص = ٤ س^{١٠}$

جـ) $ص = ٤ \pi^{٢}$ د ) $ق(س) = \left(\frac{١}{٢} - س\right)^{٤}$

٢) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ ) $ص = س^{٢} + ٣س - ٤$ ب) $ص = \frac{١}{٤}(س^{٢} + ٨)$

جـ) $ص = \frac{٤}{٣} \pi س^{٣}$ د ) $ص = \frac{١}{٤} س^{٤} + \frac{١}{٣} س^{٣} - س$

٣) جد قَ(س ) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ ) $ق(س) = \frac{١}{٢} س^{٤}$ ، $س = -١$

ب) $ق(س) = س^{٢} + |٣س - ٦|$ ، $س = ٣$

جـ) $ق(س) = [\frac{١}{٢} س + ٥] - ٤س^{٢}$ ، $س = ٢,٤$

د ) $ق(س) = ٣س + [س + ٠,١] - |س|$ ، $س = -١$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق، وكان لَ(−٢ ) = ٤ ، هـَ(−٢ ) = −٣ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ ) $ق(س) = ٦ ل(س) - ٢هـ(س)$

ب) $ق(س) = \frac{١}{٢}ل(س) + هـ(س) + س^{٣}$

٥) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} أ س^{٢} + ب س & ، س \leq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + أ س & ، س > ١ \end{cases}$

وكانت قَ (١) موجودة ، فجد قيمة كلٍّ من الثابتيْن أ ، ب.

٦) إذا كان ق(س) $= \begin{cases} \text{ل(س)} & \text{، س} \geq \text{جـ} \\ \text{لَ(جـ) (س}-\text{جـ)} & \text{، س} > \text{جـ} \end{cases}$

وكان ق(س) اقترانًا متصلًا عند س= جـ ، وكان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = جـ.
فأثبت أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = جـ ، ثم جد قَ(جـ) .

## ثانيًا قواعد الاشتقاق ٢
## Differentiation Rules 2

إذا كان ق(س) = $\frac{٤س^٢ - ٣}{س^٤ + ٢س + ١}$ ، فجد قَ (س) .

تعلمت سابقًا القواعد العامة لاشتقاق نوع معين من الاقترانات، وستتعرف في هذا الدرس قواعد أخرى.

لإيجاد مشتقة الاقتران ق(س) = ( س$^٣$ + ٦س − ٥ ) ( ٤س$^٢$ +١) جد ناتج الضرب ثم استخدم قواعد الاشتقاق السابقة.

ق(س) = ٤ س$^٥$ + ٢٥ س$^٣$ − ٢٠ س$^٢$ + ٦ س − ٥

قَ (س) = ٢٠ س$^٤$ + ٧٥س$^٢$ − ٤٠ س + ٦

يمكن إيجاد قَ(س) دون إيجاد ناتج الضرب كما في القاعدة الآتية:

**قاعدة (١)**

**قاعدة الضرب**

إذا كان الاقترانان ل، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س)= ل(س) × هـ (س) ، فإنَّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ:

**قَ(س) = ل(س) × هـَ(س) + هـ (س) × لَ(س)**

أي أنَّ مشتقة حاصل ضرب اقترانين تساوي:

**الاقتران الأول × مشتقة الثاني + الاقتران الثاني × مشتقة الأول**

**مثال ١**

إذا كان ق(س) = ( س$^٣$ + ٦س) ( ٤س$^٢$ − ٣) فجد قَ (س).

**الحل**

قَ (س) = ( س$^٣$ + ٦س) $\frac{د}{دس}$ ( ٤س$^٢$ − ٣) + ( ٤س$^٢$ − ٣) $\frac{د}{دس}$ (س$^٣$ + ٦س)

$= (س^٣ + ٦س) (٨س) + (٤س^٢ - ٣) (٣س^٢ + ٦)$

$= ٨س^٤ + ٤٨س^٢ + ١٢س^٤ + ٢٤س^٢ - ٩س^٢ - ١٨ = ٢٠ س^٤ + ٦٣ س^٢ - ١٨$

حُلَّ المثال (١) بطريقة أخرى.

## تدريب ١

إذا كان ق(س) = ( ٤ - ٢ س^٣) ( $\frac{١}{٢}$ س + ٣) فجد قَ(س).

## قاعدة (٢)

**قاعدة القسمة**

إذا كان الاقترانان ل، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = $\frac{ل(س)}{هـ(س)}$، هـ(س) ≠ ٠ ،
فإنَّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ

$$قَ(س) = \frac{هـ(س) \times لَ(س) - ل(س) \times هـَ(س)}{(هـ(س))^٢}$$

أي أنَّ مشتقة حاصل قسمة اقترانين تساوي :

$$\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^٢}$$

## مثال ٢

إذا كان ق(س) = $\frac{س^٣ + س}{س^٢ + ٥}$ ، فجد قَ(س) .

**الحل**

استخدم قاعدة القسمة لتجد أنَّ:

$$قَ(س) = \frac{(س^٢ + ٥) \times \frac{د}{دس}(س^٣ + س) - (س^٣ + س) \times \frac{د}{دس}(س^٢ + ٥)}{(س^٢ + ٥)^٢}$$

$$= \frac{(س^٢ + ٥)(٣س^٢ + ١) - (س^٣ + س)(٢س)}{(س^٢ + ٥)^٢}$$

$$= \frac{(٣س^٤ + س^٢ + ١٥س^٢ + ٥) - (٢س^٤ + ٢س^٢)}{(س^٢ + ٥)^٢} = \frac{س^٤ + ١٤س^٢ + ٥}{(س^٢ + ٥)^٢}$$

## تدريب ٢

إذا كان $ص = \frac{٦س + ١}{س^{٢} - ٤}$ فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=١}$

قد تواجهك بعض الاقترانات المكوّنة من بسط ومقام يكون بسطها عددًا ثابتًا . النتيجة الآتية تُسهل عليك العمليات الجبرية لإيجاد مشتقة مثل هذه الاقترانات.

### نتيجة (١)

إذا كان الاقتران ل قابلًا للاشتقاق عند س، أ عدد ثابت وكان:

$ق(س) = \frac{أ}{ل(س)}$ ، $ل(س) \neq ٠$ فإنّ الاقتران ق يكون قابلًا للاشتقاق عند س، وإنَّ:

$$قَ(س) = \frac{-أ\,لَ(س)}{\left(ل(س)\right)^{٢}}$$

### فكّر وناقش

أثبت نتيجة (١).

### نتيجة (٢)

إذا كان $ق(س) = س^{ن}$ ، $س \neq ٠$ ، ن عدد صحيح سالب، فإنَّ $قَ(س) = ن\,س^{ن-١}$

**البرهان**

افرض أنَّ $ن = -م$ ، $س \neq ٠$ حيث م عدد صحيح موجب، فيكون $ق(س) = س^{ن} = س^{-م}$.

باستخدام خصائص الأسس يكون $ق(س) = \frac{١}{س^{م}}$

$$قَ(س) = \frac{س^{م} \times ٠ - (١)\,(م\,س^{م-١})}{(س^{م})^{٢}} = \frac{-م \times س^{م-١}}{(س^{م})^{٢}} = -م\,س^{م-١-٢م} = -م\,س^{-م-١}$$

$قَ(س) = -م\,س^{-م-١} = ن\,س^{ن-١}$ لأنّ $-م = ن$

## مثال ٣

جد مشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $\text{ل}(\text{س}) = \dfrac{\pi}{\text{س}^{٢}}$ ‏ ‏ ‏ ٢) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{-٤}$ ‏ ‏ ‏ ٣) $\text{ع}(\text{س}) = \dfrac{\text{س}^{٤} - ٣}{\text{س}^{٣}}$

**الحل**

١) باستخدام النتيجة (١) يكون:

$$\text{ل}'(\text{س}) = \frac{-\pi\,(٢\,\text{س})}{(\text{س}^{٢})^{٢}} = \frac{-٢\pi}{\text{س}^{٣}}$$

٢) باستخدام النتيجة (٢) يكون:

$$\text{ق}'(\text{س}) = -٤\,\text{س}^{-٤-١} = -٤\,\text{س}^{-٥} = \frac{-٤}{\text{س}^{٥}}$$

٣) يمكن إعادة كتابة ق على الصورة

$$\text{ع}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٤}}{\text{س}^{٣}} - \frac{٣}{\text{س}^{٣}} = \text{س} - \frac{٣}{\text{س}^{٣}} = \text{س} - ٣\,\text{س}^{-٣}$$

باستخدام النتيجة (٢) وقواعد الاشتقاق يكون :

$$\text{ع}'(\text{س}) = ١ - ٣(-٣)\,\text{س}^{-٤} = ١ + ٩\,\text{س}^{-٤} = ١ + \frac{٩}{\text{س}^{٤}}$$

### فكّر وناقش

حُلَّ فرع (٣) من مثال (٣) بطريقة أخرى.

### تدريب ٣

جد $\dfrac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ مما يأتي :

١) $\text{ص} = \dfrac{\sqrt{٣}}{\text{س}^{٢}}$ ‏ ‏ ‏ ٢) $\text{ص} = \dfrac{٢ - \text{س}^{٣}}{\text{س}}$

لإيجاد مشتقة الاقتران المتشعب ق(س) = { ل(س) ، س ≥ أ
هـ (س) ، س < أ

حيث لَ (س) موجودة لكل س > أ ، هـَ (س) موجودة لكلِّ س < أ ، اتبع الخطوات الآتية:

١) جد لَ (س) عندما س > أ، هـَ (س) عندما س < أ فيكون :

قَ(س) = { لَ(س) ، س > ١
هـَ (س) ، س < ١

٢)ابحث في اتصال ق(س) عند س = أ وهناك حالتان :

أ ) ق اقتران غير متصل عند س = أ وبناءً عليه ق غير قابل للاشتقاق عند س = أ ( نظرية ٢ في الاتصال والاشتقاق)

ب) ق متصل عند س = أ وفي هذه الحالة يجب بحث قابلية الاشتقاق عند س = أ باستخدام تعريف المشتقة عند نقطة.

ويمكنك استخدام قواعد الاشتقاق في الاقترانات المتشعبة التي قواعدها على صورة كثيرات حدود أو نسبية.

**مثال ٤**

إذا كان ق(س) = { ٨س$^{٣}$ + ٤س ، س ≥ ١
٨س$^{٢}$ + ١٢س − ٨ ، س < ١
، فجد قَ(س).

**الحل**

١) عندما س > ١ ، ق اقتران متصل؛ لأنَّه على صورة كثير حدود، إذن قَ(س) = ٢٤س$^{٢}$ + ٤

عندما س < ١، ق اقتران متصل؛ لأنَّه على صورة كثير حدود، إذن قَ(س) = ١٦ س + ١٢

أي إنَّ قَ (س) = { ٢٤س$^{٢}$ + ٤ ، س > ١
١٦س + ١٢ ، س < ١

٢) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١.

ق متصل عند س = ١ لماذا؟

$ق'_+(١) = ٢٤(١)^٢ + ٤ = ٢٨$

$ق'_-(١) = ١٦(١) + ١٢ = ٢٨$

بما أن $ق'_+(١) = ق'_-(١) = ٢٨$

إذن $ق'(١) = ٢٨$

يمكنك الآن كتابة ق′(س) لكل س ∈ ح على الصورة :

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢٤س^٢ + ٤ & ، س > ١ \\ ٢٨ & ، س = ١ \\ ١٦س + ١٢ & ، س < ١ \end{cases}$$

## مثال ٥

إذا كان $ق(س) = س^٣ |س - ٢|$ فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح .

**الحل**

١) أعد كتابة الاقتران ق دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$|س - ٢| = \begin{cases} س - ٢ & ، س \geq ٢ \\ ٢ - س & ، س < ٢ \end{cases}$$

وعليه فإنَّ:

$$ق(س) = \begin{cases} س^٤ - ٢س^٣ & ، س \geq ٢ \\ ٢س^٣ - س^٤ & ، س < ٢ \end{cases}$$

٢) عندما س > ٢ ، ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود، $ق'(س) = ٤س^٣ - ٦س^٢$

عندما س < ٢ ، ق متصل لأنَّه على صورة كثير حدود، $ق'(س) = ٦س^٢ - ٤س^٣$

$$أي أنَّ ق'(س) = \begin{cases} ٤س^٣ - ٦س^٢ & ، س > ٢ \\ ٦س^٢ - ٤س^٣ & ، س < ٢ \end{cases}$$

٣) ابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ٢.

ق اقتران متصل عند س= ٢ لماذا؟

$ق\bar{}_{+}(٢) = ٤(٢)^{٣} - ٦(٢)^{٢} = ٨$

$ق\bar{}_{-}(٢) = ٦(٢)^{٢} - ٤(٢)^{٣} = -٨$

بما أنَّ $ق\bar{}_{+}(٢) \neq ق\bar{}_{-}(٢)$ فإنَّ قَ (٢) غير موجودة.

يمكنك الآن كتابة قَ (س) لكلِّ س ∈ ح على الصورة :

$$قَ(س) = \begin{cases} ٤س^{٣} - ٦س^{٢} &، س > ٢ \\ \text{غير موجودة} &، س = ٢ \\ ٦س^{٢} - ٤س^{٣} &، س < ٢ \end{cases}$$

## تدريب ٤

إذا كان $ق(س) = \begin{cases} \frac{٤}{س + ١} &، س \leq ١ \\ س + ١ &، س > ١ \end{cases}$

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق على ح.

١) جد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ في كلٍّ مما يأتي:

أ ) ص = $س^٢$ ( ١ + $س^٣$)

ب) ص = ($س^٣$ − ٢س + ١) ( ٤س − ٣)

جـ) ص = $\frac{\text{س}^٣}{١ - \text{س}}$

د ) ص = $\frac{\text{س}^٢ - ١}{٢\text{س} + ٣}$

٢) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي:

أ ) ق(س) = س(س + ٢) ( $س^٢$ − ٣س − ٦)

ب) ق(س) = | س − ٣ | ($س^٢$ + س)

جـ) ق(س) = $\frac{\text{س}^٢ - ٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ + ٤}$

د ) ق(س) = $\frac{|\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٤|}{\text{س}(\text{س} - ١)}$ ، س $\in$ ( ١ ، ٥ ]

٣) إذا علمت أنَّ هـ (س) قابلٌ للاشتقاق وأنَّ هـ (٢) = ٣ ، هـَ(٢) = −١، فجد قَ (٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ ) ق(س) = س هـ (س)

ب) ق(س) = ٣$س^٢$هـ (س) − ٥س

جـ) ق(س) = هـ (س) − $\frac{١}{\text{هـ(س)}}$

د ) ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{٣ \text{ هـ (س)}}$

٤) إذا كان ل، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق وكان ل (−٢) = ٣ ، لَ(−٢) = − ١ ، هـ(−٢) = ٤ هـَ (−٢) = −٦ ، فجد قَ(−٢) في كلٍّ مما يأتي:

أ ) ق(س) = ل(س) × هـ(س)

ب) ق(س) = $\frac{\text{هـ(س)}}{\text{ل(س)} + ١}$

٥) جد قَ(س) في كلٍّ مما يأتي، عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها:

أ ) ق(س) = س$^{٢}$ − [ ٢س + ١ ] ، س = ١,٤

ب) ق(س) = $\frac{[\frac{١}{٤}\text{س} + ٣]}{|٢\text{س} - ١|}$ ، س = ٢

جـ) ق(س) = $\frac{٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، س = −١

٦) إذا كانت ل، م، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق عند س، فاستخدم قاعدة مشتقة حاصل ضرب اقترانين لإثبات أنَّ:

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س) × م(س) × هـ(س))

= ل(س) × م(س) × هـَ (س) + ل(س) × هـ(س) × مَ (س) + م(س) × هـ(س) × لَ(س)

٧) اعتمد على النتيجة في السؤال( ٦ ) لإثبات أنَّ :

$\frac{د}{د\text{س}}$ (ل(س))$^{٣}$ = ٣(ل(س))$^{٢}$ × لَ(س)

٨) إذا كان ق(س) = { ٤س$^{٣}$ ، س ≤ ١ ؛ ٣س$^{٤}$ + ١ ، س > ١ }

فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س = ١ ، ثم اكتب قاعدة قَ(س).

٩) إذا كان ق(س) = | س | ( س$^{٢}$ + ٦س) ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق لجميع قيم س ∈ ح .

١٠) إذا كان ق(س) = { أ س$^{٢}$ − ب س ، س ≤ ٢ ؛ ٤− ب س$^{٣}$ + أس ، س > ٢ }

وكان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = ٢ ، فجد كلًّا من الثابتين أ ، ب .

## ثالثًا المشتقات العليا Higher Derivatives

إذا كان ق(س) = (٢س$^{٤}$ − ٣س + ١)(س$^{٢}$ + ٧)، فجد قً(−١).

تعلمت سابقًا أنَّه إذا كان ص = ق(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ مشتقته بالنسبة إلى س تُسمى المشتقة الأولى للاقتران ق، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

صَ ، $\frac{ءص}{ءس}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(ق (س)) ، قَ(س)

لاحظ أنَّ قَ (س) اقتران في س يمكن أن يكون قابلا للاشتقاق بالنسبة إلى س، ومشتقة قَ(س) تُسمى **المشتقة الثانية** للاقتران ق، ويُرمز لها بأحد الرموز الآتية:

صً ، $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(قَ (س)) ، قً(س)

يمكنك أن تحسب مشتقة اقتران من أي رتبة تريد ( شرط وجودها) ، حيث إنَّ **المشتقة الثالثة** هي مشتقة المشتقة الثانية ويُرمز لها بأحد الرموز: ص‴ ، $\frac{ء^{٣}ص}{ءس^{٣}}$ ، $\frac{ء}{ءس}$(قً (س)) ،ق‴ (س)

تُسمى مثل هذه المشتقات **بالمشتقات العليا** للاقتران ق. لاحظ أنَّ التسلسل ضروري في إيجاد المشتقات، فمثلًا لإيجاد المشتقة الثالثة لاقتران؛ يجب إيجاد المشتقة الأولى ثم الثانية ثم الثالثة.

إنَّ استخدام الإشارات (////) للتعبير عن المشتقة الرابعة غير عملي وكذلك الأمر بالنسبة إلى المشتقات الخامسة والسادسة ، ... إلخ. لذلك تُستخدم الأعداد الصحيحة بين قوسين للتعبير عن المشتقات الرابعة ، والخامسة ، ... إلخ. فمثلًا ص$^{(٤)}$ أو ق$^{(٤)}$(س) تعبر عن المشتقة الرابعة للاقتران ق. سنكتفي بإيجاد المشتقات حتى الرابعة في هذا الدرس.

### مثال ١

إذا كان ق(س) = ٤س$^{٥}$ − ٢س$^{٣}$ + ٦س$^{٢}$ + ١ . فجد ق‴ (س)

**الحل**

قَ(س) = ٢٠ س$^{٤}$ − ٦س$^{٢}$ + ١٢س

قً(س) = ٨٠س$^{٣}$ − ١٢س + ١٢

قً(س) = ٢٤٠ س$^{٢}$ − ١٢

**تدريب ١**

١) إذا كان ق(س) = ٥س$^{٣}$ − ٤س$^{٢}$ + ٦س + ١ ، فجد قً(−١).

٢) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

**مثال ٢**

إذا كان ق(س) = س$^{ن}$ ، وكان قً(س) = ٢٤س$^{ن−٣}$ ، فجد قيمة ن .

**الحل**

قَ (س) = ن س$^{ن−١}$

قً (س) = ن (ن − ١) س$^{ن−٢}$

قً (س) = ن (ن − ١) (ن − ٢) س$^{ن−٣}$ = ٢٤س$^{ن−٣}$

∴ ن (ن − ١) (ن − ٢) = ٢٤

ابحث عن ثلاثة أعداد متتالية حاصل ضربها ٢٤.

الأعداد هي ٢، ٣، ٤

أي أنَّ ن = ٤.

**تدريب ٢**

إذا كان ق (س) = $\frac{١}{١٠}$ س$^{ن}$ ، وكان قً (س) = أس$^{٢}$ ، فجد قيمة الثابت أ.

**مثال ٣**

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} س^{٢} & ، س \geq ٠ \\ ٠ & ، س < ٠ \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ الاقتران ق قابل للاشتقاق عند س = ٠

٢) اكتب قاعدة قَ(س) لجميع قيم س ∈ح .

٣) بيّن أنَّ قً(٠) غير موجودة.

## الحل

١) ق اقتران متصل لجميع قيم س > ٠ لأنَّه على صورة كثير حدود ، قَ(س) = ٢س.

ق اقتران متصل لجميع قيم س < ٠ لأنَّه اقتران ثابت ، قَ(س) = صفرًا .

$$\therefore\ \text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س > ٠} \\ \text{٠} & \text{، س < ٠} \end{cases}$$

ق اقتران متصل عند س = ٠ ، تحقَّقْ من ذلك.

$\text{قَ}_{+}$(٠) = ٢(٠) = ٠

$\text{قَ}_{-}$(٠) = ٠

بما أنَّ $\text{قَ}_{+}$(١) = $\text{قَ}_{-}$(١) = ٠

إذن قَ(٠) = ٠ ، ويكون الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند س = ٠

٢) يمكنك كتابة قَ(س) لجميع قيم س ∈ ح على الصورة :

$$\text{قَ(س)} = \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س > ٠} \\ \text{٠} & \text{، س = ٠} \\ \text{٠} & \text{، س < ٠} \end{cases} \qquad \text{أو} \qquad \begin{cases} \text{٢س} & \text{، س > ٠} \\ \text{٠} & \text{، س ≤ ٠} \end{cases}$$

٣) اتبع الخطوات السابقة لتصل إلى قً(س) = $\begin{cases} \text{٢} & \text{، س > ٠} \\ \text{٠} & \text{، س < ٠} \end{cases}$

$\text{قً}_{+}$(٠) = ٢، $\text{قً}_{-}$(٠) = ٠

بما أنَّ $\text{قً}_{+}$(٠) ≠ $\text{قً}_{-}$(٠) فإنَّ قً(٠) غير موجودة.

### تدريب ٣

إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{٣} & \text{، س ≥ ٠} \\ \text{٠} & \text{، س < ٠} \end{cases}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ كلًّا من قَ(٠)، قً(٠) موجودة، ثم جد قيمة كلٍّ منها.

٢)اكتب قاعدة كل من قَ(س)،قً(س) لجميع قيم س ∈ ح .

٣) بيّن أنَّ قٌّ(س)(٠) غير موجودة.

١) جد المشتقة الثانية لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ ) ص = ٤س$^{٣}$ − $\frac{٧}{٢}$س$^{٢}$ − ٦ س ب) ص = $\frac{س^{٢} + ١}{س}$

جـ) ص = |س| ( س$^{٢}$ + س)

٢) إذا كان ق(س) = ( س$^{٢}$ + ٤ س) ( س$^{٣}$ + ١)، فجد قيمة قَ (−١) × قً(−١)

٣) إذا كان ق(س) = س$^{ن}$ ، ن عدد صحيح موجب وكانت قً(س) = أ س فجد قيمة الثابت أ .

٤) إذا كان ص = $\frac{٢}{س}$ ، س ≠ ٠ ، فأثبت أنَّ صً = $\frac{١}{٢}$ ص$^{٣}$

٥) إذا كان ق(س) = س$^{٤}$ + ٣س$^{٣}$ − ٦ س$^{٢}$ − س ، فجد قيم س التي تحقق ما يأتي :

أ ) قً(س) = ٠ ب) قً(س) ≥ ٠ جـ) قً(س) < ٠

٦) جد المشتقة الثالثة لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ ) ص = س$^{٤}$ − ٣س$^{-٥}$

ب) ص = أس$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س ، حيث أ ، ب، جـ ثوابت.

٧) جد قيمة كلٍّ مما يأتي :

أ ) قًّ($\pi$) حيث ق(س) = س$^{٢}$ − ٦س

ب) قً(−١) حيث ق(س) = $\frac{١}{٢٠}$س$^{٥}$ − $\frac{١}{٣}$س$^{٣}$

جـ) ق$^{(٤)}$(١) حيث ق (س) = $\frac{١}{س}$

٨) إذا كان كلٌّ من ل ، لَ ، لً قابلًا للاشتقاق عند س، وكان ق(س) = س$^{٢}$ ل(س)

فجد قً (س) ، قًّ (س).

٩ ) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين، فأثبت أنَّ :

(ل × هـ)ً (س) = (لً× هـ) (س) + ٢(لَ × هـَ) (س) + ( ل × هـً) (س)

١٠) جد قاعدة اقتران كثير الحدود ق من الدرجة الثانية الذي فيه ق(١) = ٣، قَ (١) = −٢
قً(١) = ٤ .

١١) إذا كان كلٌّ من الاقترانين ل، هـ قابلًا للاشتقاق مرتين فأثبت أنَّ :

ل(س) هـً (س) − لً(س) هـ(س) = $\frac{د}{دس}$(ل(س) هـَ (س) − لَ(س) هـ(س))

١٢) إذا كانت ل، ق، هـ اقترانات قابلة للاشتقاق حتى المشتقة الثالثة وكان

هـ (س) = ل(س) × ق(س) ، لَ(س) × قَ(س) = جـ ، حيث جـ عدد ثابت فأثبت أنَّ:

هـً (س) = ل(س) × قً(س) + ق(س) × لً(س)

١٣) إذا كان ق(س) = أ س$^{٤}$ + $\frac{١٦}{س}$ ، أ ثابت ، وكان قً (٢) = ٩٠ فجد قيمة الثابت أ.

١٤) إذا كان ق(س) = ٨ س − ٤(م − ٣) س$^{٢}$ ، فجد قيم الثابت م التي تجعل قً(س) < ٠

## رابعًا مشتقات الاقترانات المثلثية
## Derivatives of Trigonometric Functions

إذا كان ق(س) = قاس + ظاس ، فجد $ق\,َ(\frac{\pi}{6})$.

تعلمت سابقًا الاقترانات المثلثية وتمثيلها البياني، وفي هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة هذه الاقترانات.

تعرفت سابقًا أنَّ المشتقة الأولى للاقتران ق عند س هي: $ق\,َ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

ستستخدم هذا التعريف والنظرية $\lim_{س \leftarrow 0} \frac{جاس}{س} = 1$

لإثبات القاعدتين الآتيتين:

**قاعدة ١**

إذا كان ق(س) = جا س ، س ∈ ح ، فإنَّ $ق\,َ(س)$ = جتا س

**البرهان**

$ق\,َ(س) = \lim_{ع \leftarrow س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س}$

$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{جاع - جاس}{ع - س}$

$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{2\,جتا\frac{ع+س}{2}\,جا\frac{ع-س}{2}}{ع - س}$

$= \lim_{ع \leftarrow س} \frac{جتا\frac{ع+س}{2}\,جا\frac{ع-س}{2}}{\frac{ع-س}{2}}$

**تذكّر**

$جاع - جاس = 2\,جتا\frac{ع+س}{2}\,جا\frac{ع-س}{2}$

$جتاع - جتاس = -2\,جا\frac{ع+س}{2}\,جا\frac{ع-س}{2}$

بفرض أنَّ $ص = \frac{ع-س}{2}$ يكون $\frac{ع+س}{2}$ = س + ص، وعندما ع ←س، فإنَّ ص ←٠.

$\therefore$ قَ (س) $=$ نهــــا$_{ص \leftarrow ٠}$ $\left( \text{جتا (س + ص)} \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \right)$

$=$ نهــــا$_{ص \leftarrow ٠}$ جتا (س + ص) $\times$ نهــــا$_{ص \leftarrow ٠}$ $\frac{\text{جاص}}{\text{ص}}$ $=$ جتا(س + ٠) $\times$ ١ $=$جتا س

## مثال ١

إذا كان ق(س) = س$^{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ جا س ، فجد قَ(س).

**الحل**

قَ (س) = ٢س − $\frac{١}{٣}$ جتا س

## مثال ٢

إذا كان ق(س) = ٢س − ٦جاس ، جد قَ ($\frac{\pi}{٦}$) .

**الحل**

قَ (س) = ٢ − ٦ جتاس

قَ ($\frac{\pi}{٦}$) = ٢ − ٦ جتا $\frac{\pi}{٦}$ = ٢ − ٦ $\times$ $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ = ٢ − ٣ $\sqrt{٣}$

### تدريب ١

إذا كان ق(س) = ٢ جاس +٦س ، فجد قَ($\frac{\pi}{٣}$)

### قاعدة ٢

إذا كان ق(س) = جتا س ، س $\in$ ح ، فإنَّ قَ(س) = − جاس.

**البرهان**

قَ(س) = نهــــا$_{ع \leftarrow س}$ $\frac{\text{ق(ع) − ق(س)}}{\text{ع − س}}$ = نهــــا$_{ع \leftarrow س}$ $\frac{\text{جتاع − جتا س}}{\text{ع − س}}$

$$= (-1) \text{ نهـــا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \frac{\text{جا } \frac{\text{ع} + \text{س}}{2} \text{ جا } \frac{\text{ع} - \text{س}}{2}}{\frac{\text{ع} - \text{س}}{2}}$$

$$= (-1) \text{ نهـــا}_{\text{ع} \leftarrow \text{س}} \left( \text{جا } \frac{\text{ع} + \text{س}}{2} \times \frac{\text{جا } \frac{\text{ع} - \text{س}}{2}}{\frac{\text{ع} - \text{س}}{2}} \right)$$

بفرض ص $= \frac{\text{ع} - \text{س}}{2}$ يكون $\frac{\text{ع} + \text{س}}{2} =$ س + ص،

عندما ع ← س ، فإنَّ ص ← ٠

$$\therefore \text{ قَ (س)} = (-1) \text{ نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow 0} \left( \text{جا (س + ص)} \times \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} \right)$$

$$= (-1) \text{ نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow 0} \text{ جا (س + ص)} \times \text{ نهـــا}_{\text{ص} \leftarrow 0} \frac{\text{جاص}}{\text{ص}} = -\text{ جاس} \times 1$$

$$\therefore \text{ قَ (س)} = -\text{ جا س}$$

**مثال ٣**

إذا كان ق(س) $= \frac{\text{جتاس}}{\text{س}}$ ، س $\neq$ ٠ ، فجد قَ $\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

**الحل**

طبِّق قاعدة مشتقة خارج قسمة اقترانين:

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{س} \times \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{جتا س}) - (\text{جتا س}) \times \frac{\text{ى}}{\text{ى س}} (\text{س})}{\text{س}^2} = \frac{\text{س} \times -\text{ جا س} - \text{جتا س} \times 1}{\text{س}^2}$$

$$= \frac{-\text{س جاس} - \text{جتاس}}{\text{س}^2}$$

$$\text{قَ } \left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{\pi}{3} \times \text{ جا } \frac{\pi}{3} - \text{ جتا } \frac{\pi}{3}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{\pi}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}}{\left(\frac{\pi}{3}\right)^2} = \frac{-3\sqrt{3}}{2\pi} - \frac{9}{2\pi^2}$$

## مثال ٤

إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ، أ،ب ∈ ح ، فأثبت أنَّ صً + ص = ٠

**الحل**

صَ = أ جتاس – ب جاس

صً = – أجاس – ب جتاس = – ( أجاس + ب جتاس)

أي أنَّ صً = – ص ومنه صً + ص = صفرًا

## تدريب ٢

إذا كان ق(س) = س جاس ، فجد قَ $(\frac{\pi}{٢})$.

يمكنك استخدام القاعدتين ١ ، ٢ في إيجاد مشتقات الاقترانات المثلثية: ظاس، ظتاس، قاس، قتاس.

## مثال ٥

إذا كان ق(س) = ظاس ، فأثبت أنَّ قَ (س) = قا$^٢$س.

**البرهان**

يمكنك كتابة الاقتران ق بالصورة ق(س) = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا س}}$

طبِّق قاعدة القسمة في الاشتقاق.

$$\text{قَ (س)} = \frac{\text{جتاس} \times \text{جتاس} - \text{جا س} \times - \text{جا س}}{\text{جتا}^٢\text{س}} = \frac{\text{جتا}^٢\text{س} + \text{جا}^٢\text{س}}{\text{جتا}^٢\text{س}} = \frac{١}{\text{جتا}^٢\text{س}} = \text{قا}^٢\text{س}$$

## تدريب ٣

استخدم القاعدتين (١)، (٢) في إثبات قواعد اشتقاق الاقترانات: ظتاس ، قتاس، قاس كما في الجدول الآتي:

| الاقتران: ق(س) | المشتقة: قَ(س) |
|---|---|
| قاس | قاس ظا س |
| قتاس | – قتاس ظتاس |
| ظتاس | – قتا$^٢$س |

## مثال ٦

إذا كان ق(س) = قتاس + ظتاس ، فأثبت أنَّ $\text{قَ}(\text{س}) = \frac{١}{\text{جتاس} - ١}$

**البرهان**

$$\text{قَ}(\text{س}) = -\text{قتاس ظتاس} - \text{قتا}^{٢}\text{س} = \frac{-١}{\text{جاس}} \times \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} - \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{-\text{جتاس} - ١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{-(\text{جتاس} + ١)}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}$$

$$= \frac{-(\text{جتاس} + ١)}{(١ - \text{جتاس})(١ + \text{جتاس})}$$

$$= \frac{-١}{١ - \text{جتاس}}$$

$$= \frac{١}{\text{جتاس} - ١}$$

### تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية :

أ ) ص = ٣ جاس − جتاس    ب) ص = س$^{٢}$ جاس

جـ) ص = $\frac{\text{س}}{\text{جتا س}}$    د ) ص = ظا س − $\sqrt{٣\pi}$ س

هـ) ص = جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$ س    و ) ص = قتا س − س ظتا س

٢) إذا كان ص = جاس ، فجد صً + ٦ ص بدلالة ص .

٣) جد قَ(س) لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ ) ق(س) = جاس جتا س    ، س = $\frac{\pi}{٣}$

ب) ق(س) = جا(− س) + جتا(− س)    ، س = $\frac{\pi}{٤}$

جـ) ق(س) = $\frac{\text{جتاس}}{\text{١+ جاس}}$    ، س = $\pi$

د ) ق(س) = س قاس    ، س = $\frac{\pi}{٦}$

هـ ) ق(س) = $\frac{\text{ظاس + س}}{\text{جاس}}$    ، س = $\frac{\pi}{٣}$

٤) أثبت أنَّ كلًّا من ص= جتاس ، ص = جاس يُعتبَرُ حلًّا للمعادلة ص + صً = صفرًا

٥) جد قيم س في الفترة [−٢ $\pi$ ، ٢ $\pi$] التي تحقق المعادلة قَ(س) = ٠ في كلٍّ مما يأتي :

أ ) ق(س) = س + جتاس    ب) ق(س) = قا س

٦) إذا كان ص = أ جاس + ب جتاس ، أ ، ب ∈ ح، فأثبت أنَّ:

(صَ)$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = أ$^{٢}$ + ب$^{٢}$

٧) جد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ لكلٍّ مما يأتي:

أ ) ص = قتاس　　　　ب) ص = س جتا س – ٤ جا س

٨ ) إذا كان ق(س) = $\begin{cases} \text{جتاس} & \text{، س} \leq ٠ \\ \text{أس + ب} & \text{، س} > ٠ \end{cases}$

فجد قيمة كلٍّ من الثابتين أ ، ب التي تجعل الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند س= ٠

٩ ) إذا كان ق(س) = |جا س|، ، فابحث في قابلية الاقتران ق للاشتقاق عند س= $\pi$ .

١٠ ) إذا كان ق(س) = حاس – $\frac{١}{٢}$س ، س ∈ [ ٠ ، ٢ $\pi$] فجد قيمة ( قيم ) س التي تجعل المماس لمنحنى ق أفقيًا.

## خامسًا قاعدة السلسلة Chain Rule

إذا كان ص = (س$^{٣}$ − س)$^{٦}$ ، فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

تعلمت سابقًا بعض قواعد الاشتقاق التي تمكنك من إيجاد مشتقات اقترانات بسيطة، مثل: مشتقة حاصل جمع، أو طرح، أو ضرب، أو قسمة اقترانين. في هذا الدرس ستتعلم إيجاد مشتقة صيغ لاقترانات مركبة.

**تذكر**

**تركيب اقترانين**

إذا كان ق ، هـ اقترانين حيث ص = ق(ع) ، ع = هـ (س) وكان مدى هـ مجموعة جزئية من مجال ق ، فإنَّه يمكن كتابة ص على الصورة:

ص = ق(ع) = ق(هـ (س)) أو (ق ○ هـ)(س).

**قاعدة**

**قاعدة السلسة**

إذا كان الاقترانان ق، هـ قابلين للاشتقاق عند س، وكان الاقتران ق قابلًا للاشتقاق عند هـ (س)، فيكون الاقتران المركب (ق ○ هـ)(س) قابلًا للاشتقاق عند س وإنَّ:

(ق ○ هـ)َ(س) = قَ (هـ(س)) × هـَ(س).

في الشكل المجاور تجد أنَّ:

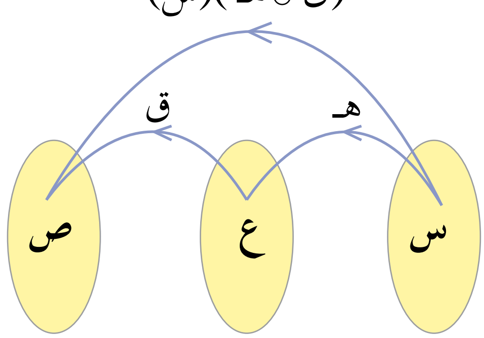
ص = ق(ع) ........... (١)

ع = هـ (س) ........... (٢)

أي أنَّ ص = ق(هـ (س)) = (ق ○ هـ)(س)

إن إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ يعني إيجاد مشتقة تركيب اقترانين أي أنَّ:

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (ق○هـ)َ(س) = قَ (هـ(س)) × هـَ (س)




حسب قاعدة السلسلة

$= \acute{ق}(ع) \times \acute{هـ}(س)$ .............. (٣) لأنَّ ع = هـ (س)

لكن $\acute{ق}(ع) = \frac{ءص}{ءع}$ من العلاقة (١)، $\acute{هـ}(س) = \frac{ءع}{ءس}$ من العلاقة (٢)

بالتعويض في العلاقة (٣) ينتج أنَّ:

**تعميم**

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

وهذه صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

## مثال ١

إذا كان $ص = (س^{٣} - ١)^{١٠}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$

**الحل**

يمكن حل المسألة باستخدام قاعدة السلسلة، حيث نكتب ص على صورة اقتران مركب متغيره (س) بفرض $ع = س^{٣} - ١$ ، فيصبح $ص = ع^{١٠}$ وباستخدام قاعدة السلسلة تحصل على

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$$

$= ١٠ ع^{٩} \times (٣س^{٢})$ ، عوض عن ع بدلالة س لتحصل على :

$\frac{ءص}{ءس} = ١٠ (س^{٣} - ١)^{٩} \times (٣س^{٢}) = ٣٠ س^{٢}(س^{٣} - ١)^{٩}$ .

## مثال ٢

إذا كان $ق(س) = س^{٢}$ ، $هـ(س) = ١ - ٦س$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

١) $(ق \circ هـ)\acute{}(س)$

٢) $(ق \circ هـ)\acute{}(١)$

**الحل**

$\acute{ق}(س) = ٢س$ ، $\acute{هـ}(س) = -٦$

١) $(ق \circ هـ)\acute{}(س) = \acute{ق}(هـ(س)) \times \acute{هـ}(س)$

$= \acute{ق}(١ - ٦س) \times -٦$

$= ٢ (١ - ٦س) \times -٦ = ٧٢س - ١٢$

٢) $(ق \circ هـ)'(١) = ٧٢(١) - ١٢ = ٦٠$

## مثال ٣

إذا كان ل(س) = ظا س$^٣$ ، فجد لَ(س)

**الحل**

ابحث عن اقترانين ق ، هـ بحيث يكون ل = ق ∘ هـ

بفرض هـ(س) = س$^٣$ ، ق(س) = ظاس ، فإنَّ:

هـَ(س) = ٣س$^٢$ ، قَ(س) = قا$^٢$س

ق(هـ(س)) = ق(س$^٣$) = ظا س$^٣$ = ل(س)

لَ(س) = قَ(هـ(س)) × هـَ(س)

= قَ(س$^٣$) × ٣س$^٢$

= (قا$^٢$س$^٣$) (٣س$^٢$) = ٣س$^٢$قا$^٢$س$^٣$ .

### تدريب ١

١) حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

٢) إذا كان ق(س) = ٢ س + $\frac{١}{س}$ ، هـ(س) = جاس فجد (ق ∘ هـ)َ(س)

من فوائد قاعدة السلسلة إيجاد مشتقة اقتران مرفوع لقوة مثل ص = (ل(س))$^ن$ ، ص = جا$^ن$س واقترانات أخرى مثل ص = جاهـ(س) ...... إلخ

### نتيجة

إذا كان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، وكان ص = (ل(س))$^ن$، حيث ن عدد صحيح ، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس}$ = ن (ل(س))$^{ن-١}$ × لَ(س)

## البرهان

بفرض ع = ل (س) ، ومنه $\frac{ءع}{ءس}$ = لَ(س)

فيكون ص = ع $^{ن}$ ، ومنه $\frac{ءص}{ءع}$ = ن ع$^{ن-١}$ = ن (ل(س))$^{ن-١}$

باستخدام قاعدة السلسلة ينتج أنَّ: $\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءع} \times \frac{ءع}{ءس}$

∴ $\frac{ءص}{ءس}$ = ن (ل(س))$^{ن-١}$ × لَ(س)

## مثال ٤

إذا كان ص = ( قتا س + ظتا س)$^{ن}$، ن عدد صحيح موجب فبيِّن أنَّ $\frac{ءص}{ءس}$ = − ن ص قتاس.

## الحل

$\frac{ءص}{ءس}$ = ن( قتا س + ظتا س)$^{ن-١}$ ( − قتاس ظتاس − قتا$^{٢}$س)

= ن( قتا س + ظتا س)$^{ن-١}$ × − قتاس( ظتاس + قتاس)

= − ن ( قتا س + ظتا س)$^{ن}$ × قتاس

ومنه $\frac{ءص}{ءس}$ = − ن ص قتاس.

## تدريب ٢

١) إذا كان ص = ( قا س + ظا س)$^{٢}$، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س= ٠

## مثال ٥

إذا كان ص = ظا $^{٤}$س ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

## الحل

ص = (ظا س)$^{٤}$

$\frac{ءص}{ءس}$ = ٤ (ظا س)$^{٣}$ (ظا سَ) باستخدام النتيجة السابقة

= ٤ (ظا س)$^{٣}$ ( قا$^{٢}$س) = ٤ ظا$^{٣}$س قا$^{٢}$س

## مثال ٦

إذا كان ص = جتا( س$^{٢}$ + ١) ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ .

**الحل**

بفرض ع = س$^{٢}$ + ١ ، $\frac{ءع}{ءس}$ = ٢س

ص = جتا ع ، $\frac{ءص}{ءع}$ = − جا ع = − جا(س$^{٢}$+١)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ قاعدة السلسلة

= − جا (س$^{٢}$ + ١) × ٢س

= −٢س جا (س$^{٢}$ + ١)

## مثال ٧

إذا كان هـ (س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س وكان ص = جاهـ (س)، فأثبت أنَّ :

$\frac{ءص}{ءس}$ = هـَ (س) جتاهـ (س)

**البرهان**

بفرض ع = هـ (س) ، ومنه $\frac{ءع}{ءس}$ = هـَ (س)

ص = جا ع ، ومنه $\frac{ءص}{ءع}$ = جتاع = جتا هـ (س)

$\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ءص}{ءع}$ × $\frac{ءع}{ءس}$ قاعدة السلسلة

= جتا هـ (س) × هـَ(س) = هـَ (س) جتا هـ (س).

**تعميم**

إذا كان ع اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، فيمكنك استخدام قاعدة السلسلة في إثبات صحة القواعد الآتية:

١) $\frac{ء}{ءس}$(جا ع) = جتاع × $\frac{ءع}{ءس}$

٢) $\frac{ء}{ءس}$(جتاع) = − جاع × $\frac{ءع}{ءس}$

٣) $\frac{ء}{ءس}$(ظا ع) = قا$^{٢}$ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٤) $\frac{ء}{ءس}$( ظتا ع) = − قتا$^{٢}$ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٥) $\frac{ء}{ءس}$( قا ع) = قا ع ظا ع × $\frac{ءع}{ءس}$

٦) $\frac{ء}{ءس}$(قتا ع) = − قتا ع ظتا ع × $\frac{ءع}{ءس}$

## مثال ٨

إذا كان ص = جتا$^{٣}$(س$^{٢}$ − ١)$^{٢}$ فجد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

**الحل**

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ = (٣ جتا$^{٢}$(س$^{٢}$ − ١)$^{٢}$) (−جا(س$^{٢}$ − ١)$^{٢}$) (٢(س$^{٢}$ − ١) × ٢س)

= −١٢ س (س$^{٢}$ − ١) جتا$^{٢}$(س$^{٢}$ − ١)$^{٢}$ جا(س$^{٢}$ − ١)$^{٢}$

### تدريب ٣

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = قا٤ س

٢) ق(س) = (س$^{٣}$ + ٢س − ٨)$^{٧}$

٣) ق(س) = جا$^{٤}$ س$^{٢}$

## مثال ٩

إذا كان ق(٣س) = ٦ س$^{٢}$ + ٩س ، فجد قَ(٣)

**الحل**

ق(٣س) يُشكل تركيبًا لاقترانين

باشتقاق الطرفين :

قَ(٣س) × ٣ = ١٢س + ٩

ضع س = ١ فتحصل على قَ(٣)

∴ قَ(٣) × ٣ = ١٢(١) + ٩ ، ومنه: قَ(٣) = ٤ + ٣ = ٧

## مثال ١٠

إذا كان هـ(س) = ق(حا ٢س) وكان قَ($\frac{\sqrt{٣}}{٢}$) = ٨ ، فجد هـَ($\frac{\pi}{٦}$)

**الحل**

باشتقاق الطرفين نجد أنَّ:

هـَ(س) = قَ(جا٢س) (جا٢س)َ = ٢ جتا٢س قَ(جا٢س)

$$هـَ(\frac{\pi}{٦}) = ٢ \times جتا(\frac{\pi}{٣})\, قَ(حا\frac{\pi}{٣})$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times قَ(\frac{\sqrt{٣}}{٢})$$

$$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times ٨ = ٨$$

## تدريب ٤

إذا كان $ق(س^{٣} - ١) = \frac{١}{س} - س^{٢}$ ، فجد $قَ(٧)$

١) استخدم قاعدة السلسلة لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ ) $ص = (س^٣ - ٢س + ٤)^٨$

ب) $ص = \frac{١}{(س^٢ + ١)^٥}$

جـ) $ص = \frac{س^٤}{(١ - س^٣)^٤}$

د ) $ص = جتا(س^٢ - س)$

٢) إذا كان $ق(س) = س^٢ - ٢س$ ، $هـ(س) = س^٣ + ١$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) $(ق \circ هـ)َ(١)$

ب) $(هـ \circ ق)َ(١)$

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين معرفين على ح وقابلين للاشتقاق على مجاليهما وكان $هـ(٢) = ٣$ ، $قَ(٣) = ٤$ ، $هـَ(٢) = -٦$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) $(ق \circ هـ)َ(٢)$

ب) $قَ(س^٢)$ عند $س = \sqrt{٣}$

٤) إذا كان هـ(س) قابلًا للاشتقاق عند س، وكان $ص = جا^ن(هـ(س))$ ، حيث ن عدد صحيح فأثبت أنَّ:

$$\frac{ءص}{ءس} = ن\, جا^{ن-١}(هـ(س))\, جتا(هـ(س)) \times هـَ(س)$$

٥) جد $\frac{ءص}{ءس}$ في كلٍّ مما يأتي :

أ ) $ص = ظا ع$ ، $ع = س^٣ - س$

ب) $ص = ل^٢ + ٢ل$ ، $ل = \sqrt{س^٢ + ١}$

٦) إذا كان $ص = جتا(س + \frac{\pi}{٢})$، فأثبت أنَّ: $ص + صً = ٠$

٧) إذا كان $ص = ظا س + \frac{١}{٣} ظا^٣ س$ ، فبرهن أنَّ : $\frac{ءص}{ءس} = قا^٤ س$

٨ ) يقال للاقتران ق بأنَّهُ زوجيٌّ إذا كان ق (– س) = ق(س) لجميع قيم س ، وأنّه فرديٌّ إذا كان ق (– س) = – ق(س) لجميع قيم س. أثبت ما يأتي:

أ ) إذا كان ق (س) اقترانًا فرديًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) اقترانٌ زوجيٌّ .

ب) إذا كان ق (س) اقترانًا زوجيًا قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) اقترانٌ فرديٌّ .

٩ ) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية عند قيمة س المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ ) ص = حا$^{٢}$ ٣س ، س = $\frac{\pi}{٩}$ ب) ص = $\left(س + \frac{١}{س}\right)^{٤}$ ، س = ١

١٠) جد صً في كلٍّ مما يأتي :

أ ) ص = س ظا $\left(\frac{١}{س}\right)$ ب) ص = $\frac{جتا ٢س}{س}$

١١) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق وكان ق (حا٢س) = قتا (٢س) حيث س ∈ $\left(٠ ، \frac{\pi}{٣}\right]$ فجد قَ $\left(\frac{١}{٢}\right)$ .

١٢) إذا كان ص = ق( س$^{٢}$ + ٢س) ، قَ(٣) = ٥ ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س = ١}$

١٣) إذا كان ص = $\sqrt{س^{٢} + \sqrt{٣س}}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

١٤) إذا كان ق(٤س) = $\frac{ء}{ءس}$(س$^{٢}$ +٣) ، فجد قَ (٤).

١٥) إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ +٢س ، هـ (س) = ٣س$^{٢}$ ، فجد كلًّا مما يأتي :

أ ) (قَ ० هـ)َ (١) ب) (قَ ० هـَ )َ (٢)

جـ) (قَ ० هـ)ً (–١) د ) (قَ ० هـَ )ً (٣)

## الاشتقاق الضمني
## Implicit Differentiation

جد معادلة المماس لمنحنى العلاقة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ عند النقطة ($\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ، $-\frac{١}{\sqrt{٢}}$).

تعلمت سابقًا إيجاد مشتقات لاقترانات معطاة بصورة واضحة على الشكل ص = ق(س)

مثل ص = ( س$^{٢}$+١)$^{٣}$ ، ص = س$^{٢}$ظاس ، ص = $\begin{cases} \text{س}^{٢} + ٤ & ، \text{س} \leq ٠ \\ ٤ - ٦\text{س} & ، \text{س} > ٠ \end{cases}$

وتُسمى اقترانات صريحة؛ لأن المتغير التابع (ص) يظهر وحيدًا في طرف والمتغير المستقل (س) في الطرف الآخر. في هذا الدرس سوف تجد مشتقات علاقات أو معادلات قد يصعب فيها فصل المتغير المستقل عن المتغير التابع، وتُسمى **بالعلاقات الضمنية**.

يمكنك الحصول على أكثر من اقتران من علاقة ضمنية واحدة؛ فمثلًا من العلاقة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ = ١ يمكنك الحصول على ص = ± $\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ وهذه علاقة مكونة من اقترانين ص = $\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ ، ص = $-\sqrt{١ - \text{س}^{٢}}$ . في هذا الدرس سوف تتعرف كيفية إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقات ضمنية .

**لإيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ لعلاقة ضمنية اتبع الخطوات الآتية :**

١) اشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س.

٢) جمِّع الحدود التي تحوي $\frac{ءص}{ءس}$ في طرف، وباقي الحدود في الطرف الآخر.

٣) أخرِج $\frac{ءص}{ءس}$ عاملًا مشتركًا.

٤) جد $\frac{ءص}{ءس}$ بإجراء عملية القسمة.

**مثال ١**

إذا كان ٤ ص – ٢س + ٨ = ٠ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

## الحل

في هذا المثال يمكنك إيجاد $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ بطريقتين :

الطريقة الأولى : التعبير عن ص بدلالة س ( إيجاد علاقة صريحة بين س، ص)

$$\text{ص} = \frac{\text{٢س} - ٨}{٤} = \frac{١}{٢}\text{س} - ٢ \text{ ، } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$$

الطريقة الثانية : اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى س باستخدام قاعدة السلسلة.

$$٤ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} - ٢ = ٠ \text{ ، منه } \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{١}{٢}$$

### مثال ٢

إذا كان $\text{س}^٣ + \text{ص}^٣ = ٦ \text{ س ص}$ ، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد صَ .

٢) جد ميل المماس المرسوم لمنحنى العلاقة عند النقطة ( ٣، ٣).

## الحل

١) $٣ \text{ س}^٢ + ٣ \text{ ص}^٢ \text{ صَ} = ٦\text{س} \times \text{صَ} + \text{ص} \times ٦$

$$٣ \text{ ص}^٢ \text{ صَ} - ٦\text{س صَ} = ٦\text{ص} - ٣ \text{ س}^٢$$

$$٣\text{صَ} \left( \text{ص}^٢ - ٢\text{س} \right) = ٦\text{ص} - ٣ \text{ س}^٢$$

$$\text{صَ} = \frac{٦\text{ص} - ٣\text{س}^٢}{٣(\text{ص}^٢ - ٢\text{س})} = \frac{٢\text{ص} - \text{س}^٢}{\text{ص}^٢ - ٢\text{س}}$$

٢) عندما س = ٣ ، ص = ٣

$$\text{صَ} = \frac{٢ \times ٣ - ٣^٢}{٣^٢ - ٢ \times ٣} = -١$$

### مثال ٣

إذا كان $٤ \text{ ص}^٢ - \text{جا ص} = \text{س}^٢$ ، فجد صَ .

## الحل

$$٤ \times ٢ \text{ ص صَ} - \text{جتاص} \times \text{صَ} = ٢\text{س}$$

$$٨\,\text{ص}\,\text{صَ} - \text{صَ}\,\text{جتاص} = ٢\text{س}$$

$$\text{صَ}\,(٨\text{ص} - \text{جتاص}) = ٢\text{س}$$

$$\text{صَ} = \frac{٢\text{س}}{٨\text{ص} - \text{جتاص}}$$

## تدريب ١

جد $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $٣\text{س}^{٢} - ٤\text{ص}^{٢} = ٨$

٢) $٢\,\text{س}\,\text{ص} - \text{ص}^{٣} + ١ = \text{س} + ٢\,\text{ص}$

٣) $\text{س}^{٢} + \text{ص} = \text{ظاص}$

يمكنك استخدام الاشتقاق الضمني لتعميم مشتقة $\text{س}^{\text{ن}}$ ؛ عندما يكون ن عددًا نسبيًّا كما في النظرية الآتية :

## نظرية

إذا كان $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ ، حيث $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ عدد نسبي فإنَّ : $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} (\text{س})^{\frac{\text{م}}{\text{ن}} - ١}$

### البرهان

ارفع طرفي المعادلة $\text{ص} = \text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$ إلى الأس ن لتحصل على :

$\text{ص}^{\text{ن}} = \text{س}^{\text{م}}$ ، ثم اشتق الطرفين ضمنيًّا بالنسبة إلى س لتحصل على :

$$\text{ن}\,\text{ص}^{\text{ن}-١} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{م}\,\text{س}^{\text{م}-١}$$

$$\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-١}}{\text{ص}^{\text{ن}-١}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-١}}{(\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}})^{\text{ن}-١}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \times \frac{\text{س}^{\text{م}-١}}{(\text{س})^{\text{م}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\text{س}^{\text{م}-١-\text{م}+\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$$

إذن $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\,\text{س}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-١}$

## مثال ٤

إذا كان $ص^٢ = س^{\frac{١}{٢}}$ ، $ص > ٠$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند $س = ١٦$

**الحل**

$$٢ص \times \frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢}س^{-\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٢س^{\frac{١}{٢}}}$$

عندما $س=١٦$ تكون $ص = ٢$ وعليه تكون

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٤ \times ٢\sqrt{١٦}} = \frac{١}{٣٢}$$

### نتيجة

إذا كان ق(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س ، وكان $ص = (ق(س))^ن$، حيث ن عدد نسبي، فإنَّ $\frac{ءص}{ءس} = ن(ق(س))^{ن-١} \times قَ(س)$

## مثال ٥

إذا كان $ص = \sqrt{هـ(س)}$ ، وكان هـ(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س فأثبت أنَّ:

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

**الحل**

يمكنك التعبير عن $ص = \sqrt{هـ(س)}$ بالصورة $ص = (هـ(س))^{\frac{١}{٢}}$ ، وبما أنَّ هـ(س) اقتران قابل للاشتقاق عند س ، فيمكن تطبيق النتيجة السابقة لتحصل على :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{٢} \times (هـ(س))^{\frac{١}{٢}-١} \times هـَ(س) = \frac{١}{٢}(هـ(س))^{-\frac{١}{٢}} \times هـَ(س)$$

$$= \frac{١}{٢} \times \frac{هـَ(س)}{(هـ(س))^{\frac{١}{٢}}} = \frac{هـَ(س)}{٢\sqrt{هـ(س)}}$$

## مثال ٦

إذا كان $(س - ص)^{٥} = س^{٢}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(١ ، ٠)$.

**الحل**

اشتق الطرفين بالنسبة إلى س لتحصل على :

$$٥(س - ص)^{٤} \left(١ - \frac{ءص}{ءس}\right) = ٢س$$

$$\left(١ - \frac{ءص}{ءس}\right) = \frac{٢س}{٥(س - ص)^{٤}}$$

$$\frac{ءص}{ءس} = ١ - \frac{٢س}{٥(س - ص)^{٤}}$$

$$\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{(١،٠)} = ١ - \frac{٢ \times ١}{٥(١ - ٠)^{٤}} = ١ - \frac{٢}{٥} = \frac{٣}{٥}$$

## تدريب ٢

جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $\sqrt{ص} + جتا\, س = ٤$

٢) $(س - ص)^{٢} - ص = ٠$

## مثال ٧

إذا كان س = ظتا ٢ص فأثبت أنَّ $صً = - صَ\, جا ٤ص$

**الحل**

اشتقَّ الطرفين بالنسبة إلى س

$$١ = (- قتا^{٢}\, ٢ص)(٢صَ)$$

$$صَ = \frac{-١}{٢قتا^{٢}\, ٢ص} = \frac{-١}{٢} جا^{٢}\, ٢ص$$

$$صً = -\frac{١}{٢} (٢\, جا\, ٢ص)(جتا ٢ص)(٢صَ)$$

٢جاس جتاس = جا٢س

$$= -\frac{١}{٢} (جا\, ٤ص)(٢صَ)$$

$$صً = - صَ\, جا\, ٤ص$$

## تدريب ٣

إذا كان جتا ص = س ، ص ∈ $(٠ ، \frac{\pi}{٢})$، فأثبت أنَّ :

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{-١}{\sqrt{١ - س^٢}}$$

## مثال ٨

إذا كان ص = $ن^٤$ ، س = ٦ن + ١ ، فجد $\left.\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}\right|_{ن=١}$

**الحل**

$$\frac{ءص}{ءس} = \frac{ءص}{ءن} \times \frac{ءن}{ءس}$$ قاعدة السلسلة

لتجد $\frac{ءن}{ءس}$ جد أولا $\frac{ءس}{ءن}$،

$\frac{ءس}{ءن} = ٦$ ومنه $\frac{ءن}{ءس} = \frac{١}{٦}$

$$\frac{ءص}{ءس} = (٤ن^٣) \times \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٣}ن^٣$$

$$\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = ٣ \times \frac{٢}{٣}ن^٢ \times \frac{ءن}{ءس}$$ لأنَّ الاشتقاق بالنسبة إلى س

$$= ٢ن^٢ \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٣}ن^٢$$

عندما ن = ١ ، $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢} = \frac{١}{٣}$

## تدريب ٤

إذا كان س = جا ٣ن ، ص = جتا٣ن ، فجد $\frac{ء^٢ص}{ءس^٢}$ عند ن = $\frac{\pi}{٣}$

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ ) $س^{٢} + ٤ص^{٢} = ١٦$      ب) $ص^{٢} = \sqrt{س^{٣} + ٤س^{٢}}$

جـ) $س^{٣} + ص^{٣} = س ص$      د ) $جا(س ص) = س^{٢}$

٢) جد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ لكلٍّ مما يأتي :

أ ) $(س ص)^{٣} = ٤س$      ب) $٤س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١٦$

جـ) ص = س جتا ص      د ) $جا س = \sqrt{ص} + ٢$

٣) جد قيمة $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من العلاقات الآتية عند النقط المبينة إزاء كلٍّ منها :

أ ) $٨ س ص + جتا ص = \pi^{٢}$      ،      $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$

ب) $س^{٣} - ٢س ص + ص^{٣} = ٢$      ،      $(١، -١)$

جـ) $\frac{٤}{س} + \frac{٢}{ص} = ٣$      ،      $(٤، ١)$

٤) إذا كان $جا(س + ص) = ص^{٢}$ جتاس، فجد $صَ$ .

٥) جد النقطة على منحنى العلاقة $\sqrt{س} + \sqrt{ص} = ٣$ التي يكون عندها المماسّ أفقيًّا.

٦) إذا كان $ص = \sqrt[٣]{(٢س + ١)^{٢}}$ فجد $\frac{ءص}{ءس}$.

٧) إذا كان س = جاص ، فأثبت أنَّ $صً = ظاص قا^{٢}ص$.

٨) إذا كان ص جتا٢س = س جا ٢ص ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند النقطة $(\frac{\pi}{٤}، \frac{\pi}{٢})$.

٩) إذا كان س ص = جاس، فأثبت أنَّ: س صً + ٢صَ + س ص = ٠

١٠) إذا كان ص = ن$^{٣}$ + ٢ن ، $\frac{ءس}{ءن}$ = ٤ن ، فجد $\frac{ء^{٢}ص}{ءس^{٢}}$ عند ن = ١.

١١) إذا كان س + ص = جا ص، فأثبت أنَّ:

(صَ)$^{٢}$= صً (ظتا ص− قتاص)

١٢) إذا كان ص = جاس + س ص ، فأثبت أنَّ :

صً + ص = $\frac{٢صَ}{١ - س}$

١) إذا كان ق(س) = ظاس وتغيرت س من س إلى س + هـ ، فأثبت أنَّ معدّل التغير للاقتران ق يساوي:

$$\frac{\text{قا}^{\text{٢}}\text{س} \times \text{ظاهـ}}{\text{هـ}\,(\text{١} - \text{ظاس} \times \text{ظاهـ})}$$

٢)إذا كان ق(س) = جا ٢س، فاستخدم تعريف المشتقة لإيجاد قَ $\left(\frac{\pi}{\text{٤}}\right)$.

٣) ليكن ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^{\text{٢}} + \text{٢س} + \text{٢} &، \text{٠} \le \text{س} < \text{١} \\ [\text{س}] + \text{٤س} &، \text{١} \le \text{س} \le \text{٣} \end{cases}$ ، جد قَ(س).

٤) إذا كان ل(س) اقترانًا قابلًا للاشتقاق عند س = −١ ، ل(−١) = ١، لَ(−١) = ٢

فجد قَ(−١) في كلٍّ مما يأتي :

أ ) ق(س) = $\sqrt{\text{س} + \text{٥}}$ × ل(س)

ب) ق(س) = $\dfrac{(\text{ل(س)})^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٢}} - \text{س}}$

جـ) ق(س) = ل (س) − $\dfrac{\text{ل(س)}}{\text{س}}$

د ) ق(س) = ظا $\left(\frac{\pi}{\text{٣}}\text{ل(س)}\right)$

٥) أ ) إذا علمت أنَّ ص = س ظا س ، فأثبت أنَّ :

صً = ٢قا$^{\text{٢}}$س( ١ + ص)

ب) إذا كان جا ص = س ، |س| < ١ ، فأثبت أنَّ :

$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\text{١}}{\sqrt{\text{١} - \text{س}^{\text{٢}}}} \quad ، \text{ص} \in \left(\text{٠}، \frac{\pi}{\text{٢}}\right)$$

٦) إذا كان ص = ن$^{\text{٢}}$ − ٤ن ، س = ٢ن − ٥ ، فجد $\dfrac{\text{ء}^{\text{٢}}\text{ص}}{\text{ءس}^{\text{٢}}}$ عند ن = ٦

٧) إذا كان ق ، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق؛ بحيث كان هـَ (س) = ق(س ) ،

قَ(س ) = − هـ ( س ) ، وكان ل(س) = (هـ(س))$^{\text{٢}}$ + (ق (س))$^{\text{٢}}$ ، فجد لَ(س) .

٨ ) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} (س+١)^٤ & ، س \geq ٠ \\ (س-١)^٤ & ، س < ٠ \end{cases}$

فأجب عن كلٍّ مما يأتي :

أ ) جد $قَ(س)$ لجميع قيم س ، $س \neq ٠$

ب) بيّن أنَّ ق اقتران غير قابل للاشتقاق عند س = ٠

٩ ) إذا كان $ص^٣ = ق(٤س^٢ - س)$ ، $قَ(٥) = ٤$ ، $ق(٥) = -٨$ ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-١}$ .

١٠ ) إذا كان ق(س) = جاهـ(س) ، $هـ(١) = \frac{\pi}{٣}$ ، $هـَ(١) = ٠$ ، $هـً(١) = ٤$ ،

فجد قً(١) علمًا بأنَّ ق، قَ قابلان للاشتقاق.

١١ ) إذا كان $ق(س) = س^٣ + ٢س$ ، $هـ(س) = ٣س^٢$ ، فجد كلاًّ مما يأتي:

أ ) $(قَ \circ هـ)َ(٢)$ ب) $(قَ \circ هـ)ً(٢)$

١٢ ) إذا كان ل(س) = ق(هـ(س))، وكان هـ(١) = ٤ ، لَ(١) = ٢ ، قَ(٤) = -٥، فجد هـَ(١)

١٣ ) إذا كان ص = س هـ(س) ، وكان هـ(-١) = ٦ ، هـَ(-١) = ٢، فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = -١

١٤ ) إذا كان جا ص = ظا س ، فأثبت أنَّ : $ظاس = \frac{صً}{٢ قا^٢س + (صَ)^٢}$

١٥ ) إذا كان $ق(٣س-١) = \frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س}$ ، $س \neq ٠$ فأثبت أنَّ $قَ(٥) = \frac{١}{١٢}$

١٦ ) إذا كان جتا ص - س ص = ٢س ، فأثبت أنَّ:

صً ( س + جا ص ) + صَ( ٢ + صَ جتا ص ) = ٠

١٧ ) إذا كانت ص = أ جاس - ب جتاس ، أ ، ب ثابتان، فأثبت أنَّ :

$(صَ)^٢ + ص^٢ = أ^٢ + ب^٢$

١٨ ) إذا كان ص = ق(س) ، $ص^٣ = ق(٢س^٢ - س)$ ، قَ(٦) = ٤ ، ق(٦) = -٨ ،

فجد $\frac{ءص}{ءس}$ عند س = ٢ .

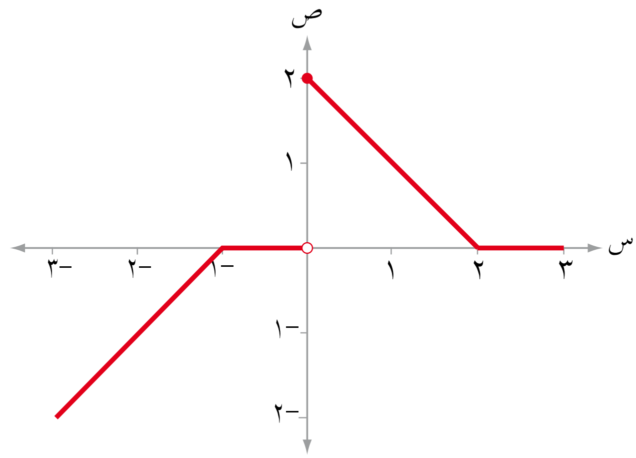
١٩) إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ − س$^{٢}$ ، هـ(س) = ٣س$^{٢}$ + س ، فجد كلاً مما يأتي:

أ ) (قَ ∘ هـ)َ (١)    ب) (قَ ∘ هـ)ً (١)

٢٠ *) اعتماداً على الشكل (٢−٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [−٣، ٣]، جد كلاً مما يأتي:

أ ) قيم س حيث −٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير متصل.

ب) قيم س حيث −٣ < س < ٣ التي يكون عندها الاقتران ق غير قابل للاشتقاق.




الشكل (٢−٤)

٢١) يتكون هذا السؤال من (٨) فقرات من نوع الاختيار من متعدد، ويلي كل فقرة أربعة بدائل واحد فقط منها صحيح ، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان منحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٢، ٣)، وكان المماس المرسوم لمنحنى ق عند هذه النقطة يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فإنَّ:

$$\text{نهـا}_{س \leftarrow ٢} \frac{ق(س) - ٣}{٦ - ٣س}$$ تساوي:

أ ) ١    ب) $\frac{١}{٣}$    جـ) − $\frac{١}{٣}$    د ) −٣

(٢) $$\text{نهـا}_{س \leftarrow \frac{\pi}{٤}} \frac{جا٢س - ١}{س - \frac{\pi}{٤}}$$ تساوي:

أ ) ١    ب) صفر    جـ) $\frac{١}{\sqrt{٢}}$    د ) $\sqrt{٢}$

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

(٣) $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{\frac{١}{٢} - \text{جتا}(\frac{\pi}{٣} + هـ)}{هـ}$ تساوي:

أ ) $\frac{١}{٢}$ ب) $\frac{-١}{٢}$ جـ) $\frac{-\sqrt{٣}}{٢}$ د ) $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

(٤) إذا كان قَ(٢) = ٦ ، فإنَّ $\lim\limits_{هـ \leftarrow ٠} \dfrac{ق(٢+٣هـ) - ق(٢)}{-هـ}$ تساوي:

أ) – ١٨ ب) ١٨ جـ) – ٦ د ) – ٢

(٥) إذا كان معدّل التغير في الاقتران ق(س) في الفترة [–٢، م ] يساوي

$\dfrac{م^٢ - ٤}{م + ٢}$ فإنَّ $قَ_+(-٢)$ تساوي:

أ ) ٢ ب) صفر جـ) – ٤ د) ٤

(٦) إذا كان معدّل التغير في الاقتران ق(س) عندما تتغير س من س إلى س + هـ يساوي

$س^٢هـ - ٤س هـ^٢$ ، فإنَّ قَ(٣) تساوي:

أ ) ٩ ب) – ٩ جـ) صفر د) – ٣

(٧) إذا كان ق(س) = |٤ – ٢س| فإنَّ قَ(٢):

أ ) ٢ ب) – ٢ جـ) صفر د) غير موجودة

(٨) إذا كان ق(٤) = ٥ ، قَ(٤) = – ١ ، قً(٤) = ٢ فإنَّ $(\dfrac{ق}{قَ})'(٤)$ تساوي:

أ ) ١١ ب) – ٩ جـ) – ٦ د) ٦

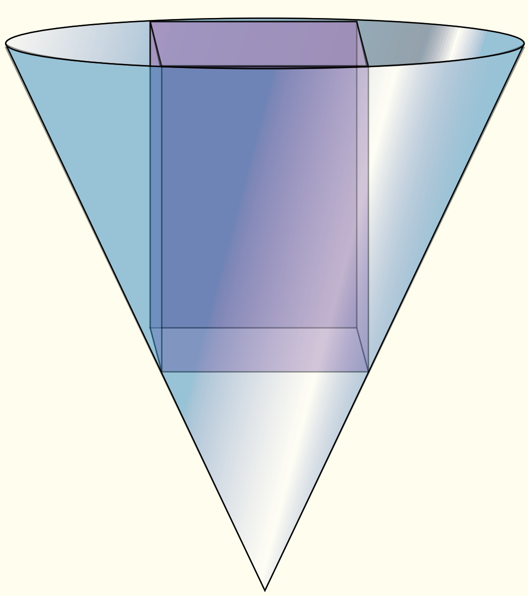
الوحدة الثالثة

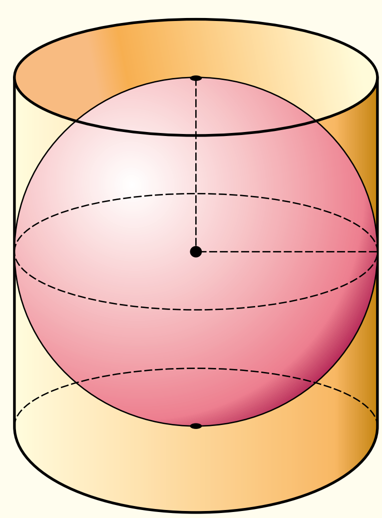
٣

# تطبيقات التفاضل

## Applications of Differentiation

تم توظيف علم التفاضل في مجالات متعددة تخدم العلوم الأخرى، كعلوم الفيزياء والكيمياء وعلوم الفضاء والاقتصاد والصناعات. وتضم دراسة خصائص الاقترانات، من حيث نهاياتها واتصالها ومجالات تزايدها وتناقصها ومجالات تقعرها، كذلك تم توظيف المعادلات التفاضلية في مجالات الاتصالات والمركبات الفضائية وفي المجالات العسكرية، كما تم توظيفها في العلوم الحياتية والسكانية.





**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- إيجاد معادلة المماس عند نقطة.
- حل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- حل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع.
- تفسير مفهوم المعدل الزمني.
- حل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدّلات المرتبطة بالزمن.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، ومجالات التزايد والتناقص له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تحديد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- بيان العلاقة بين المشتقة الأولى لاقتران، والقيم القصوى المحلية له.
- استخدام اختبار المشتقة الأولى في ايجاد القيم القصوى المحلية و المطلقة لاقتران معطى، إن وُجدت.
- استخدام اختبار المشتقة الثانية في تحديد فترات التقعر إلى الأعلى وإلى الأسفل، ونقط الانعطاف، والقيم القصوى.
- حل مسائل عملية تتضمن القيم القصوى.

الفصل الأول

# تطبيقات هندسية وفيزيائية

# Geometric and Physical Applications

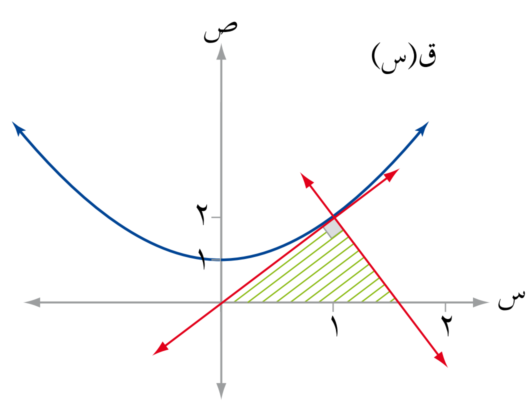
**النتاجات**

- تجد معادلة المماس عند نقطة.
- تحل مسائل هندسية على المشتقة الأولى.
- تحل مسائل عملية على المسافة، والسرعة، والتسارع
- تفسر مفهوم المعدل الزمني.
- تحل مسائل وتطبيقات حياتية على المعدلات المرتبطة بالزمن.

## أولاً تطبيقات هندسية

## Geometrical Applications

جد مساحة المثلث الناتج عن تقاطع محور السينات والمماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{٢}$+١ عند النقطة (١، ٢). انظر الشكل (٣-١).



الشكل (٣-١)

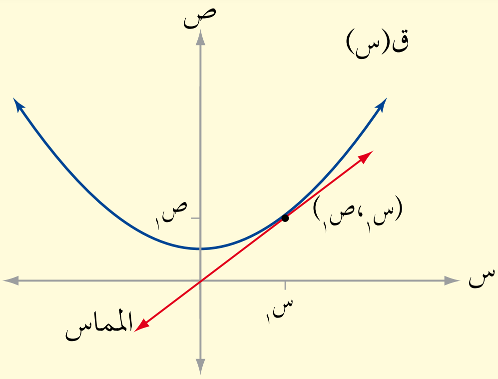
تعلمت سابقًا أنَّ ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) عند النقطة (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) يساوي المشتقة الأولى للاقتران ق عند تلك النقطة.

**أي أنَّ ميل المماس عند (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) = قَ (س$_{١}$)، وتسمى النقطة (س$_{١}$، ق(س$_{١}$)) نقطة تماس.**

بشكل عام إذا كان للاقتران ص= ق(س) مشتقة عند النقطة (س$_{1}$،ص$_{1}$)، فعندئذ يكون لمنحنى ق مماس عند تلك النقطة، ميله يساوي قَ (س$_{1}$).وتكون معادلة مماسه هي:

ص − ص$_{1}$ = قَ (س$_{1}$) (س − س$_{1}$)

انظر الشكل (٣-٢).



الشكل (٣-٢)

## مثال ١

إذا علمت أنَّ ق(س) = س$^{2}$+٣ ، جد معادلة كلٍّ من المماس، والمستقيم العمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (١،٤).

**الحل**

١) معادلة المماس لمنحنى الاقتران

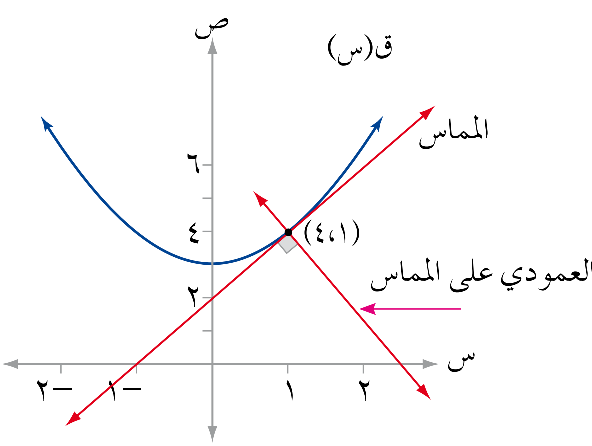
ق(س) = س$^{2}$ + ٣ عند النقطة (١،٤) هي :

ص−٤ = قَ(١)(س − ١)

قَ(س) = ٢س، ومنه قَ (١) = ٢

إذن معادلة المماس هي: ص− ٤ = ٢(س−١)

ومنه ص= ٢س + ٢



الشكل (٣-٣)

٢) معادلة العمودي على المماس عند النقطة (١،٤) هي:

$$\text{ص} - \text{ص}_{1} = \frac{-1}{\text{قَ}(\text{س}_{1})}(\text{س} - \text{س}_{1})$$

$$\text{ص} - 4 = \frac{-1}{2}(\text{س} - 1)$$

$$\text{ومنه ص} = \frac{-1}{2}\text{س} + \frac{9}{2}$$

انظر الشكل (٣-٣).

**تذكر**

١) ميل المستقيم×ميل العمودي عليه = −١

٢) المستقيم العمودي على منحنى اقتران عند نقطة هو نفسه العمودي على مماس منحنى الاقتران عند هذه النقطة.

## تدريب ١

جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س+٣}$ عند النقطة (١، ٢).

**ملاحظة**

يكون مماس منحنى الاقتران ق(س) عموديًّا على مماس منحنى الاقتران هـ(س) عند نقطة تقاطعهما (س$_١$، ص$_١$)، إذا كانت قَ(س$_١$)، هـَ (س$_١$) موجودتين، وكانت قَ(س$_١$) × هـَ (س$_١$) = −١

## مثال ٢

إذا كان ق(س) = س$^٢$ ، هـ (س) = س$^٢$−٢س+١، فجد النقطة التي يكون عندها مماسّا منحنيي الاقترانين ق، هـ متعامدين.

**الحل**

قَ (س) = ٢ س ، هـَ(س) = ٢ س−٢

قَ (س) × هـَ (س) = −١ (لماذا؟)

٢ س(٢س−٢) = −١

أي أنَّ ٤ س$^٢$−٤س+١ = ٠

ومنه (٢س−١)$^٢$ = ٠ ومنه س = $\frac{١}{٢}$

إذن النقطة التي يكون عندها مماسّا منحنيي الاقترانين متعامدين هي ( $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٤}$ ).

تحقَّق من صحة الحل.

## تدريب ٢

بيِّن أنَّ مماس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٤}{س}$، ومماس منحنى الاقتران هـ (س) = س متعامدان عند نقطة تقاطعهما.

## مثال ٣

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{٢}$−٦س+١٢ مماسًّا أفقيًّا عند النقطة (٣، ٣ ).

المماس الأفقي هو:
المماس الذي يوازي محور السينات ويكون ميله يساوي صفرًا.

### الحل

ميل المماس عند النقطة (س$_{١}$ ، ص$_{١}$ ) هو قَ(س$_{١}$)،

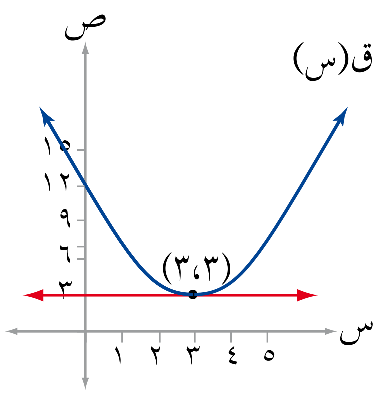
قَ(س$_{١}$) = ٢س$_{١}$ − ٦

قَ(٣) = ٢ × ٣ − ٦

= صفرًا

إذن لمنحنى ق مماس أفقي عند النقطة (٣،٣).

انظر الشكل (٣−٤).




الشكل (٣−٤)

## تدريب ٣

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = جا$^{٢}$س مماسًّا أفقيًّا في الفترة [ ٠ ، π ]

## مثال ٤

إذا كان مماس منحنى الاقتران ق(س) = س$^{٢}$+٣س+١ عند س = س$_{١}$ يصنع زاوية قياسها ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، فجد إحداثيّي نقطة التماس.

### الحل

ميل المستقيم (المماس) = ظا هـ
حيث هـ الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

قَ(س$_{١}$) = ظا ٤٥°

٢س$_{١}$+٣ = ١

ومنه س$_{١}$ = −١

إذن نقطة التماس هي: (س$_{١}$ ، ق(س$_{١}$) ) = (−١ ، −١)

## تدريب ٤

إذا كان الاقتران ق(س) = جـ $س^{٢}$ + جـ س +٢ ، وكان قياس زاوية ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند النقطة (٢،ق(٢)) هو $١٣٥^{\circ}$ ، فجد قيمة الثابت جـ .

## مثال ٥

جد الإحداثي السيني للنقط التي يكون عندها المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٤}$−٤$س^{٢}$+٤ موازيًا للمستقيم الذي معادلته: ص+٤س+١=٠

**الحل**

افرض أنَّ ميل المماس م ، و ميل المستقيم $م_{١}$ .

والنقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) نقطة التماس لمنحنى الاقتران ق.

إذن م = قَ ($س_{١}$) = ٤$س_{١}^{٣}$ − ٨$س_{١}$

وبما أنَّ مماس منحنى الاقتران ق عند النقطة ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) يوازي المستقيم ل، إذن:

م = $م_{١}$

٤$س_{١}^{٣}$ − ٨$س_{١}$ = −٤ لماذا؟

٤$س_{١}^{٣}$ − ٨$س_{١}$ + ٤ =٠

٤($س_{١}$ −١)($س_{١}^{٢}$ + $س_{١}$ −١) = ٠

ومنه $س_{١}$= ١

أو $س_{١}$ = $\frac{-١ + \sqrt{٥}}{٢}$

أو $س_{١}$ = $\frac{-١ - \sqrt{٥}}{٢}$

## مثال ٦

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^{٢}$ + ١ مماسيْن مرسومين من النقطة ( ٠ ، ٠ )، ثم جد معادلة كلٍّ منهما.

## الحل

النقطة ($\cdot$ ، $\cdot$) لا تقع على منحنى الاقتران ق، لماذا؟

افرض أنَّ النقطة (س$_1$،ص$_1$) نقطة تماس تقع على منحنى الاقتران ق.

ومنه ص$_1$ = س$_1^2$ + ١

ميل المماس عند نقطة التماس = ميل منحنى الاقتران ق عند تلك النقطة.

ميل المماس = قَ (س$_1$) عند نقطة التماس

= ٢س$_1$

معادلة المماس هي: ص = ٢س$_1$ (س $-$ $\cdot$)

ص = ٢س$_1$ س

ق(س$_1$) = ص$_1$

ومنه س$_1^2$ + ١ = ٢س$_1^2$

ومنه س$_1^2$ = ١

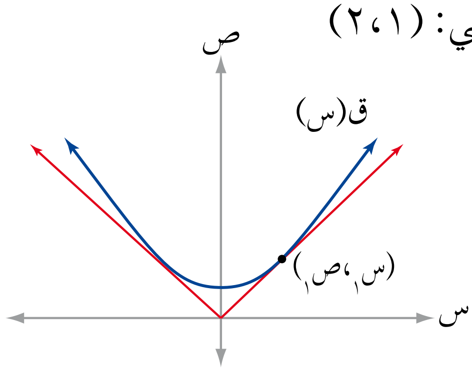
أي أنَّ قيم س$_1$ هي: $-$١، ١

نقطة التماس الأولى هي: ($-$١، ٢)، نقطة التماس الثانية هي: (١، ٢)

انظر الشكل (٣$-$٥).

$\therefore$ معادلة المماس الأول هي: ص = $-$٢س

معادلة المماس الثاني هي: ص = ٢س



الشكل (٣$-$٥)

### تدريب ٥

بيِّن أنَّ لمنحنى الاقتران ق(س) = ٥ $-$ س$^2$ ، مماسين مرسومين من النقطة (٣، $\cdot$).

١ ) جد ميل المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$+٦س–٥ عند النقطة (١ ، ٢).

٢ ) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٣$ ، عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص– س– ٦ = ٠

٣ ) جد النقط الواقعة على منحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$ – ٣س + ٣ التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ راد مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

٤ ) جد النقط الواقعة على منحنى العلاقة $(ص-٤)^٢$ = س+٢ التي يكون عندها المماس موازيًا للمستقيم الذي معادلته: ٣س + ٦ ص + ٢ =٠

٥ ) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$–٤س+٣ بحيث يكون المماس عموديًّا على المستقيم الذي معادلته: ٦ ص – ٣س– ٥ =٠

٦ ) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س}$ عند النقطة (١ ،٢)

٧ ) جد قيمة كلٍّ من الثابتين ب،جـ اللّتين تجعلان المستقيم الذي معادلته: ص– س – ٢=٠ مماسًّا لمنحنى الاقتران ق(س) = $س^٢$ + ب س + جـ عند النقطة (٠ ، ٢).

٨ ) إذا كان المستقيم ٢س– ص+ جـ =٠ يمس منحنى الاقتران ق(س) = $\frac{-٢}{س}$ عند النقطة ($س_١$،$ص_١$) فجد قيم الثابت جـ.

٩ ) جد معادلتي المماسين لمنحنى العلاقة س= $ص^٢$ –٤ص عند نقطتي تقاطع منحناها مع محور الصادات.

١٠) جد قياس الزاوية التي يصنعها مماس منحنى العلاقة: $ص^٢$+ $س^٢$ + ٦ ص– ٢س + ٢ =٠ عند النقطة (٣ ، –١) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

١١) جد معادلة المماس والعمودي على المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = ٣ ظتا س + $قا^٢$س عند س= $\frac{\pi}{٤}$ .

١٢) جد معادلة المماس لمنحنى الاقتران ق(س) = $\sqrt{س}$ عند نقطة تماسه مع منحنى الاقتران هـ(س) = $س^{٢} - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$.

١٣) جد مساحة المثلث القائم الزاوية، المكون من المماس المرسوم لمنحنى العلاقة ص= $\sqrt{س}$، س> ٠ عند النقطة (٤،٢) ومحور السينات والمستقيم س=٤.

١٤) حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

## ثانيًا تطبيقات فيزيائية
## Physical Applications

قُذف جسم من سطح برج رأسيًا إلى أعلى، حيث إنَّ ارتفاعه بالأمتار عن سطح البرج بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف(ن) = ٢٥ن − ٥ن$^{٢}$، جد ارتفاع البرج إذا كانت سرعة الـجسم لحظة وصوله الأرض تساوي ( − ٥٥م/ث).

تعلمت سابقًا أنَّ السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) في الفترة الزمنية من ن إلى ن + Δ ن لـجُسيم يتحرك على خط مستقيم، وفق العلاقة ل = ف(ن) هي:

$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن+\Delta ن) - ف(ن)}{\Delta ن}$ ، وإذا كانت $\lim_{\Delta ن \to ٠} \frac{\Delta ف}{\Delta ن}$ موجودة فتسمى **السرعة اللحظية للجُسيم عند ن** ويرمز لها بالرمز ع.

### تعريف

إذا تحرك جُسيم على خط مستقيم وتحدد موقعه في اللحظة ن بالعلاقة ل = ف(ن) فإنَّ:

السرعة اللحظية (السرعة) في اللحظة ن هي ع حيث ع(ن) = فَ(ن)

وإذا كان فَ(ن) قابلًا للاشتقاق في ن، فإنَّ فً (ن) = عَ(ن) يسمى تسارع الـجُسيم في اللحظة ن ويرمز له بالرمز ت(ن).

### مثال ١

يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن$^{٣}$− ٣ن$^{٢}$− ٣، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، احسب سرعة الـجُسيم وتسارعه عند ن = ٤ ثوانٍ.

**الحل**

السرعة ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن$^{٢}$−٦ن

ع(٤) = ٢٤م/ث

التسارع ت(ن) = عَ(ن) = فً (ن) = ٦ن−٦

ومنه ت(٤) = ١٨م/ث$^{٢}$

### تدريب ١

إذا كانت ف(ن) = ٤ جا٣ن − ٥ جتا٣ن، حيث ف المسافة بالأمتار، ن الزمن بالثواني، فاحسب كلاًّ من المسافة و السرعة و التسارع عندما ن = $\frac{\pi}{6}$ ثانية.

### مثال ٢

يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن$^{٣}$−٦ن$^{٢}$+١، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، جد سرعة الـجُسيم عندما ينعدم تسارعه.

**الحل**

السرعة ع(ن) = فَ (ن) = ٣ن$^{٢}$ − ١٢ ن

التسارع ت(ن) = فً (ن) = ٦ن − ١٢

عندما ينعدم تسارعه فإنَّ ت(ن) = ٠

∴ ٦ن − ١٢ = ٠

ومنه ن = ٢، أي ينعدم تسارع الـجُسيم عندما ن = ٢ ثانية.

إذن ع(٢) = ٣(٢)$^{٢}$ − ١٢(٢) = −١٢م/ث.

### تدريب ٢

إذا كانت ف(ن) = ن$^{٣}$−٩ن$^{٢}$+١٥ن، هي العلاقة الزمنية لحركة جُسيم على خط مستقيم، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار، فجد تسارع الـجُسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

### مثال ٣

قذف جسم رأسيًّا للأعلى من نقطة على سطح الأرض، بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأمتار بعد ن ثانية من بدء الحركة معطى بالعلاقة ف (ن) = ٣٠ن − ٥ن$^{٢}$، جد كلاًّ مما يأتي:

١) السرعة الابتدائية للجسم.

٢) أقصى ارتفاع يَصِلُ إليه الـجسم.

٣) اللحظة التي تكون عندها سرعة الـجسم ١٠م/ث.

٤) الزمن اللازم حتى يعود الـجسم إلى سطح الأرض.

**الحل**

١) السرعة الابتدائية ($ع_٠$) للجسم هي السرعة التي قذف بها الجسم أي عندما (ن=٠)

ع(ن) = ٣٠−١٠ن ومنه $ع_٠$ = ٣٠م/ث

٢) يصل الجسم إلى أقصى ارتفاع عندما تصبح السرعة ع = ٠، أي أنَّ ٣٠ − ١٠ن = ٠ ويتحقق ذلك عندما ن = ٣ث، وعند هذه اللحظة تكون المسافة المقطوعة ف(٣) = ٩٠ − ٤٥ = ٤٥م.

٣) ع = ٣٠−١٠ن = ١٠، ومنه ن = ٢ ثانية

٤) عندما يعود الجسم إلى سطح الأرض تكون ف = ٠ ومنه ٣٠ن − ٥$ن^٢$ = ٠

ن (٣٠ − ٥ن) = ٠، ومنه ن = ٠، ن = ٦ ثانية

وبما أنَّ ن = ٠ هي لحظة الانطلاق، إذن يعود الجسم إلى سطح الأرض بعد ٦ ثوانٍ من بدء الحركة.

**تدريب ٣**

حُلَّ المسألة الواردة بداية الدرس.

**مثال ٤**

أسقط جسم من ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض سقوطًا حرًّا؛ حيث إنَّ المسافة المقطوعة بالأمتار بعد ن ثانية هي $ف_١$(ن) = ٥$ن^٢$ وفي الوقت نفسه قذف جسم من سطح الأرض للأعلى حيث إنَّ المسافة التي يقطعها هي $ف_٢$(ن) = ٦٠ن − ٥$ن^٢$، جد اللحظة التي يكون لهما الارتفاع نفسه عن سطح الأرض.

**الحل**

يكون الجسمان على الارتفاع نفسه عن سطح الأرض عندما $ف_١$(ن) + $ف_٢$(ن) = ١٢٠م

٥$ن^٢$+٦٠ن − ٥$ن^٢$=١٢٠

٦٠ن = ١٢٠ ومنه ن = ٢ثانية

أي أنَّ الجسمين يكونان على الارتفاع نفسه بعد ثانيتين من بدء حركتهما.

١) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ن$^٣$ − ٦ن$^٢$ + ٩ن + ٣، حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة المقطوعة بالأمتار، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) السرعة الابتدائية للجُسيم.

ب) تسارع الجُسيم لحظة سكونه.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ف(ن) = ٢جا$^٢$($\frac{ن}{٢}$) + $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ن ،

ن ∈ [٠ ، $\frac{\pi}{٢}$] حيث ف: المسافة بالأمتار، ن: الزمن بالثواني، جد تسارع الجُسيم عندما تكون سرعته $\sqrt{٣}$ م/ث.

٣) قذف جسم رأسيًّا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث كان بعده عن سطح الأرض بعد ن ثانية هو ف(ن) = ١٩,٦ن − ٤,٩ن$^٢$ متر، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.

ب) تسارعه في اللحظة ن.

جـ) سرعة الجسم لحظة وصوله إلى سطح الأرض.

٤) قذف جسم رأسيًّا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بعد زمن ن ثانية هو ف(ن) = ١٢٨ن−١٦ن$^٢$ قدم، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) مجموعة قيم ن التي تكون عندها السرعة سالبة.

ب) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.

جـ) تسارع الجسم عند أي لحظة.

د ) سرعة الجسم الابتدائية.

٥) قُذفَ جسم رأسيًّا إلى أعلى من نقطة على سطح الأرض؛ بحيث يكون ارتفاعه عن سطح الأرض بالأقدام بعد ن ثانية معطى وفق العلاقة ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن$^٢$. جد سرعة الجسم عندما يكون على ارتفاع ٨٠ قدمًا.

٦) قذف جسم رأسيًا إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض بحيث إنَّ بعده عن نقطة القذف بعد ن ثانية من بدء الحركه معطى بالعلاقة ف(ن) = أ ن − ٥ن$^{٢}$ بالأمتار، فجد قيمة أ علمًا بأنَّ أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم ٨٠ مترًا.

٧) قُذف جسم رأسيًا إلى أعلى من نقطة على ارتفاع ٦٠ مترًا من سطح الأرض وفق العلاقة ف(ن) = ٤٠ن−٥ن$^{٢}$ حيث ن الزمن بالثواني، ف المسافة بالأمتار ، جِد كلًّا مما يأتي:

أ ) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى نقطة القذف.

ب) الزمن الذي يستغرقه الجسم حتى يعود إلى سطح الأرض.

جـ) أقصى ارتفاع يصل اليه الجسم عن سطح الأرض.

د ) متى تصبح سرعه الجسم ٣٠ م/ث ؟

هـ) متى يصبح ارتفاع الجسم ١٣٥ مترًا عن سطح الأرض؟

٨) أسقط شخص جسمًا من السكون من سطح بناية وفق العلاقة ف$_{١}$(ن) = ١٦ن$^{٢}$، وفي اللحظة نفسها قذف شخص ثانٍ جسمًا عموديًّا إلى أسفل بسرعة ابتدائية مقدارها ٢٠ قدم/ث من السطح نفسه وفق العلاقة ف$_{٢}$(ن) = ٢٠ن + ١٦ن$^{٢}$ ، فإذا ارتطم الجسم الأول بعد $\frac{١}{٢}$ ثانية من ارتطام الجسم الثاني بالأرض، فجد ارتفاع البناية.

٩) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إنَّ سرعته ع = أ $\sqrt{ف}$ ، أ > ٠، ف > ٠، ف: المسافة بالأمتار، إذا علمت أنَّ تسارعه ٨م/ث$^{٢}$. فجد قيمة الثابت أ.

١٠) يتحرك جُسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ع$^{٢}$= ١ − ٢ف$^{٢}$ حيث ع السرعة، ف المسافة بالأمتار.

جد تسارع الجُسيم عندما تنعدم سرعته.

## ثالثًا المعدلات المرتبطة بالزمن
## Related Rates

أطلق صاروخ عموديًا لأعلى بسرعة ١٠٠م/ث، وعلى بعد ٢٠٠متر من نقطة انطلاق الصاروخ، كان مشاهد جالسًا على الأرض ينظر إلى الصاروخ، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد عندما يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠٠ متر من سطح الأرض.

تعلمت سابقًا أن $\frac{دص}{دس}$ هو معدل تغير ص بالنسبة للمتغير س في حالة ارتباط ص بالمتغير س، غير أنَّ هناك حالات أخرى كثيرة فيها ارتباط بين عدة متغيرات، وكلٌّ منها له علاقة بالزمن ويعبر عنها بالصيغ التالية:

$\frac{دص}{دن}$ معدل تغير ص بالنسبة إلى الزمن ن.

$\frac{دس}{دن}$ معدل تغير س بالنسبة إلى الزمن ن.

تسمى هذه العلاقات **بالمعدلات المرتبطة بالزمن**، ولها تطبيقات فيزيائية وحياتية متنوعة.

**مثال ١**

تتحرك نقطة على منحنى العلاقة $س^٢ + ص^٢ - ٥س + ٣ص - ٦ = ٠$، فإذا كان معدل تغير إحداثيها السيني بالنسبة إلى الزمن ٣ سم/ث عند النقطة (١،٢)، فجد معدل تغير إحداثيها الصادي بالنسبة إلى الزمن عند النقطة نفسها.

**الحل**

افرض أنَّ النقطة (س،ص) تقع على منحنى العلاقة.

المعطيات : $\frac{دس}{دن} = ٣$ سم/ث ، عند النقطة (١ ، ٢).

المطلوب : $\frac{دص}{دن}$ عند النقطة (١،٢).

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات $\frac{دس}{دن}$ ، $\frac{دص}{دن}$ اشتق طرفي المعادلة ضمنيًا بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

$٢س \frac{ءس}{ءن} + ٢ص \frac{ءص}{ءن} - ٥ \frac{ءس}{ءن} + ٣ \frac{ءص}{ءن} = ٠$

$(٢ص+٣) \frac{ءص}{ءن} + (٢س-٥) \frac{ءس}{ءن} = ٠$

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{٥-٢س}{٢ص+٣} \times \frac{ءس}{ءن}$ لماذا؟

وبتعويض $\frac{ءس}{ءن} = ٣$، س=١، ص=٢ نجد أنَّ:

$\frac{ءص}{ءن} = \frac{٣}{٧} \times ٣ = \frac{٩}{٧}$ سم/ث

أي أنَّ معدل التغير في الإحداثي الصادي عند النقطة (١ ، ٢) يساوي $\frac{٩}{٧}$ سم/ث.

## مثال ٢

قرص معدني دائريُّ الشكل يتمدد بالحرارة محافظًا على شكله، تزداد مساحة سطحه بمعدل ٦سم$^٢$/ث، جد معدل تغير طول نصف قطر القرص؛ عندما يكون طول نصف قطره ٣سم.

**الحل**

افرض أنَّ:

نق = طول نصف قطر القرص في اللحظة ن.

م = مساحة سطح القرص في اللحظة ن.

المعطيات: $\frac{ءم}{ءن} = ٦$سم$^٢$/ث

المطلوب: $\frac{ء نق}{ء ن}$ عندما نق = ٣سم.

العلاقة التي تربط بين متغيرات المسألة م، نق هي:

م = $\pi$ نق$^٢$ ........ (١)

وباشتقاق طرفي العلاقة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن تحصل على:

$\frac{ءم}{ءن} = ٢\pi$ نق $\frac{ءنق}{ءن}$ ........(٢)

وبالتعويض عن $\frac{ءم}{ءن} = ٦$سم$^٢$/ث، نق = ٣سم في العلاقة (٢) تجد أنَّ:

٦سم$^٢$/ث $= ٢\pi \times ٣$سم $\times \frac{ء نق}{ء ن}$

ومنه $\frac{\text{ءنق}}{\text{ءن}} = \frac{١}{\pi}$ سم/ث

أي أنَّ طول نصف قطر القرص يزداد بمعدل $\frac{١}{\pi}$ سم/ث.

## تدريب ١

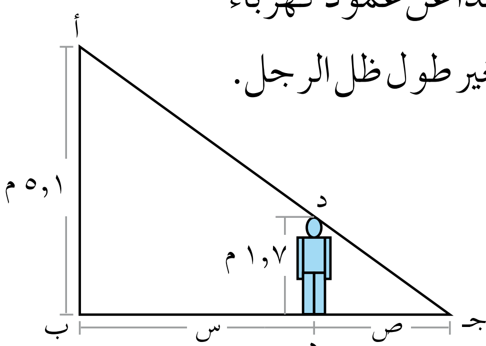
كرة من الجليد تنصهر بسبب الحرارة بحيث تبقى محافظة على شكلها، إذا كان طول نصف قطرها يتناقص بمعدل ٠,٠١ سم/ث ، فجد كلًّا مما يأتي:

١ ) معدل تناقص حجم الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ١٠ سم.

٢) معدل تناقص مساحة سطح الكرة عندما يكون طول نصف قطرها ٥سم.

## مثال ٣

رجل طوله ١,٧ متراً، يسير على أرض مستوية بسرعة ٢ م/ث مبتعدًا عن عمود كهرباء في قمته مصباح، يرتفع ١,٥ أمتار عن سطح الأرض، جد معدل تغير طول ظل الرجل.




الشكل (٣-٦)

**الحل**

افرض أنَّ: س بُعد الرجل عن عمود الكهرباء.

ص طول ظل الرجل.

انظر الشكل (٣-٦)

حدد الثوابت والمتغيرات والمعدّلات الزمنية المعطاة والمطلوبة كما يأتي:

المعطيات:

الثوابت: طول الرجل = ١,٧ م ، طول عمود الكهرباء = ٥,١ م

المتغيرات: بُعد الرجل عن عمود الكهرباء س ، طول ظل الرجل ص .

المعدلات المعطاة: $\frac{\text{ءس}}{\text{ءن}} = ٢$ م/ث

المعدلات المطلوبة: $\frac{\text{ءص}}{\text{ءن}}$

ابحث عن علاقة تربط بين المتغيرات س، ص، فتجد من خلال تشابه المثلثين أ ب جـ، د هـ جـ أن:

$\frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{س}+\text{ص}}{\text{ص}}$ ومنه $\frac{٥,١}{١,٧} = \frac{\text{س} + \text{ص}}{\text{ص}}$ ومنه ٣ ص = س + ص

٢ص = س .......... (١)

وللحصول على علاقة تربط بين المعدلات: $\frac{دص}{دن}$ ، $\frac{دس}{دن}$، اشتق طرفي المعادلة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن فتحصل على:

٢ $\frac{دص}{دن} = \frac{دس}{دن}$ ، ومنه $\frac{دص}{دن} = \frac{١}{٢} \frac{دس}{دن}$ ............ (٢)

وبالتعويض عن $\frac{دس}{دن}$ في المعادلة (٢)، تجد أنَّ:

$\frac{دص}{دن} = \frac{١}{٢} \times ٢ = ١$ م/ث.

أي أنَّ طول ظل الرجل يزداد بمعدل ١م/ث.

## تدريب ٢

في مثال (٣) جد معدل تغير بُعد رأس الرجل عن المصباح؛ عندما يكون الرجل على بعد ٣ أمتار عن عمود الكهرباء.

## مثال ٤

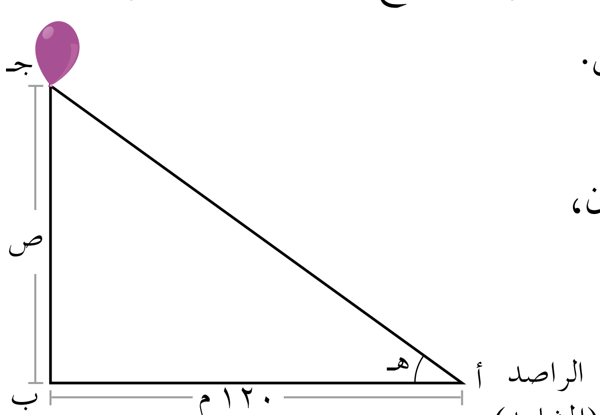
يرتفع بالون رأسيًّا إلى أعلى بمعدل ثابت قدرهُ ٤٠ م/د، رصدَهُ مشاهد يقف على الأرض، ويبعدُ ١٢٠م عن موقع البالون على الأرض، جد معدل تغير زاوية ارتفاع نظر المشاهد للبالون؛ عندما يكون البالون على ارتفاع ١٢٠م عن سطح الأرض.

### الحل

افرض أنَّ هـ زاوية ارتفاع نظر المشاهد في اللحظة ن،

وأنَّ ص ارتفاع البالون عن سطح الأرض،

انظر الشكل (٣-٧).



الشكل (٣-٧)

المعطيات: $\frac{دص}{دن} = ٤٠$ م/د

المطلوب: $\frac{دهـ}{دن}$ عندما ص = ١٢٠م

العلاقة التي تربط بين المتغيرين ص، هـ هي ظاهـ = $\frac{ص}{١٢٠}$ .......... (١)

وباشتقاق العلاقة (١) ضمنيًّا بالنسبة إلى الزمن نجد أنَّ:

$$قا^2 هـ \times \frac{ءهـ}{ءن} = \frac{١}{١٢٠} \times \frac{ءص}{ءن} \quad ........... (٢)$$

عندما ص = ١٢٠م يصبح المثلث القائم متطابق الضلعين، فعندئذ تصبح هـ $= \frac{\pi}{٤}$ ، وبالتالي

قا$^2$هـ = ٢، وبالتعويض في المعادلة (٢) تجد أنَّ:

$$٢ \times \frac{ءهـ}{ءن} = \frac{١}{١٢٠} \times ٤٠ \quad \text{ومنه} \quad \frac{ءهـ}{ءن} = \frac{١}{٦} \text{ راديان/ ث.}$$

**تدريب ٣**

مثلث متطابق الضلعين طول كلٍّ من ضلعيه المتطابقين ٨سم ، يزداد قياس الزاوية المحصورة بينهما بمعدل ٢°/د، جد معدل التغير في مساحة المثلث في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ٦٠°.

٢) عندما يكون قياس الزاوية المحصورة بينهما ١٢٠°.

قارن بين الإجابتين وفسر ذلك.

**مثال ٥**

دائرتان متحدتان في المركز، طولا نصفي قُطريهما ٥سم، ٢٠سم، ابتدأت الدائرة الصغرى تتسع بحيث يزداد طول نصف قطرها بمعدل ٢سم/د، وفي اللحظة نفسها أخذت الدائرة الكبرى تصغر بحيث يتناقص طول نصف قطرها بمعدل ١سم/د، جد معدل التغير في المساحة المحصورة بين الدائرتين في اللحظة التي تنطبق الدائرتان على بعضهما.

**الحل**

افرض أنَّ الزمن لتغيرهما هو ن دقيقة

طول نصف قطر الدائرة الصغرى = ٥+٢ن          لماذا؟

طول نصف قطر الدائرة الكبرى = ٢٠−ن          لماذا؟

م(ن) المساحة المحصورة بينهما

$$م(ن) = \pi(٢٠ - ن)^2 - \pi(٥ + ٢ن)^2$$

المطلوب: $\frac{ءم}{ءن}$ عندما م = ٠ أي عندما ٢٠ − ن = ٥ + ٢ن

ومنه ٣ن = ١٥

∴ ن = ٥ دقائق.

$$\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -\,\text{٢}\,\pi\,(\text{٢٠} - \text{ن}) - \text{٤}\,\pi\,(\text{٥} + \text{٢ن})$$

عندما ن = ٥، فإنَّ $\frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = -\text{٢}\,\pi\,(\text{٢٠} - \text{٥}) - \text{٤}\,\pi\,(\text{٥} + \text{١٠}) = -\,\text{٩٠}\,\pi$ سم$^{\text{٢}}$/د

**فكر وناقش**

ما دلالة الإشارة السالبة التي حصلت عليها في حل مثال(٥)؟

**وبصورة عامة، لحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن يمكنك اتباع الخطوات الآتية:**

١) ارسم شكلًا تقريبيًّا للمسألة موضّحًا عليه البيانات المعطاة، إن أمكنك ذلك.

٢) حدد الثوابت والمتغيرات، والمعدلات الزمنية المعطاة والمطلوبة.

٣) ابحث عن علاقة رياضية مستعينًا بالرسم تربط متغيرات المسألة؛ بحيث تكون معدلات جميع متغيرات المسألة معلومة باستثناء المعدل المطلوب إيجاده.

٤) عوِّض عن الثوابت في العلاقة التي حصلت عليها قبل إجراء عملية الاشتقاق لطرفيها في حالات معينة تتطلب ذلك.

٥) اشتقَّ طرفي العلاقة التي حصلت عليها بالنسبة إلى الزمن؛ للحصول على علاقة أخرى تربط بين المعدلات.

٦) عوِّض بالقيم المعلومة لإيجاد المطلوب.

١) مكعب من الثلج يتناقص طول ضلعه بمعدل ٠,٠٠٠١ سم/ث، جد معدل التغير في كلٍّ من حجمه ومساحته الكلية؛ عندما يكون طول ضلعه ١٠سم.

٢) يرتكز سلم طوله ٥ أمتار بطرفه العلوي على حائط عمودي، وبطرفه السفلي على أرض مستوية إذا تحرك الطرف السفلي مبتعدًا عن الحائط بمعدل $\frac{١}{٢}$ م/ث، فجد سرعة انخفاض الطرف العلوي للسلم؛ عندما يكون طرفه السفلي على بعد ٣م عن الحائط.

٣) قمع على شكل مخروط دائري قائم قاعدته للأعلى، فإذا كان ارتفاع القمع ١٦سم، وطول نصف قطر قاعدته ٨سم، صُبَّ فيه سائل بمعدل ١٢سم$^٣$/ث، جد معدل تغير مساحة سطح السائل في القمع عندما يكون ارتفاع السائل ٨سم.

٤) انطلقت سفينتان من الميناء نفسه في اتجاهين مختلفين على شكل خطين مستقيمين، قياس الزاوية بينهما (١٢٠°)، إذا كانت سرعة الأولى ٣٠كم/ساعة، وسرعة الثانية ٤٠كم/ساعة، فجد معدل تغير البعد بينهما عندما يكون بعداهما عن نقطة الانطلاق ٦كم، ٨كم على الترتيب.

٥) بدأت النقطتان أ، ب الحركة معًا من نقطة الأصل (م)؛ بحيث تتحرك النقطة ب على المحور السيني الموجب مبتعدة عن نقطة الأصل بسرعة ٢سم/ث، وتتحرك النقطة أ في الربع الأول على منحنى الاقتران ق(س) = س$^٣$، بحيث تبقى $\overline{\text{أب}}$ دائمًا عموديّة على محور السينات الموجب، جد:

أ ) معدل التغير في مساحة المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

ب) معدل التغير في طول وتر المثلث أ ب م بعد ثانية واحدة من بدء الحركة.

٦) حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

٧) بدأت نقطة الحركة على دائرة مركزها نقطة الأصل من النقطة (٥، ٠) باتجاه عكس عقارب الساعة، بحيث يزداد طول القوس الدائري الذي ترسمه النقطة في أثناء حركتها بمعدل ١٠سم/ث، جد معدل ابتعاد النقطة المتحركة عن النقطة (٥، ٠)؛ عندما يقابل القوس الذي ترسمه النقطة زاوية مركزية مقدارها $\frac{\pi}{٣}$ راد .

٨) تتمدد أضلاع مربع بمعدل ٤سم/ث، رُسِمت دائرة حول المربع بحيث تلامس رؤوسه ، وأخذت تتمدد مع المربع بحيث تبقى محافظة على شكلها ووضعها، جد معدل التغير في مساحة المنطقة المحصورة بين الدائرة والمربع، عندما يكون طول ضلع المربع ١٠سم.

٩) مصعدان كهربائيان مستقران في الطابق الأرضي، المسافة الأفقية بينهما ٨ أمتار، بدأ المصعد الأول يرتفع إلى الأعلى بسرعة ٢ م/ث ، وبعد ثانيتين بدأ المصعد الثاني في الارتفاع بسرعة ١م/ث . جد معدل تغير المسافة بين المصعدين بعد ثانيتين من بدء حركة المصعد الثاني.

الفصل الثاني

# تطبيقات عملية على التفاضل

## Applications of Derivative

**النتاجات**

- تحدد النقط الحرجة لاقتران معطى.
- تحدد فترات التزايد والتناقص لاقتران معطى.
- تستخدم اختبار المشتقة الأولى في تحديد فترات التزايد والتناقص والقيم القصوى، إن وجدت، لاقتران معطى.
- تتعرف مفهوم التقعر ونقط الانعطاف، وتحدد فترات التقعر لأعلى ولأسفل لاقتران ما باستخدام المشتقة الثانية.
- تستخدم اختبار المشتقة الثانية لتعيين القيم القصوى المحلية.
- تحل مسائل عملية على القيم القصوى.

## أولًا النقط الحرجة Critical Points

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = | س$^{٢}$ − ٢س |، س ∈[١، ٣].

سيتناول هذا الدرس تطبيقًا آخر للمشتقة الأولى، وهو **النقط الحرجة**.

**تعريف**

إذا كانت س$_{١}$ ضمن مجال الاقتران ق، فإنَّ القيمة س$_{١}$ تسمى **قيمة حرجة** للاقتران ق إذا تحقق أنَّ: قَ (س$_{١}$) = ٠ أو قَ (س$_{١}$) غير موجودة. وفي هذه الحالة تسمى النقطة (س$_{١}$،ق(س$_{١}$)) **نقطة حرجة** للاقتران ق.

## مثال ١

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = ٣س$^{٢}$ − س$^{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٣]

**الحل**

قَ (س) = ٦س − ٣س$^{٢}$ ، قَ(س) = ٠ عندما ٦س − ٣س$^{٢}$ = ٠ ومنه:

٣س(٢ − س) = ٠ أي عند: س = ٠، س = ٢ وكلاهما في الفترة [−٢، ٣]

وتكون قَ(س) غير موجودة عندما س = −٢، س = ٣ (أطراف الفترة)

وعليه يكون للاقتران ق أربع نقط حرجة هي: (−٢، ٢٠) ، (٠، ٠) ، (٢ ، ٤) ، (٣، ٠)

### تدريب ١

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ − ١٢س + ١، س ∈ [−٣، ٣]

## مثال ٢

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = جا س − $\frac{١}{٣}$ جا$^{٣}$ س ، س ∈ [٠ ، π]

**الحل**

قَ (س) = جتا س − جا$^{٢}$س جتا س = جتا س(١ − جا$^{٢}$س)، قَ (س) = جتا$^{٣}$س

قَ (س) = ٠ عندما:

جتا س = ٠ أي عند س = $\frac{\pi}{٢}$

وتكون قَ (س) غير موجودة عندما س = ٠ ، س = π (أطراف الفترة)

وعليه يكون للاقتران ق ثلاث نقط حرجة هي:

(٠، ٠) ، ($\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٢}{٣}$) ، (π، ٠).

### تدريب ٢

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = جا س − جا$^{٢}$س ، س ∈ [٠ ، π]

## مثال ٣

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{٤ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٣، ٣]

**الحل**

$$\text{قَ(س)} = \frac{-٢}{٣} \times \frac{\text{س}}{\sqrt[٣]{(٤ - \text{س}^٢)^٢}} \quad ،$$

قَ(س) = ٠ عندما البسط = ٠ أي أنَّ س = ٠

وتكون قَ(س) غير موجودة عندما المقام = ٠، وعند أطراف الفترة، أي عندما س= −٢، س = ٢، س = −٣، س = ٣ وعليه يكون للاقتران خمس نقط حرجة هي:

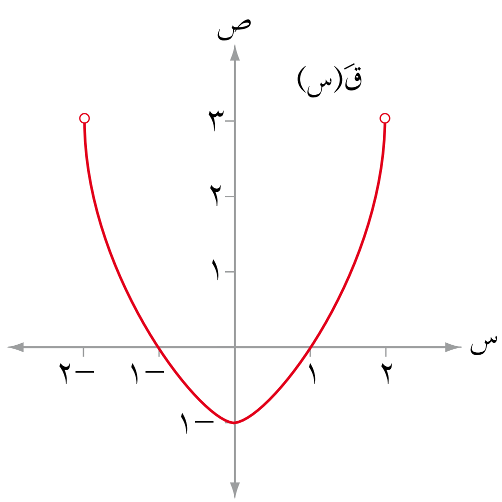
$(-٣، \sqrt[٣]{-٥})$، $(-٢، ٠)$، $(٠، \sqrt[٣]{٤})$، $(٢، ٠)$، $(٣، \sqrt[٣]{-٥})$

**تدريب ٣**

جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^٢}$ ، س $\in [-٢، ٢]$

**مثال ٤**

يمثل الشكل (٣–٨) منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المعرف على الفترة [−٢، ٢] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.



الشكل (٣–٨)

**الحل**

للاقتران نقط حرجة عندما قَ(س) = ٠، أو غير موجودة (ويكون ذلك عند المقطع السيني لمنحنى المشتقة الأولى وأطراف الفترة)

أي عندما س = −١، ١، −٢، ٢

وعليه يكون للاقتران أربع نقط حرجة هي:

(−١، ق(−١))، (١، ق(١))، (−٢، ق(−٢))، (٢، ق(٢)).

**تدريب ٤**

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١) جد النقط الحرجة لكلٍّ من الاقترانات الاتية:

أ ) ق(س) = $س^٤ - ٤س + ١$ ، س ∈ [−٢، ٢]

ب) ق(س) = جا س + جتا س ، س ∈ [٠، ٢π]

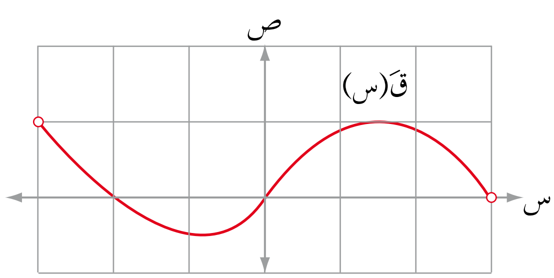
جـ) ق(س) = $س^٢$ |س−١| ، س ∈ [−٣، ٢]

د ) ق(س) = $\sqrt{جتا^٢ س}$ ، س ∈ [٠، π]

هـ) ق(س) = $\begin{cases} س^٢ + ١ & ، \ -٢ \leq س \leq ١ \\ ٢س & ، \ ١ \leq س \leq ٢ \end{cases}$

٢) جد قيم أ، ب التي تجعل للاقتران ق(س) = $س^٣$ + أ $س^٢$ + ب س نقطتين حرجتين عند س = −١، س = ٣.

٣) يمثل الشكل (٣−٩) منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرَّف على الفترة[−٣،٣] اعتمد على ذلك في تعيين النقط الحرجة للاقتران ق.



الشكل (٣−٩)

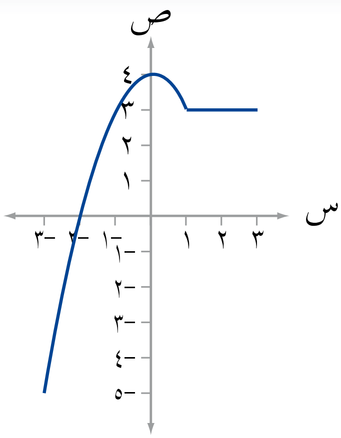
٤) جد النقط الحرجة للاقتران ق(س) = $\frac{س^٣ - ١}{س^٣ + ١}$

# ثانيًا التزايد والتناقص Increasing and Decreasing

اعتمادًا على الشكل (٣-١٠) الذي يمثل منحنى الاقتران

$$ق(س) = \begin{cases} ٤ - س^٢ & ، \quad -٣ \leq س \leq ١ \\ ٣ & ، \quad ١ < س \leq ٣ \end{cases}$$

صف سلوك منحنى الاقتران ق كلما زادت قيم س في الفترة [-٣،٣]




الشكل (٣-١٠)

لاحظ من خلال الشكل (٣-١٠) ما يأتي:

١) في الفترة [-٣، ٠] كلما زادت قيم س زادت قيم ق(س)، وفي هذه الحالة يكون ق **متزايدًا** على الفترة[-٣، ٠] مثلًا -٢ < -١ وأيضًا ق (-٢) < ق (-١).

٢) وفي الفترة [٠، ١] كلما زادت قيم س نقصت قيم ق(س)، وفي هذه الحالة يكون ق **متناقصًا** على الفترة [٠، ١] مثلًا $\frac{١}{٢}$ < ١ ، وأيضًا ق ($\frac{١}{٢}$) > ق (١).

٣) في الفترة [١، ٣] كلما زادت قيم س بقيت قيم ق(س) ثابتة، وفي هذه الحالة يكون ق **ثابتًا** على الفترة [١، ٣] مثلًا $\frac{٣}{٢}$ < ٢، ولكن ق ($\frac{٣}{٢}$) = ق(٢).

## تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [أ، ب] وكان $س_١، س_٢ \in$ [أ، ب]، عندئذٍ يكون الاقتران ق:

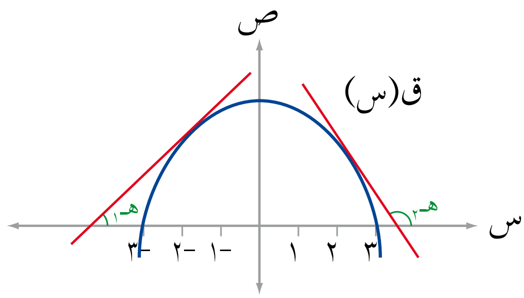
١) متزايدًا على الفترة [أ، ب] إذا كان $ق(س_١) < ق(س_٢)$ لكلِّ $س_١ < س_٢$

٢) متناقصًا على الفترة [أ، ب] إذا كان $ق(س_١) > ق(س_٢)$ لكلِّ $س_١ < س_٢$

٣) ثابتًا على الفترة [أ، ب] إذا كان $ق(س_١) = ق(س_٢)$ لكلِّ $س_١ < س_٢$

ومن التعريف لاحظ أنَّ الاقتران ق يكون متزايدًا عندما يصعد منحناه إلى الأعلى كلما تحركت س إلى اليمين، ويكون متناقصًا عندما يهبط منحناه إلى أسفل كلما تحركت س إلى اليمين.

في الشكل (٣-١١) إذا رسمت مماسًّا لمنحنى ق في الفترة (-٣،٠) تجد أنَّ المماسَّ يصنع زاوية حادة ($هـ_{١}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الشكل (٣-١١)

ومنه ظا$هـ_{١}$ > ٠، ماذا تتوقع أن تكون إشارة قَ(س)؟
وإذا رسمت مماسًّا لمنحنى ق في الفترة (٠،٣) نجد أنَّ المماس يصنع زاوية منفرجة ($هـ_{٢}$) مع الاتجاه الموجب لمحور السنات.

ومنه ظا$هـ_{٢}$ < ٠، ماذا تتوقع أن تكون إشارة قَ(س)؟

## نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ،ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ،ب) وكان:

١) قَ(س) > ٠، لجميع قيم س ∈ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون متزايدًا على الفترة [أ ، ب].

٢) قَ(س) < ٠، لجميع قيم س ∈ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون متناقصًا على الفترة [أ ، ب].

٣) قَ(س) = ٠، لجميع قيم س ∈ (أ ، ب)، فإنَّ ق(س) يكون ثابتًا على الفترة [أ ، ب].

يمكنك من خلال هذه النظرية تحديد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق، وذلك بإيجاد المشتقة الأولى للاقتران ق ، ودراسة إشارتها كما في الأمثلة الآتية:

### مثال ١

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = $س^{٣}$ - ٣س ، س ∈[-٢ ، ٢]

**الحل**

ق اقتران متصل على الفترة [-٢ ، ٢] وقابل للاشتقاق على الفترة (-٢ ، ٢) لأنَّه على صورة كثير حدود

قَ(س) = ٣$س^{٢}$ - ٣، قَ(س) = ٠، عندما ٣(س - ١)(س + ١) = ٠

∴ س = -١، س = ١

يبين الجدول (٣-١) إشارة قَ(س)، وبتطبيق النظرية أعلاه تجد أنَّ:

الجدول (٣-١)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ق(س) | ↗ | ↘ | ↗ |
| إشارة قَ(س) | غير موجودة +++ | --- | +++ غير موجودة |
| قيم س | ٢ ، ١ | ١ ، -١ | -١ ، -٢ |

١) قَ(س) > ٠ على الفترة (–٢ ، –١)، والفترة (١ ، ٢) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين [–٢ ، –١] ، [١ ، ٢].

٢) قَ(س) < ٠ على الفترة (–١ ، ١) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة [–١ ، ١]

والجدول (٣–١) يوضح إشارة قَ(س) وفترات تزايد الاقتران ق، ويعبر عن التزايد بالرمز (↗)، كما يوضح الجدول فترات تناقص الاقتران ق، ويعبر عن التناقص بالرمز ( ↘ ).

لاحظ أنَّه لتحديد إشارة المشتقة الأولى على فترة معينة بين نقطتين حرجتين؛ تقوم باختبار إشارة المشتقة الأولى عند أي قيمة داخل الفترة وما تحصل عليه من إشارة لهذه القيمة يمثل إشارة المشتقة الأولى على كل هذه الفترة.

**تدريب ١**

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = ٣س$^{٢}$ ــ س$^{٣}$ــ ٢

**مثال ٢**

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = جتاس، س ∈ [٠ ، ٢π ]

**الحل**

ق اقتران متصل على الفترة [ ٠ ، ٢π ] وقابل للاشتقاق على الفترة (٠ ، ٢π)

قَ(س) = – جاس

قَ(س) = ٠، عندما س = π

والجدول (٣–٢) يبين إشارة قَ(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

قَ(س) < ٠، لكلِّ س ∈ (٠ ، π) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة [ ٠ ، π ]

قَ(س) > ٠، لكلِّ س ∈ ( π ، ٢ π ).

وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترة[ π ، ٢ π ].

الجدول (٣–٢)

| ق(س) | | ↘ | | ↗ | |
|---|---|---|---|---|---|
| إشارة قَ(س) | غير موجودة | – – – | • | + + + | غير موجودة |
| قيم س | ٠ | | π | | ٢π |

**تدريب ٢**

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق(س) = جا$^{٢}$س، س ∈ [ ٠ ، ٢ π ].

## مثال ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢}}$

### الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح.

$$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٢} - ٤\text{س}}{\sqrt[٣]{(\text{س}^{٣} - ٦\text{س}^{٢})^{٢}}}$$

قَ(س) = ٠ عندما البسط = ٠،

ومنه $\text{س}^{٢} - ٤\text{س} = ٠$، أي أن س = ٠ ، س = ٤

قَ(س) غير موجودة عند أصفار المقام أي عند س=٠، س=٦

والجدول (٣-٣) يبين إشارة قَ(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

الجدول (٣-٣)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↗ |
| إشارة قَ(س) | +++ | غير موجودة | --- | ٠ | +++ | غير موجودة | +++ |
| قيم (س) | | ٠ | | ٤ | | ٦ | |

قَ(س)> ٠، لكلِّ س ∈ (-∞، ٠)، (٤ ، ∞ ) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين (-∞، ٠]، [٤ ، ∞ )

قَ(س)<٠، لكلِّ س ∈ (٠،٤) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة [٠،٤].

## تدريب ٣

حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران: ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س} - ١}$ ، س ∈ ح.

## مثال ٤

$$\text{إذا كان ق(س)} = \begin{cases} \text{س}^{٢}+٦\text{س}+٤ & ،\ \text{س} \le ٠ \\ [\text{س}+٤] & ،\ ٠ < \text{س} < ١ \\ |٣\text{س}+١| & ،\ ١ \le \text{س} \end{cases}$$

فحدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق على مجاله.

**الحل**

أعد تعريف الاقتران ق(س) = $\begin{cases} \text{س}^2+6\text{س}+4 & ، \text{س} \leq 0 \\ 4 & ، 0 < \text{س} < 1 \\ 3\text{س}+1 & ، 1 \leq \text{س} \end{cases}$

ق(س) اقتران متصل على ح

قَ(س) = $\begin{cases} 2\text{س}+6 & ، \text{س} < 0 \\ 0 & ، 0 < \text{س} < 1 \\ 3 & ، 1 < \text{س} \end{cases}$

ق(س) اقتران قابل للاشتقاق على ح ما عدا عند س = ٠، س = ١      لماذا؟

تكون قَ(س) غير موجودة عندما س = ٠، س = ١

قَ(س) = ٠، عندما ٢س+٦=٠، أي أنَّ س = −٣

الجدول (٣-٤)

| ق(س) | ↘ | | ↗ | | → | | ↗ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة قَ(س) | − − − | ٠ | + + + | غير موجودة | صفر | غير موجودة | + + + |
| قيم س | | −٣ | | ٠ | | ١ | |

والجدول (٣-٤) يبين إشارة قَ(س)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى في التزايد والتناقص تكون:

قَ(س) < ٠، لكلِّ س ∈ (−∞ ، −٣) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متناقصًا على الفترة (−∞ ، −٣]

قَ(س) > ٠، لكلِّ س ∈ (−٣ ، ٠)، (١ ، ∞) وعليه يكون ق(س) اقترانًا متزايدًا على الفترتين [−٣ ، ٠]، [١ ، ∞)

قَ(س) = ٠، لكلِّ س ∈ (٠ ، ١) وعليه يكون ق(س) اقترانًا ثابتًا على الفترة [٠ ، ١]

١) حدِّد فترات التزايد وفترات التناقص لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) ق(س) = ٤س − س$^{٢}$ ، س ∈ ح.

ب) ق(س) = |س$^{٢}$−٩| ، س ∈ [−٥ ، ٥]

جـ) ق(س) = جتا$^{٢}$س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

د ) ق(س) = (١ − س)$^{٣}$ ، س ∈ ح.

هـ) ق(س) = (٢ − س)$^{٤}$ ، س ∈ ح.

و ) ق(س) = $\sqrt{٢٥ - س^{٢}}$ ، س ∈ [−٥ ، ٥]

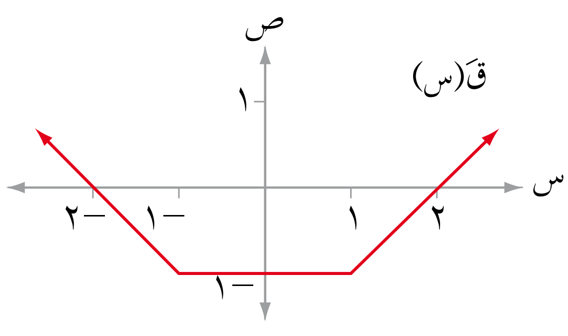
ز ) ق(س) = $\sqrt[٣]{(س-٤)^{٢}}$ ، س ∈ ح.

ح ) ق(س) = جتا س − $\frac{١}{٢}$ جتا ٢س ، س ∈ [٠ ، ٢ π]

ط) ق(س) = $\begin{cases} ٣ - س^{٢} & ،\ س \leq ١ \\ \frac{٢}{س} & ،\ س > ١ \end{cases}$

ي) ق(س) = $\begin{cases} ٤ - س^{٣} & ،\ س < ١ \\ \frac{٣}{س} & ،\ س \geq ١ \end{cases}$

٢) يمثل الشكل (٣−١٢) منحنى اقتران المشتقة الأولى للاقتران ق،حدد فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.



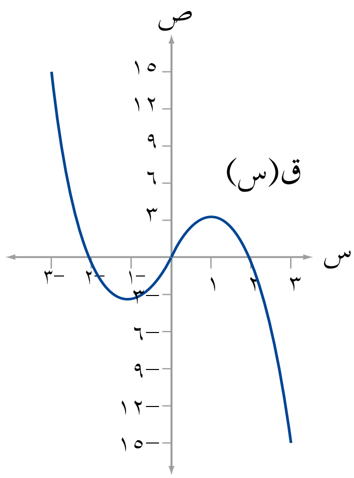

الشكل (٣−١٢)

٣) إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [أ ، ب] وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكان قَ(س) > ٠ ، لكلِّ س ∈ (أ ، ب)، وكان هـ (س) = ق(س) + س$^{٣}$، فأثبت أنَّ هـ (س) متزايد على الفترة [أ ، ب].

## ثالثًا القيم القصوى
## Extreme Values

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = |١ − س$^{٢}$|، س∈[−٣، ٤].

من خلال تأمل الشكل (٣−١٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ٤س − س$^{٣}$، س ∈ [−٣ ، ٣] ، يمكنك التحقق من أنَّ:




الشكل (٣−١٣)

١) ق($\frac{٢}{\sqrt{٣}}$) هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{٢}{\sqrt{٣}}$، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق.

٢) ق(−٣) هي أكبر قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [−٣ ، ٣]، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة عظمى مطلقة** للاقتران ق.

٣) ق ($\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$) هي أصغر قيمة للاقتران ق(س) في فترة مفتوحة حول العدد $\frac{-٢}{\sqrt{٣}}$، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق.

٤) ق(٣) هي أصغر قيمة للاقتران ق(س) في الفترة [−٣ ، ٣]، ومثل هذه القيمة تسمى **قيمة صغرى مطلقة** للاقتران ق.

**تعلّم**

تسمى القيم العظمى المحلية والصغرى المحلية للاقتران **قيمًا قصوى محلية**، كذلك تسمى القيم العظمى المطلقة والصغرى المطلقة للاقتران **قيمًا قصوى مطلقة**.

**فكر وناقش**

معتمدًا الشكل السابق (٣−١٤)، ما العلاقة بين النقط الحرجة للاقتران ق وقيمه القصوى؟

## تعريف

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [ أ ، ب]، وكان $س_١ \in$ [ أ ، ب]، فإنَّ:

١) ق($س_١$) **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق، إذا وُجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي $س_١$، وكان ق($س_١$) $\leq$ ق(س) لجميع قيم س $\in$ ف.

٢) ق($س_١$) **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق، إذا وُجدت فترة مفتوحة (ف) تحوي $س_١$، وكان ق($س_١$) $\geq$ ق(س) لجميع قيم س $\in$ ف.

٣) ق($س_١$) **قيمة عظمى مطلقة** للاقتران ق،إذا كان ق($س_١$) $\leq$ ق(س) لجميع قيم س $\in$[ أ ، ب].

٤) ق($س_١$) **قيمة صغرى مطلقة** للاقتران ق،إذا كان ق($س_١$) $\geq$ ق(س) لجميع قيم س $\in$[ أ ، ب].

## نظرية

إذا كان ق(س) اقترانًا معرَّفًا على الفترة [ أ ، ب] وكانت ق(جـ) قيمة قصوى للاقتران ق حيث جـ $\in$[ أ ، ب]، فإنَّ قَ(جـ) غير موجودة أو قَ (جـ)= ٠

## نظرية

نظرية (اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى)

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلًا على الفترة [ أ ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ ، ب) وكانت النقطة (جـ ، ق(جـ)) نقطة حرجة للاقتران ق، حيث جـ $\in$ (أ،ب) عندئذٍ:

١) إذا كان قَ(س) $\leq$ ٠ لكلِّ س < جـ وكان قَ(س) $\geq$ ٠ لكلِّ س > جـ ، فإنَّ:
ق(جـ) تكون **قيمة عظمى محلية** للاقتران ق.

٢) إذا كان قَ(س) $\geq$ ٠ لكلِّ س < جـ وكان قَ(س) $\leq$ ٠ لكلِّ س > جـ ، فإنَّ:
ق(جـ) تكون **قيمة صغرى محلية** للاقتران ق.

والأمثلة الآتية توضح ذلك.

## مثال ١

جد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س$^{٣}$ − ٣س$^{٢}$ + ١، س ∈ [−٢ ، ٤].

### الحل

لاحظ أنَّ الاقتران ق كثير حدود؛ فهو متصل على الفترة [−٢ ، ٤]، وقابل للاشتقاق على الفترة(−٢، ٤) حيث

قَ(س) = ٣س$^{٢}$ − ٦س

قَ(س) = ٠ إذن ٣س$^{٢}$ − ٦س = ٠

٣س(س−٢) = ٠، أي عندما س = ٠ ، س = ٢

وتكون قَ(س) غير موجودة. عندما يكون س = −٢، س = ٤ (طرفَيْ فترة).

ومن الجدول (٣−٥)، وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى عند قيم س التي يوجد عندها نقط حرجة للاقتران ق.

الجدول (٣−٥)

| قيم(س) | −٢ | | ٠ | | ٢ | | ٤ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| إشارة قَ(س) | غير موجودة | + + + | • | − − − | • | + + + | غير موجودة |
| ق(س) | | ↗ | | ↘ | | ↗ | |

تجد أنَّ للاقتران ق:

قيمة عظمى محلية عند س = ٠ وهي ق(٠) = ١

قيمة صغرى محلية عند س = ٢ وهي ق(٢) = −٣

قيمة عظمى مطلقة عند س = ٤ وهي ق(٤) = ١٧ ( طرف فترة ولا تعتبر قيمة عظمى محلية )

قيمة صغرى مطلقة عند س = −٢ وهي ق(−٢) = −١٩ (طرف فترة ولا تعتبر قيمة صغرى محلية)

## تدريب ١

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٦س$^{٢}$ ـ س$^{٣}$ ـ ٩س + ٢، س ∈ [−١ ، ٥].

## مثال ٢

حدد النقط الحرجة والقيم القصوى (إن وجدت) للاقتران ق(س) = ٤س − س$^{٢}$ + ١

**الحل**

ق(س) كثير حدود متصل وقابل للاشتقاق على ح.

يكون للاقتران نقط حرجة عند قَ(س) = ٠،   قَ(س) = ٤−٢س = ٠

ومنه س = ٢

إذن النقطة الحرجة هي (٢ ، ٥)

ومن الجدول (٣−٦)، الذي يوضح إشارة قَ(س) وحسب اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى تجد أنَّ للاقتران ق: قيمة عظمى محلية، ومطلقة عند س = ٢ وهي ق(٢) = ٥ .

الجدول (٣−٦)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ق(س) | ↘ | | ↗ |
| إشارة قَ(س) | − − − | | + + + |
| قيم س | | ٢ | |

## تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

## مثال ٣

جد القيم القصوى المحليه والمطلقة (إن وُجدت) للاقتران ق(س) = جتاس − $\frac{١}{٣}$ جتا$^{٣}$س،

س ∈[٠ ، ٢π]

**الحل**

ق(س) متصل على الفترة [٠ ، ٢π]، وقابل للاشتقاق لكلِّ س ∈(٠، ٢π )

حيث قَ(س) = −جاس + جتا$^{٢}$س جاس

قَ(س) = −جا$^{٣}$س   (لماذا؟)

جد النقط الحرجة للاقتران وادرس إشارة المشتقة الأولى حولها تجد أنَّ:

قَ(س) = ٠ عندما − جا$^{٣}$س = ٠، ومنه س = π

قَ(س) غير موجودة عند س = ٠ ، ٢π

إذن النقط الحرجة للاقتران ق هي: (٠ ، $\frac{٢}{٣}$)، (π ، −$\frac{٢}{٣}$)، (٢π ، $\frac{٢}{٣}$)

ومن الجدول (٣–٧) الذي يوضح إشارة قَ(س)

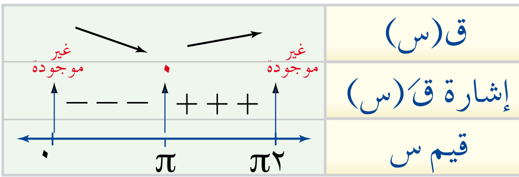
وبتطبيق اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى نجد أنَّ للاقتران ق:

قيمة صغرى محلية ومطلقة عند س = $\pi$

هي ق($\pi$) = $-\frac{٢}{٣}$

وقيمة عظمى مطلقة عند س = ٠ ، ٢ $\pi$ هي $\frac{٢}{٣}$.

الجدول (٣–٧)




## تدريب ٣

جد القيم القصوى المحلية (إن وجدت) للاقتران ق(س) = س + ٢ جاس، س∈[٠ ، $\pi$] .

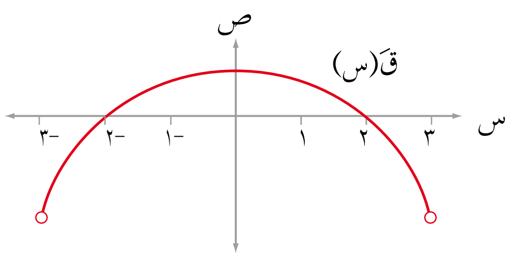
## مثال ٤

معتمدًا الشكل (٣–١٤) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران كثير الحدود ق المعرف على الفترة [–٣، ٣]، جد كلًّا مما يأتي:

١) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

٢) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

٣) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية .




الشكل (٣–١٤)

### الحل

١) للاقتران ق نقط حرجة عندما قَ(س) = ٠ أو غير موجودة

أي عندما س = –٣، س = –٢، س = ٢، س = ٣ (لماذا؟)

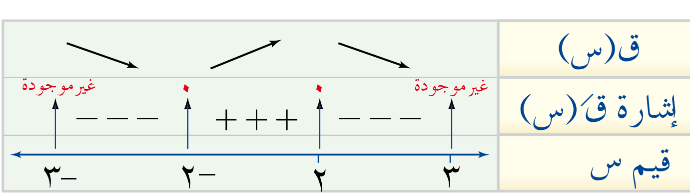
وعليه فإنَّ مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق هي {–٣،–٢،٢،٣}

٢) من جدول الإشارات (٣–٨)، الذي يوضح إشارة قَ(س) نجد أنَّ:

ق اقتران متناقص في الفترتين [–٣ ، ٢–]، [٢ ، ٣]

ق اقتران متزايد في الفترة [–٢ ، ٢]

الجدول (٣–٨)




٣) يوجد للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = –٢

يوجد للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٢

١) جد القيم القصوى المحلية والمطلقة (إن وُجدت)، لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) ق(س) = س$^{٢}$ − ٦س + ٩ ، س ∈ [٠ ، ٥]

ب) ق(س) = س$^{٣}$ − ١٢س ، س ∈ [−٤ ، ٤]

جـ) ق(س) = (٢ − س)$^{٣}$ ، س ∈ [٠ ، ٤]

د ) ق(س) = { س$^{٢}$ + ١ ، −٢ ≤ س < ٣ ؛ ٣س + ١ ، ٣ ≤ س ≤ ٥

هـ ) ق(س) = |(س − ١)$^{٣}$| ، س ∈ [−١ ، ٣]

و ) ق(س) = $\frac{١}{٤}$ س$^{٤}$ − $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ ، س ∈ [٠ ، ٣]

ز ) ق(س) = $\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}$ ، س ∈ [−٨ ، ١]

ح ) ق(س) = س + جاس ، س ∈ [٠ ، ٢π]

ط ) ق(س) = (١ − س)$^{٣}$ ، س ∈ [−٢ ، ٢]

ي ) ق(س) = (١ − س)$^{٤}$ ، س ∈ [−٣ ، ٣]

٢) إذا كان للاقتران ق(س) قيمة عظمى محلية عند النقطة (٢ ، ٣)، بيِّن أنَّ للاقتران هـ (س) = (١ − ق(س))$^{٣}$ قيمة صغرى محلية عند النقطة (٢ ، −٨).

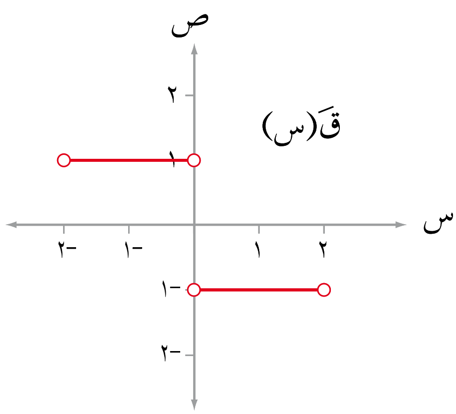
٣) معتمدًا الشكل (٣–١٥) الذي يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المتصل على الفترة[–٢،٢]

جد كلًّا مما يأتي:

أ ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.




الشكل (٣–١٥)

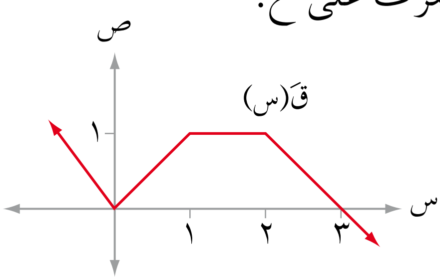
٤) يمثل الشكل (٣–١٦) منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق المعرَّف على ح.

اعتمد على ذلك في إيجاد كلٍّ مما يأتي:

أ ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية.




الشكل (٣–١٦)

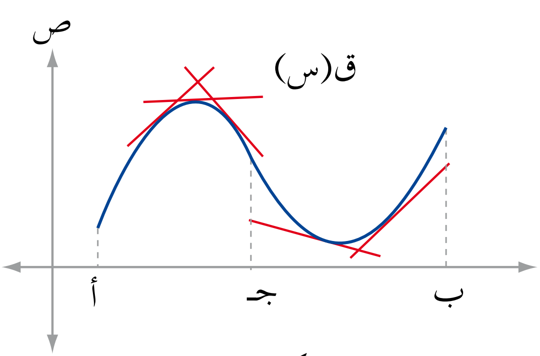
## رابعًا التقعر Concavity

إذا كان ق(س) = ٢جتاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س ، س ∋ [٠ ، ٢ π ] ، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق.

تعلمت سابقًا بعض تطبيقات المشتقة الأولى، مثل: إيجاد فترات التزايد والتناقص لمنحنيات الاقترانات.

وفي هذا الدرس ستتعرف بعض تطبيقات المشتقة الثانية للاقتران مثل: معرفة نوع تقعر منحنى الاقتران، وتعيين نقط الانعطاف لمنحناه، بالإضافة إلى تمييز القيم القصوى للاقتران، وسيتم توضيح ذلك في ما يأتي:

يبين الشكل (٣-١٧) منحنى الاقتران ق، المعرَّف على الفترة [ أ ، ب]، القابل للاشتقاق على الفترة (أ ، ب)، ويعني ذلك أنَّ لمنحنى ق عددًا كبيرًا من المماسّات على الفترة (أ ، ب) عند النقط (س، ق(س))، حيث س ∋ (أ ، ب).



الشكل (٣-١٧)

لاحظ أنَّ جميع المماسات المرسومة عند النقط (س ، ق(س))، حيث س ∋ (أ،جـ) تقع جميعها فوق منحنى الاقتران ق. ويقال في هذه الحالة إنَّ منحنى الاقتران ق(س) **مقعر للأسفل** على الفترة [ أ ، جـ ].

ولاحظ أنَّ جميع المماسات المرسومة عند النقط (س ، ق(س))، حيث س ∋ (جـ ، ب) تقع جميعها تحت منحنى الاقتران ق. ويقال في هذه الحالة إنَّ منحنى الاقتران ق(س) **مقعر للأعلى** على الفترة [جـ ، ب].

**تعريف**

ليكن ق اقترانًا معرَّفًا على الفترة [ أ ، ب]، وقابلًا للاشتقاق على الفترة (أ، ب) فيكون منحنى ق:

١) مقعرًا للأسفل على الفترة [ أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته فوق منحنى الاقتران ق في الفترة [ أ ، ب].

٢) مقعرًا للأعلى على الفترة [ أ ، ب] إذا وقعت جميع مماساته تحت منحنى الاقتران ق في الفترة [ أ ، ب].

وبالرجوع إلى شكل (٣-١٧) لاحظ أنَّ منحنى الاقتران ق مقعر للأسفل على الفترة [أ، جـ]، وتجد أنَّه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس(س، ق(س)) نَقَصَ ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة، أي أنَّ قَ(س) اقتران متناقص على الفترة (أ ، جـ)، ومنه تكون إشارة قَ(س) سالبة على (أ ، جـ)، أي أنَّ قً(س) < ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، جـ).

وبالمثل لاحظ أنَّ منحنى الاقتران ق مقعر للأعلى على الفترة [جـ ، ب] ، وأنَّه كلما زاد الإحداثي السيني لنقطة التماس(س، ق(س)) زاد ميل المماس لمنحنى ق عند هذه النقطة، أي أنَّ قَ(س) اقتران متزايد على الفترة (جـ ، ب)، ومنه تكون مشتقة قَ (س) موجبة على الفترة (جـ ، ب)، أي أن قً(س) > ٠، لكلِّ س ∋ (جـ ، ب).

**تذكر**

ميل المماس لمنحنى الاقتران ق عند س = س$_{١}$ يساوي قَ(س$_{١}$).

قَ(س$_{١}$) = ظا هـ ، حيث هـ زاوية ميل المماس عند س$_{١}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

**نظرية**

**( اختبار التقعر )**

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [ أ ، ب]، ، وكان كلٌّ من قَ(س)، قً(س)، معرّفين على الفترة (أ ، ب) فإنّهَ :

١) يكون منحنى الاقتران ق مقعرًا للأسفل على الفترة[ أ ، ب]، إذا كان قً(س) < ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، ب)

٢) يكون منحنى الاقتران ق مقعرًا للأعلى على الفترة[ أ ، ب]، إذا كان قً(س) > ٠ ، لكلِّ س ∋ (أ ، ب)

## مثال ١

إذا كان ق(س) = س$^{٣}$ – ٣س$^{٢}$ + ٣س + ١ ، جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق .

**الحل**

يمكنك تحديد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق ، من خلال إشارة مشتقته الثانية.

قَ(س) = ٣س$^{٢}$ – ٦س + ٣

قً(س) = ٦س – ٦

وتكون قً(س) = ٠، عندما ٦س – ٦ = ٠، أي أنَّ س = ١

ومن الجدول (٣–٩ )، الذي يوضح إشارة قً وحسب اختبار التقعر تجد أنَّ:

منحنى الاقتران مقعر للأسفل على الفترة (–∞ ، ١ ] لأنَّ قً(س) < ٠،

لكل س ∈ (–∞ ، ١).

ومقعر للأعلى على الفترة [ ١ ، ∞) لأنَّ قً (س) >٠،

لكلِّ س ∈ (١ ، ∞ ).

الجدول (٣–٩)

| قيم س | –∞ | ١ | ∞ |
|---|---|---|---|
| إشارة قً(س) | – – – | ٠ | + + + |
| ق(س) | ∩ | | ∪ |

## تدريب ١

جد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق،

حيث ق(س) = س$^{٤}$ – ٦س$^{٣}$ + ١٢س$^{٢}$، س ∈ [– ٥ ، ٥].

## مثال ٢

حدد فترات التقعر للأسفل وللأعلى لمنحنى الاقتران ق(س) = س$^{\frac{١}{٥}}$، س ∈[–٢ ، ٢].

**الحل**

قَ(س) = $\frac{١}{٥}$ س$^{\frac{-٤}{٥}}$

قً(س) = $\frac{-٤}{٢٥}$ س$^{\frac{-٩}{٥}}$ = $\frac{-٤}{٢٥}$ × $\frac{١}{\sqrt[٥]{س^{٩}}}$

لاحظ من خلال إشارة قً(س) حول س=٠ في الجدول (٣ – ١٠) أنَّ منحنى ق مقعر للأعلى على [-٢ ، ٠] ، ومقعر للأسفل على [٠ ، ٢]

الجدول (٣-١٠)

| | | |
|---|---|---|
| ق(س) | ⌢ | ⌣ |
| إشارة قً(س) | – – –   غير موجودة | + + + |
| قيم س | ٢   ٠ | ٠   ٢- |

**تدريب ٢**

ليكن ق(س)= $س^{\frac{٢}{٣}}$ ، جد مجالات التقعر لمنحنى الاقتران ق.

من خلال المثالين (١)، (٢)، السابقين لا بد أنَّك لاحظت أنَّ منحنى ق يغيِّر من اتجاه تقعره حول نقطة في مجاله؛ فقد غيَّر اتجاه تقعره من أسفل إلى أعلى حول النقطة (١ ، ٢) في المثال(١)، كما أنَّه غيَّر اتجاه تقعره من أعلى إلى أسفل حول النقطة (٠ ، ٠) في المثال (٢)، وتسمى كلٌّ من هذه النقط التي يغير الاقتران ق اتجاه تقعره حولها **نقطةَ انعطاف**.

**تعريف**

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على فترة مفتوحة تحوي $س_١$، وكان منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند $س_١$ فإنَّ النقطة ($س_١$ ، ق($س_١$)) تسمى نقطة انعطاف لمنحنى ق.

**مثال ٣**

جد نقط الانعطاف لمنحنى ق حيث:

ق (س) = $س^٤$ – ٦$س^٢$ + ١ ،      س ∈ ح

**الحل**

الاقتران ق كثير حدود؛ فهو متصل لكلِّ س ∈ ح

وتكون قَ ، قً معرَّفتين لكلِّ س ∈ ح حيث:

قَ(س) = ٤$س^٣$ – ١٢س

قً(س) = ١٢$س^٢$ – ١٢

وتكون قً (س) = ٠ عندما ١٢$س^٢$ – ١٢=٠

ومنه ١٢(س – ١)(س + ١) =٠، ومنه س=–١، س = ١

ومن خلال دراسة إشارة قً في الجدول (٣ – ١١) نلاحظ أنَّ ق يغير اتجاه تقعره عند س= –١، وعند س = ١ ، لذلك فإنَّ:

الجدول (٣–١١)

| | | | |
|---|---|---|---|
| ق(س) | ∪ | ∩ | ∪ |
| إشارة قً(س) | + + + | – – – | + + + |
| قيم (س) | ∞ ، ١ | ١ ، –١ | –١ ، –∞ |

(–١، –٤)، (١، –٤ ) نقطتا انعطاف.

## تدريب ٣

إذا كان ق(س) = ٦س$^{٣}$ – س$^{٤}$، فجد نقط الانعطاف لمنحنى الاقتران ق (إن وُجدت).

## مثال ٤

جد قيم س التي يكون لمنحنى الاقتران ق عندها نقط انعطاف، حيث:

ق(س)= ٢ جاس + $\frac{١}{٢}$ جا٢س، س ∈ [ ٠ ، ٢ π]

**الحل**

لايجاد نقط الانعطاف جد قً لتحديد فترات التقعر لأعلى و لأسفل.

قَ (س) = ٢ جتاس + جتا٢س

قً (س) = –٢ جاس –٢ جا٢س

وتكون قً (س) = ٠

إذن –٢ جاس –٢ جا٢س = ٠

–٢ جاس –٤ جاس جتاس = ٠

–٢ جاس( ١ + ٢ جتاس) =٠

إما –٢ جاس = ٠ أو ١ + ٢ جتاس=٠

ومنه، س=٠، π ، ٢ π ( ترفض القيم ٠، ٢π لماذا؟) ، أو س= $\frac{٢π}{٣}$ ، $\frac{٤π}{٣}$

الجدول (٣–١٢)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ق(س) | ∪ | ∩ | ∪ | ∩ |
| إشارة قً(س) | غير موجودة + + + | – – – | + + + | – – – غير موجودة |
| قيم (س) | ٢π ، $\frac{٤π}{٣}$ | $\frac{٤π}{٣}$ ، π | π ، $\frac{٢π}{٣}$ | $\frac{٢π}{٣}$ ، ٠ |

ومن خلال دراسة إشارة قً (س) في الجدول (٣ – ١٢) لاحظ أنَّ منحنى ق يغير اتجاه تقعره عند

س = $\frac{٢π}{٣}$ ، س = π ، س = $\frac{٤π}{٣}$، لذلك فإنَّ للاقتران ق ثلاث نقط انعطاف عند

س = $\frac{٢π}{٣}$ ، س = π ، س = $\frac{٤π}{٣}$

## تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

بالإضافة إلى التطبيقات السابقة تُستخدم إشارة المشتقة الثانية للاقتران ق في تمييز القيم القصوى المحلية للاقتران، والنظرية الآتية توضح ذلك.

**تعريف**

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية:

على فرض أنَّ المشتقة الأولى قَ(س)، والمشتقة الثانية قً(س)، للاقتران ق(س) معرَّفتان عند $س_١ \in$ (أ، ب) عندئذٍ:

١) إذا كان قَ($س_١$) = ٠، و قً($س_١$) > ٠، فإنَّ للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند $س_١$ هي ق($س_١$)

٢) إذا كان قَ($س_١$) = ٠، و قً($س_١$) < ٠، فإنَّ للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند $س_١$ هي ق($س_١$)

٣) إذا كان قَ($س_١$) = ٠، و قً($س_١$) = ٠ ، فإنَّ الاختبار يفشل، فنبحث عن القيم القصوى المحلية باستخدام اختبار المشتقة الأولى.

## مثال ٥

إذا كان ق(س) = $س^٣$ − ٣$س^٢$ + ٢ فَجد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

**الحل**

قَ(س) = ٣$س^٢$ − ٦س

وتكون قَ(س) = ٠ إذا كان ٣$س^٢$ − ٦س = ٠ أي أنَّ ٣س(س − ٢) = ٠ ومنه، س = ٠، س = ٢

إذن للاقتران ق نقطتان حرجتان هما: (٠ ، ٢)، (٢ ، −٢)

قً(س) = ٦س − ٦، وحسب اختبار المشتقة الثانية نجد أنَّ:

قً (٠) = −٦ < ٠ ، إذن للاقتران ق قيمة عظمى محلية عند س = ٠ هي ق(٠) = ٢

قً (٢) = ٦ > ٠ إذن للاقتران ق قيمة صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = −٢

## تدريب ٥

ليكن ق(س) = $س^٣$ − ١٢س + ٣، جد نقط القيم القصوى المحلية للاقتران ق باستخدام اختبار المشتقة الثانية.

١) حدد فترات التقعر إلى الأعلى والتقعر إلى الأسفل لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ ) $ق(س) = س + \frac{٤}{س}$

ب) $ق(س) = \sqrt{١٦ - س^٢}$ ، $س \in [-٤، ٤]$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ - ١ & ، س < ٢ \\ ٥ - س & ، س \geq ٢ \end{cases}$

د ) $هـ(س) = \left(\frac{س - ١}{س}\right)^٢$

هـ) $ق(س) = جتاس - جا س + ١$ ، $س \in [٠ ، \pi]$

٢) حدد نقط الانعطاف (إن وجدت) لكلٍّ من منحنيات الاقترانات الآتية:

أ ) $ق(س) = س^٣ - ٦س^٢ + ٩س + ٢$ ، $س \in ح$

ب) $ق(س) = س^{\frac{٢}{٣}} - س^{\frac{١}{٣}}$ ، $س \in ح$

جـ) $ق(س) = س^{\frac{٣}{٥}}$ ، $س \in ح$

د ) $ق(س) = س - ظا س$ ، $س \in [-\frac{\pi}{٢} ، \frac{\pi}{٢}]$

٣) جد القيم العظمى والقيم الصغرى المحلية لكلٍّ من الاقترانات الآتية، باستخدام اختبار المشتقة الثانية، إن أمكن ذلك:

أ ) $ق(س) = جاس - جتاس$ ، $س \in [٠، ٢\pi]$

ب) $ق(س) = س^٤$ ، $س \in ح$

جـ) $ق(س) = ٤|س - ٢| - |س + ١| + س$ ، $س \in ح$

د ) $ق(س) = س^٢ + \frac{١٢٨}{س}$ ، $س \neq ٠$

٤) عيِّن قاعدة الاقتران ق(س) = أس$^{٣}$ + ب س$^{٢}$ + جـ س + د ، ( أ ≠ ٠ ، ب، جـ، د أعداد حقيقية) الذي يمر منحناه بالنقطة (١، ٥)، ومعادلة المماس لمنحناه عند نقطة الانعطاف (٢، ١)، هي :
ص + ٣س − ٧ = ٠.

٥) إذا كان ق(س) = $\frac{١}{س}$ س ≠ ٠ ، هـ(س) = س$^{\frac{١}{٣}}$ فأجب عما يأتي:

أ ) قارن مجالات التقعر لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ.

ب) جد النقط التي يكون عندها كلٌّ من الاقترانين ق، هـ غير متصل.

جـ) جد نقط الانعطاف لكلٍّ من الاقترانين ق، هـ إن وُجدت.

٦) يمثل الشكل (٣–١٨) منحنى قَ(س)، ومنحنى قً(س) للاقتران ق(س) المعرّف على ح.
اعتمد على ذلك في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

أ ) عيِّن مجالات التزايد والتناقص للاقتران ق.

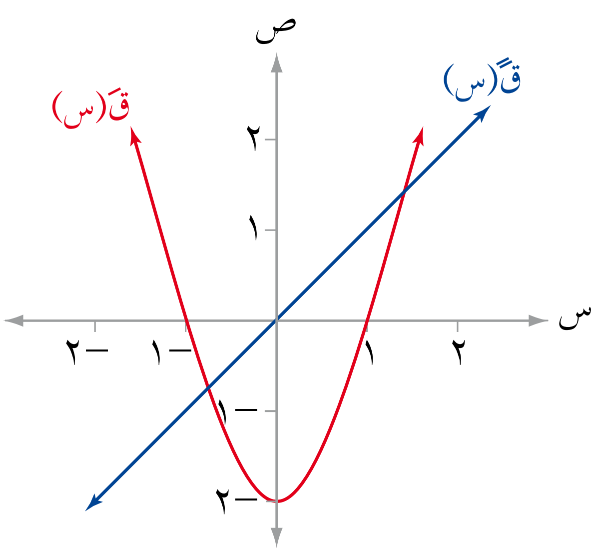
ب) عيِّن قيم س التي يكون للاقتران عندها قيم قصوى محلية باستخدام:

(١) اختبار المشتقة الأولى.

(٢) اختبار المشتقة الثانية.

جـ ) عيِّن مجالات التقعر للاقتران ق.

د ) عيِّن نقط الانعطاف للاقتران ق.



الشكل (٣–١٨)

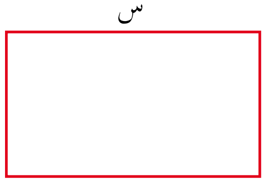
## خامسًا تطبيقات القيم القصوى
## Applications of Extreme Values

صفيحة من الورق مستطيلة الشكل مساحتها ١٢٨سم$^{٢}$، يراد طباعة إعلان عليها، إذا كان عرض كلٍّ من الهامشين في رأس الورقة وأسفلها ١سم، وفي كلٍّ من الجانبين $\frac{١}{٢}$ سم، فجد بُعدَيْ الورقة بحيث تكون المساحة المطبوعة أكبر ما يمكن.

تواجهك كثير من القضايا (المسائل) الحياتية في العلوم والهندسة والاقتصاد وغيرها، تحتاج إلى معرفة أكبر قيمة أو أصغر قيمة لكمية متغيرة، ولحل هذه المسائل تلجأ إلى تحويلها من صور لفظية إلى معادلات واقترانات؛ من أجل إيجاد القيم القصوى لها. وفي ما يأتي نقدم بعض المسائل في تلك المواضيع بوصفها أمثلة محلولة توضح كيفية التعامل معها رياضيًّا، ومن ثَم تجد لها القيم القصوى المطلوبة.

### مثال ١

قطعة أرضٍ مستطيلة الشكل، محيطها ٨٠٠ متر. جد بُعدَي قطعة الأرض لتكون مساحتها أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-١٩)

**الحل**

نفرض أنَّ س، ص بُعدا قطعة الأرض، ومساحتها م، كما في الشكل (٣-١٩).

المعطيات: محيط قطعة الأرض = ٨٠٠ متر.

المطلوب: إيجاد قيمتي س، ص لتكون م أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقترانًا لمتغير مستقل واحد.

م = س ص ...... (١)

ولجعل العلاقة بدلالة متغير واحد س أو ص، وظِّف معطيات المسألة، وهي أنَّ محيط قطعة الأرض=٨٠٠م أي أنَّ:

٢س + ٢ص=٨٠٠ ، ومنها ص = ٤٠٠ – س ...... (٢)

وبالتعويض في (١) تجد أنَّ:

م(س) = س (٤٠٠ ـ س) حيث ٠ ≤ س ≤ ٤٠٠ لماذا؟

وبذلك تصبح (م) بالصورة الآتية:

م(س) = ٤٠٠س − س$^{٢}$ ..... (٣) وهو اقتران بمتغير واحد (س)، وقابل للاشتقاق.

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران م(س) نشتق المعادلة (٣) ونتحقق من ذلك كما يأتي:

مَ (س) = ٤٠٠ ـ ٢س.

مَ (س) = ٠ أي أنَّ ٤٠٠ − ٢س=٠، ومنه س = ٢٠٠

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى عند س=٢٠٠ تجد مً (س) عند س = ٢٠٠

مً (س) = −٢ ، ومنه مً (٢٠٠) = −٢

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند (س = ٢٠٠) لماذا؟

أي تكون مساحة قطعة الأرض أكبر ما يمكن عندما س = ٢٠٠ متر

وبالتعويض عن قيمة س في المعادلة (٢) تجد أنَّ

ص = ٤٠٠ − ٢٠٠ = ٢٠٠ متر.

**تدريب ١**

مجموع عدد مع مثلي عدد آخر يساوي ٤٠، جد العددين بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن مستخدمًا تطبيقات التفاضل.

**لحل المسائل العملية على القيم القصوى؛ يمكنك اتباع الخطوات الآتية:**

١) اقرأ المسألة وحدد المتغيرات، وارسم شكلًا توضيحيًا للمسألة.

٢) حدد المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى، واكتب المعادلة (العلاقة) التي تربط هذا المتغير بالمتغيرات الأخرى.

٣) اكتب المتغير المطلوب إيجاد قيمته القصوى كاقتران في متغير واحد.

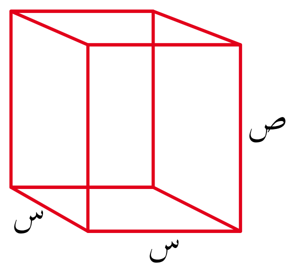
٤) حدد مجال الاقتران الناتج إن أمكن.

٥) استخدم ما تعلمته في الدروس السابقة في إيجاد القيم القصوى (اختبار المشتقة الثانية، اختبار المشتقة الأولى).

**مثال ٢**

متوازي مستطيلات قاعدته مربعة الشكل، ومجموع أطوال أحرفه يساوي ٦٠٠سم، جد أبعاد متوازي المستطيلات التي تجعل حجمه أكبر ما يمكن.

**الحل**




الشكل (٣–٢٠)

افرض أنَّ س طول قاعدته،وص ارتفاعه، وأنَّ ح حجمه.

كما في الشكل (٣–٢٠).

المعطيات:

مجموع أطوال أحرف متوازي المستطيلات (٦٠٠سم)

المطلوب:

إيجاد أبعاد متوازي المستطيلات س، ص ليكون حجمه (ح) أكبر ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد كالآتي:

ح = س$^{٢}$ص ..... (١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ص بدلالة الآخر، استخدم معطيات المسألة وهي أنَّ مجموع أطوال أحرفه يساوي (٦٠٠سم)، أي أنَّ:

٤ص + ٨س = ٦٠٠ ومنها ص = ١٥٠–٢س ..... (٢)

وبالتعويض في (١) تجد أنَّ:

ح(س) = س$^{٢}$(١٥٠–٢س) حيث ٠ ≤ س ≤ ٧٥ (لماذا؟)

= ١٥٠س$^{٢}$–٢س$^{٣}$ ..... (٣) وهو اقتران بمتغير واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح(س) اشتقَّ المعادلة (٣)، وتحقق من ذلك كما يأتي:

حَ(س) = ٣٠٠س – ٦س$^{٢}$

وتكون حَ(س) = ٠ عندما ٣٠٠س–٦س$^{٢}$=٠، أي عندما س = ٥٠، س = ٠ (تهمل)

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى عند (س=٥٠) جد حً(س) عند س=٥٠

حً(س) = ٣٠٠ – ١٢س، ومنه حً(٥٠) = –٣٠٠

وبما أنَّ حً(٥٠) < ٠ إذن للاقتران ح قيمة عظمى محلية عند س = ٥٠، وبالتعويض في المعادلة (٢)

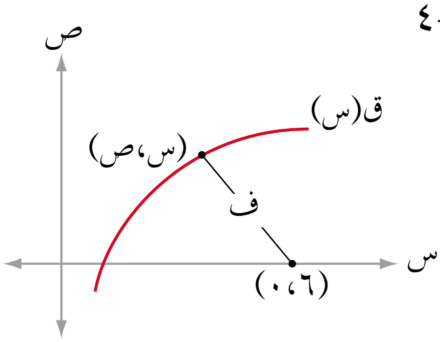
تجد أنَّ ص=٥٠، أي أنَّ حجم متوازي المستطيلات يكون أكبر ما يمكن عندما تكون س=٥٠ سم، ص =٥٠سم.

## تدريب ٢

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

## مثال ٣

جد النقطة الواقعة في الربع الأول على منحنى $\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$ التي تكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (٦، ٠)




الشكل (٣-٢١)

**الحل**

افرض النقطة (س،ص) تقع على منحنى ق وأنَّ ف البُعد بين النقطة (س،ص) والنقطة (٦، ٠).انظر الشكل (٣-٢١).

المعطيات:

$\text{ق(س)} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$ ، إحداثيا النقطة (٦، ٠).

المطلوب: إيجاد إحداثيي النقطة (س،ص) لتكون المسافة ف أقل ما يمكن.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات؛ بحيث تصبح المسافة ف المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد، كالآتي:

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}-٦)^{٢} + (\text{ص}-٠)^{٢}} \text{ ، ص} = \sqrt{\text{س}^{٢} - ٤}$$

$$\text{ف} = \sqrt{(\text{س}-٦)^{٢} + \text{ص}^{٢}} = \sqrt{٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٣٢} \quad \text{.........(١)}$$

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ف؛ اشتق المعادلة (١) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$\text{ف}َ = \frac{٤\text{س} - ١٢}{٢ \times \sqrt{٢\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} + ٣٢}} \text{ ، ف}َ = ٠$$

ومنه: ٤س − ١٢ = ٠ ومنه س = ٣

الجدول (٣-١٣)

| | |
|---|---|
| ف(س) | ↗ ↘ |
| فَ(س) | + + + ׀ − − − |
| قيم س | ٣ |

وبدراسة إشارة ف في الجدول (٣-١٣) تجد أنَّ:

للاقتران ف قيمة صغرى محلية عند س=٣، ،بالتعويض تجد أنَّ ص= $\sqrt{٥}$

أي أنَّ المسافة ف تكون أقل ما يمكن عندما تكون النقطة (س،ص) هي (٣، $\sqrt{٥}$ )

## تدريب ٣

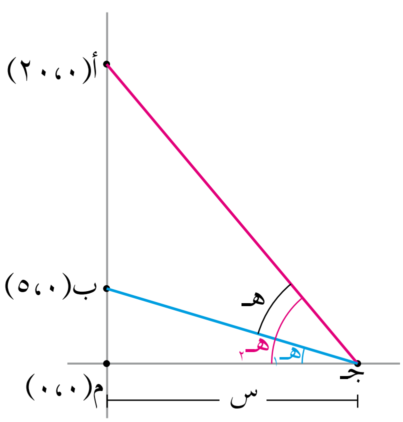
يقع المستطيل أ ب جـ د في المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س)=س$^{٢}$ − ٤س + ٤ والمستقيم ص= ٤ بحيث يقع رأساه أ، ب على منحنى ق، ورأساه الآخران جـ، د على المستقيم ص= ٤، جد بُعدَيْ المستطيل أ ب جـ د لتكون مساحته أكبر ما يمكن.

## مثال ٤

أ (٠،٢٠)، ب (٠،٥) نقطتان ثابتتان، جـ نقطة تتحرك على محور السينات الموجب، جد أكبر قياس ممكن للزاوية أ جـ ب.

### الحل

افرض أنَّ (هـ) قياس الزاوية أ جـ ب، (هـ$_{١}$) قياس الزاوية ب جـ م، (هـ$_{٢}$) قياس الزاوية أ جـ م، طول $\overline{\text{جـ م}}$ = س كما في الشكل (٣–٢٢).



الشكل (٣–٢٢)

المعطيات: أ (٠،٢٠)، ب (٠،٥)، جـ نقطة تتحرك على محور السينات.

المطلوب: إيجاد أكبر قياس ممكن للزاوية أ جـ ب.

اكتب المعادلة التي تربط المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى، اقترانًا لمتغير واحد.

$$\text{ظا هـ} = \text{ظا}(\text{هـ}_{٢} - \text{هـ}_{١}) = \frac{\text{ظاهـ}_{٢} - \text{ظاهـ}_{١}}{١ + \text{ظاهـ}_{٢}\ \text{ظاهـ}_{١}}$$

$$\text{ظا هـ}_{١} = \frac{٥}{\text{س}} \text{ ، ظا هـ}_{٢} = \frac{٢٠}{\text{س}} \text{ ومنه}$$

$$\text{ظا هـ} = \frac{\frac{٢٠}{\text{س}} - \frac{٥}{\text{س}}}{١ + \frac{٢٠}{\text{س}} \times \frac{٥}{\text{س}}} = \frac{\frac{١٥}{\text{س}}}{\frac{\text{س}^{٢}+١٠٠}{\text{س}^{٢}}} = \frac{١٥\text{س}}{\text{س}^{٢}+١٠٠}$$ وباشتقاق الطرفين تجد أنَّ:

$$\text{قا}^{٢}\text{هـ} \times \text{هـَ} = \frac{(\text{س}^{٢}+١٠٠)(١٥) - ١٥\text{س}\times٢\text{س}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}} = \frac{١٥\text{س}^{٢}+١٥٠٠-٣٠\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}} = \frac{١٥٠٠-١٥\text{س}^{٢}}{(\text{س}^{٢}+١٠٠)^{٢}}$$

هـَ = ٠ عندما ١٥٠٠ − ١٥ س$^{٢}$ = ٠ ومنه س = ١٠

وبدراسة إشارة هـَ في الجدول (٣−١٤) تجد أنَّ:

الجدول (٣−١٤)

| | | | |
|---|---|---|---|
| هـ | ↗ | | ↘ |
| هـَ | + + + | | − − − |
| قيم س | | ١٠ | |

أي أنَّ أكبر قياس ممكن للزاوية (هـ) عندما س = ١٠ وحدات

ومنه: ظاهـ = $\frac{١٥٠}{٢٠٠}$ = $\frac{٣}{٤}$

إذن هـ = ٣٦,٨٧°

## تدريب ٤

نحتاج إلى قص لوح خشبي، على شكل مثلث متطابق الضلعين، طول كلٍّ منهما ٨سم، إذا كانت زاوية رأس المثلث هـ متغيرة، فجد قياس الزاوية هـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.

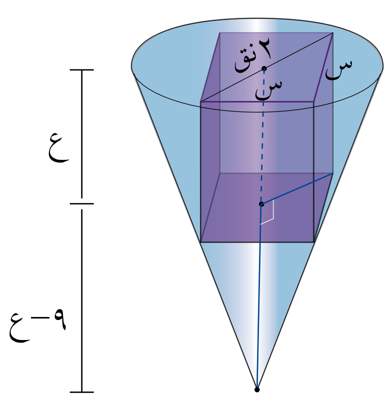
## مثال ٥

جد أكبر حجم لموشور رباعي قائم قاعدته مربعة الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦)سم وارتفاعه (٩)سم.

### الحل

المعطيات: طول نصف قطر قاعدة المخروط (٦)سم، وارتفاعه (٩)سم.

المطلوب: إيجاد أكبر حجم لموشور رباعي قائم، قاعدته مربعة الشكل، يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم طول نصف قطره ٦سم وارتفاعه ٩سم.




الشكل (٣−٢٣)

افرض أنَّ طول قطر قاعدة الموشور (٢نق)، وارتفاعه (ع) وطول ضلع قاعدته (س).

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد. انظر الشكل (٣−٢٣).

ح = س$^{٢}$ ع .....(١)

ولإيجاد أحد المتغيرين س، ع بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس، وتشابه المثلثات من خلال

معطيات المسألة: أي أنَّ:

$(٢نق)^٢ = س^٢ + س^٢$ ومنه $٤نق^٢ = ٢س^٢$ أي أنَّ:

$٢نق^٢ = س^٢$ ..... (٢)

ومن التشابة تجد $\frac{نق}{٩-ع} = \frac{٦}{٩}$ ومنه $٣نق = ١٨ - ٢ع$

$ع = \frac{١}{٢}(١٨-٣نق)$ ..... (٣)

وبتعويض كلٍّ من (٢) و(٣) في المعادلة (١) تجد أنَّ

$ح(نق) = ١٨نق^٢ - ٣نق^٣$ ..... (٤) وهو اقتران بمتغير واحد.

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ح، اشتق المعادلة (٤) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$حَ(نق) = ٣٦نق - ٩نق^٢$

وتكون حَ (نق) = ٠، عندما $٣٦نق - ٩نق^٢ = ٠$ أي عندما نق = ٤ ، نق = ٠ (تهمل)

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة عظمى محلية جد حً(نق)

$حً(نق) = ٣٦ - ١٨نق$

ومنه $حً(٤) = ٣٦ - ٧٢ = -٣٦ > ٠$

إذن للاقتران قيمة عظمى محلية عند نق = ٤. لماذا؟

أي أنَّ أكبر حجم للموشور عندما تكون نق = ٤

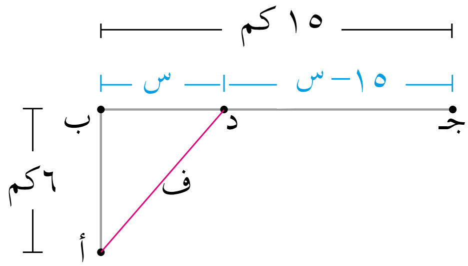
ومنه يكون حجم موشور $ح(٤) = ١٨ \times ١٦ - ٣ \times ٦٤ = ٩٦سم^٣$.

**تدريب ٥**

جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته ٦ سم، وارتفاعه ١٢ سم، بحيث يقع رأس المخروط الداخلي على مركز قاعدة المخروط الخارجي.

## مثال ٦

يقف رجل عند النقطة أ التي تبعد ٦كم عن النقطة ب، يريد أن يصل إلى النقطة جـ ، مرورًا بالنقطة د ، إذا كان يسير بسرعة ٣كم/ساعة عند الانتقال من النقطة أ إلى النقطة د، ويسير بسرعة ٦كم/ساعة عند الانتقال من النقطة د إلى النقطة جـ ، فحدِّد موقع النقطة د بحيث يصل في أقصر وقت ممكن، علمًا بأنَّ البُعد بين النقطة ب والنقطة جـ (١٥) كم. انظر الشكل (٣-٢٤).



الشكل (٣-٢٤)

**الحل**

المعطيات: أ ب = ٦كم، ب جـ = ١٥كم

سرعة الرجل عند الانتقال من أ إلى د = ٣كم/ساعة

سرعة الرجل عند الانتقال من د إلى جـ = ٦كم/ساعة

المطلوب: تعيين موقع النقطة (د) الذي يجعل الرجل يصل إلى النقطة (جـ) مرورًا بالنقطة (د) بأقصر وقت.

اكتب المعادلة التي تربط بين المتغيرات بحيث تصبح الكمية المطلوب إيجاد قيمتها القصوى اقترانًا لمتغير واحد.

$$\text{الزمن} = \frac{\text{المسافة}}{\text{السرعة}}$$

$$ن = \frac{ف}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦} \quad \text{.............} (١)$$

ولإيجاد أحد المتغيرين س أو ف بدلالة الآخر استخدم نظرية فيثاغورس من خلال معطيات المسألة؛ أي أنَّ:

$$ف^٢ = س^٢ + ٣٦ \text{ ، ومنه } ف = \sqrt{س^٢ + ٣٦} \quad \text{.............} (٢)$$

وبالتعويض في المعادلة (١) نجد أنَّ:

$$ن(س) = \frac{\sqrt{س^٢ + ٣٦}}{٣} + \frac{١٥ - س}{٦} \quad \text{.............} (٣)$$ وهو اقتران بمتغير واحد

ولإيجاد القيم القصوى المطلوبة للاقتران ن اشتق المعادلة (٣) وتحقق من ذلك كما يأتي:

$$\text{ن}'(\text{س}) = \frac{١}{٣}\left(\frac{\cancel{٢}\,\text{س}}{\cancel{٢}\sqrt{\text{س}^٢ + ٣٦}} - \frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٣} \times \frac{٢\,\text{س} - \sqrt{\text{س}^٢ + ٣٦}}{٢\sqrt{\text{س}^٢ + ٣٦}}$$

وتكون نَ (س)= ٠ عندما ٢ س= $\sqrt{\text{س}^٢ + ٣٦}$ ومنه ٣س$^٢$=٣٦ أي عندما س= ٢$\sqrt{٣}$

ولاختبار أنَّ للاقتران قيمة صغرى محلية ندرس إشارة ن في الجدول (٣–١٥) تجد أنَّ:

للاقتران قيمة صغرى محلية عند س = ٢$\sqrt{٣}$

أي أنَّ النقطة د تبعد عن ب بمقدار ٢$\sqrt{٣}$ كم

الجدول (٣–١٥)

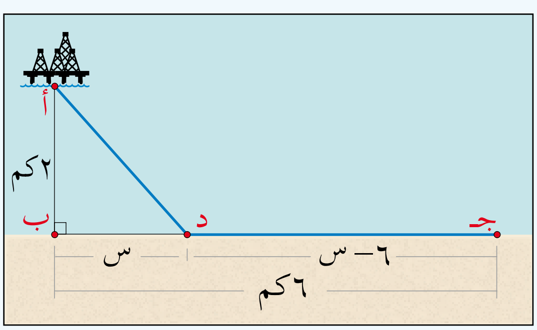
| | | | |
|---|---|---|---|
| ن(س) | ↘ | | ↗ |
| نَ(س) | − − − | | + + + |
| س | | ٢$\sqrt{٣}$ | |

## تدريب ٦

يقع حقل نفط في البحر عند النقطة أ التي تبعد ٢كم عن أقرب نقطة ب على الساحل، وأردنا أن نضخَّ البترول من الحقل إلى المصفاة التي تقع عند النقطة جـ على الساحل، وتبعد ٦كم من ب وذلك بواسطة أنابيب في البحر على خط مستقيم حتى النقطة د على الساحل، ثم بواسطة أنابيب على اليابسة على خط مستقيم من د إلى جـ، على فرض أنَّ الأنابيب في البحر وفي اليابسة في مستوى واحد، إذا كانت تكلفة الأنابيب تحت سطح البحر ٥٠٠٠٠٠ دينار لكلِّ كيلومتر وعلى اليابسة ٣٠٠٠٠٠ دينار لكل كيلومتر، فأجب عما يأتي:

١) أين يجب أن تكون د لتحقق أقل تكلفة ممكنة؟

٢) أين يجب أن تكون د لتحقق أكبر تكلفة ممكنة؟




الشكل (٣–٢٥)

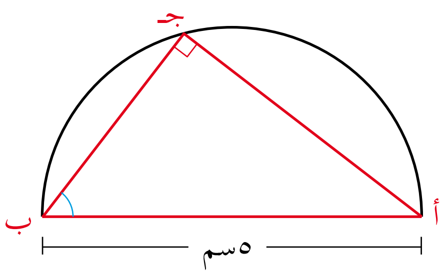
١) جد العدد الذي ينتمي للفترة $[\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢}]$ الذي يجعل ناتج جمع العدد ومقلوبه أكبر ما يمكن.

٢) وعاء أسطواني الشكل مفتوح من الأعلى، حجمه $١٠٠٠\pi$ سم$^{٣}$، جد أقل مساحة ممكنة من الصفيح لتصنيعه.

٣) جد إحداثيي النقطة أ(س،ص) الواقعة على منحنى العلاقة ص= س$^{٢}$ التي بُعدها عن النقطة ب(١٨ ، ٠) أقل ما يمكن.

٤) جد معادلة المستقيم المارّ بالنقطة (٣،٤) ويصنع مع المحورين الإحداثيين الموجبين مثلثًا مساحته أقل ما يمكن.

٥) يمثل الشكل (٣-٢٦) نصف دائرة طول قطرها أب(٥سم)، بدأت النقطة جـ الحركة على الدائرة من النقطة ب باتجاه عقارب الساعة لترسم مع القطر مثلثًا جد قياس الزاوية أ ب جـ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن.



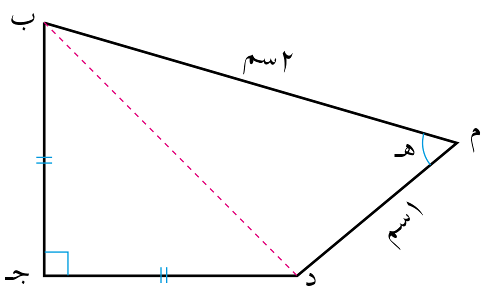
الشكل (٣-٢٦)

٦) جد أكبر مساحة ممكنة لمستطيل يمكن رسمه داخل دائرة طول نصف قطرها ٤سم بحيث تنطبق قاعدته على قطر الدائرة ورأساه الآخران على الدائرة.

٧) قطاع دائري قياس زاويته المركزية هـ بالتقدير الدائري ، وطول نصف قطر دائرته ٤ وحدات، حُوِّلَ إلى مخروط دائري قائم، طول نصف قطر قاعدته نق، وارتفاعه ع. جد قيمة هـ التي تجعل للمخروط الناتج أكبر حجم ممكن.

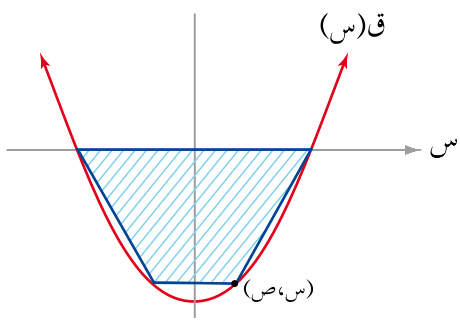
٨) مصنع للأجهزة الكهربائية ينتج س جهازًا سنويًّا يبيع كل جهاز بسعر (٢٠٠ - ٠,٠١ س) دينار، فإذا كان تكلفة إنتاج هذه الأجهزة (٥٠س+٢٠) دينار، فَكم جهازًا ينتج المصنع لتحقيق أكبر ربح ممكن سنويًّا ؟

٩) معتمدًا الشكل (٣–٢٧) الذي يمثل الشكل الرباعي م ب جـ د ، الذي فيه الضلع $\overline{\text{م ب}}$ ثابت وطوله ٢سم وفيه $\overline{\text{م د}}$ ثابت طوله ١سم، إلا أنَّ وضعه متحول، يمكنه أن يدور في مستوى حول النقطة م، أما الزاوية دجـ ب فهي قائمة ، والضلعان $\overline{\text{جـ د}}$ ، $\overline{\text{جـ ب}}$ متطابقان دومًا. جد قياس الزاوية(هـ) التي تجعل مساحة الشكل الرباعي عندها أكبر ما يمكن.

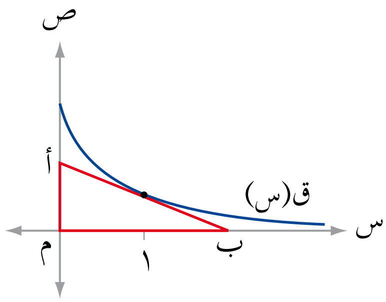


الشكل (٣–٢٧)

١٠) جد أكبر مساحة ممكنة لشبه منحرف يمكن رسمه تحت محور السينات بحيث تكون إحدى قاعدتيه على محور السينات ورأساه الآخران على منحنى الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ – ٤ ، انظر الشكل (٣–٢٨).



الشكل (٣–٢٨)



الشكل (٣-٢٩)

١) معتمـدًا الشكل (٣-٢٩)، الذي فيه المثلث أ م ب الـــذي ضـــلعـه $\overline{\text{أب}}$ يمس منحنـى الاقـتران ق(س) $= \frac{\text{جـ}}{\text{س}+١}$ عند (١، ق(١))، جد قيمة الثابت جـ التي تجعل مسـاحة الـمثلث تـساوي $\frac{٩}{٤}$ وحدة مربعة.

٢) يتحرك جُسيم على خط مستقيم بحيث إنَّ بُعده عن نقطة الأصل بالأمتار بَعد ن ثانية معطى بالعلاقة ف(ن)$= \frac{\text{ن}}{٢} -$ جا$^٢$ ن، ن $\in [٠، \pi]$، جد تسارع الجُسيم في اللحظة التي تنعدم فيها سرعته.

٣) إذا كان ق(س) $= \sqrt[٣]{\text{س}^٣ - ٢٧\text{س}}$ ، س $\in$ ح، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق نقط حرجة.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى مبينًا نوعها.

٤) عيِّن قاعدة الاقتران ق(س) = أ س$^٣$ + ب س$^٢$ + جـ س + د ، حيث:

أ ، ب ، جـ ، د أعداد حقيقية ثابتة، ويمر منحنى الاقتران ق بالنقطة (٠، ٥) ومعادلة المماس لمنحناه عند النقطة (١، ق(١)) هي: ٩س + ص-٩ = ٠، ولمنحناه نقطة انعطاف عند س = ٢.

٥) يمثل الشكل (٣-٣٠) منحنى المشتقة الأولى لكثير الحدود ق(س) جد:

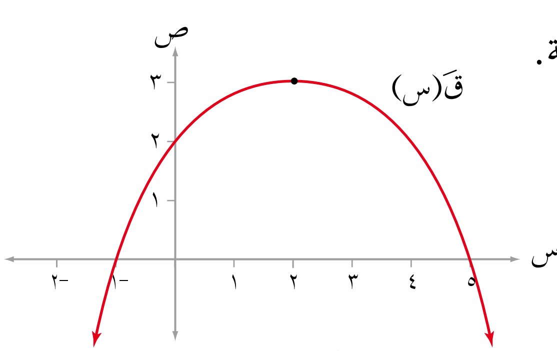
أ ) النقط الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران قيم قصوى محلية.

د ) فترات التقعر لمنحنى ق.

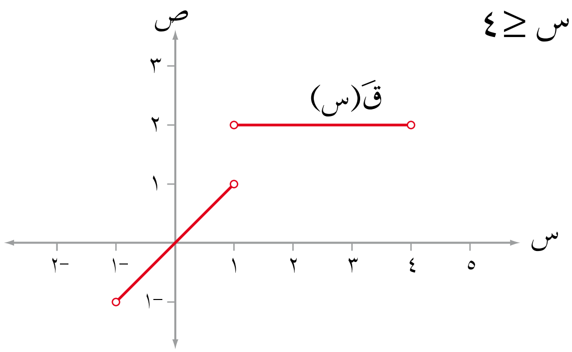
هـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران نقطة انعطاف.



الشكل (٣-٣٠)

٦) إذا كان الاقتران ق(س) متصل على [ -١ ، ٤ ] ،

$$\text{وكان ق(س)} = \begin{cases} \text{جـ س}^{٢} + \text{ء س} + \text{هـ} & ، \; -١ \le \text{س} < ١ \\ \text{أ س} + \text{ب} & ، \; ١ \le \text{س} \le ٤ \end{cases}$$



الشكل (٣-٣١)

ومُثِّلَ منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق كما في الشكل (٣-٣١)، فجد كلًّا مما يلي:

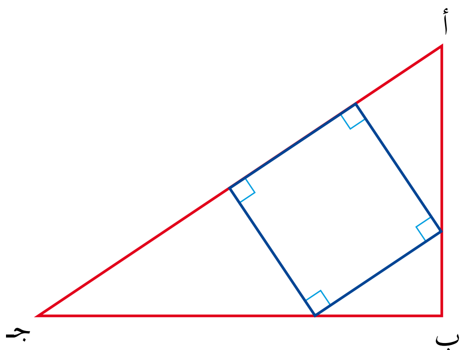
أ ) مجموعة قيم س الحرجة للاقتران ق.

ب) فترات التزايد، وفترات التناقص للاقتران ق.

جـ) قيم س التي يكون عندها للاقتران ق قيم قصوى محلية.

د ) قيم كلٍّ من الثوابت أ، ب، جـ ، د، هـ ، علمًا بأنَّ ق(-١)=٢ ، ق(٤)=٨

٧) يمثل الشكل (٣-٣٢) مثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب فيه أ ب= ٦سم، ب جـ= ٨سم، وبداخله مستطيل يقع رأسان من رؤوسه على وتر المثلث والرأسان الآخران يقع كلٌّ منهما على ضلعي القائمة. جد أبعاد المستطيل التي تجعل مساحته أكبر ما يمكن.



الشكل (٣-٣٢)

٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، يلي كل فقرة (٤) بدائل، واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح :-

(١) تتحرك نقطة على خط مستقيم بحيث إنَّ المسافة (ف) بالأمتار التي تقطعها في زمن قدره (ن) ثانية هي: ف(ن) =٦ن$^{٢}$- ن$^{٣}$+ ١٣، المسافة ف عندما يصبح التسارع صفرًا هي:

| | |
|---|---|
| أ ) ١٤م | ب) ١٨ م |
| جـ) ٢٩ م | د ) ٣٤ م |

(٢) معدل تغير حجم كرة بالنسبة إلى طول نصف قطرها عندما يكون طول نصف قطرها ٥سم يساوي:

| | |
|---|---|
| أ ) ١٠٠سم$^{٣}$/سم | ب) ٤ π سم$^{٣}$/سم |
| جـ) ٢٠ π سم$^{٣}$/سم | د ) ١٠٠πسم$^{٣}$/سم |

(٣) وعاء على شكل مخروط دائري قائم رأسه إلى أسفل، ارتفاعه ١٦سم، وطول نصف قطر قاعدته ٤سم، صُبَّ الماء فيه بمعدل ٢ π سم$^{٣}$/ث، فإنَّ معدل تغير ارتفاع الماء فيه في اللحظة التي يكون ارتفاع الماء ٨سم يساوي:

أ ) $\frac{١}{٢}$ سم/ث          ب) ٢ سم/ث

جـ) $\frac{١}{٨}$ سم/ث          د ) $\frac{١}{٢\pi}$ سم/ث

(٤) إذا كان ق(س)= ١٢س + ٦(م − ٢)س$^{٢}$ فإنَّ قيم م التي تجعل منحنى الاقتران ق مقعرًا للأسفل:

أ ) (−٢ ، ٢)          ب) (− ∞ ، −٢)

جـ) (٢ ، ∞)          د ) (− ∞ ، ٢]

(٥) إذا كان لمنحنى الاقتران ق(س) = جا ٤س نقطة انعطاف عند س = $\frac{\pi}{٤}$ فإنَّ ميل المماس عندها يساوي:

أ ) −٤          ب) ٤

جـ) −٢          د ) −١

(٦) إذا كان ق(س) = $\frac{س^{٢} - ٢س + ١}{س^{٢}}$ فإنَّ منحنى الاقتران ق متناقص على الفترة:

أ ) (− ∞ ، ٠)          ب) (١، ∞)

جـ) [ ٠ ، ١]          د ) (٠ ، ١]

(٧) الشكل (٣−٣٣) يمثل منحنى قً (س) للاقتران ق المعرف على ح،

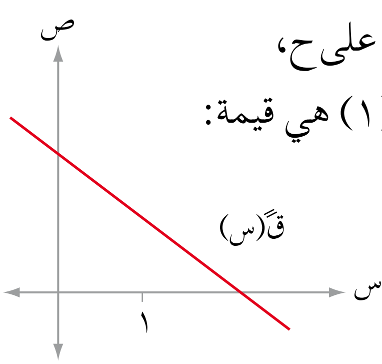
إذا كان للاقتران ق نقطة حرجة عند (١ ، ق(١))، فإنَّ ق(١) هي قيمة:

أ ) عظمى محلية

ب) عظمى مطلقة

جـ) صغرى مطلقة

د ) صغرى محلية



الشكل (٣−٣٣)

(٨) إذا كان ق(س)= $\sqrt[٣]{س^{٢}}$ : س ∈[−١ ، ١] ، فإنَّ إحداثيَّي النقطة الحرجة للاقتران ق هي :

أ ) (−١،١)          ب) (١،١)

جـ) (٠،٠)          د ) (٠،١)

(٩) يُراد صنع علبة مفتوحة من الأعلى من قطعة كرتون مستطيلة الشكل أبعادها ١٦سم، ٣٠سم وذلك بقص مربعات متساوية من زواياها الأربع طول كلٍّ منها (س) وحدة ، ثم طيّ الجوانب للأعلى، ما قيمة س التي تجعل حجم العلبة أكبر ما يمكن؟

أ ) ١٢سم　　　ب) $\frac{١٠}{٣}$ سم

جـ) ١٠ سم　　　د ) ٨سم

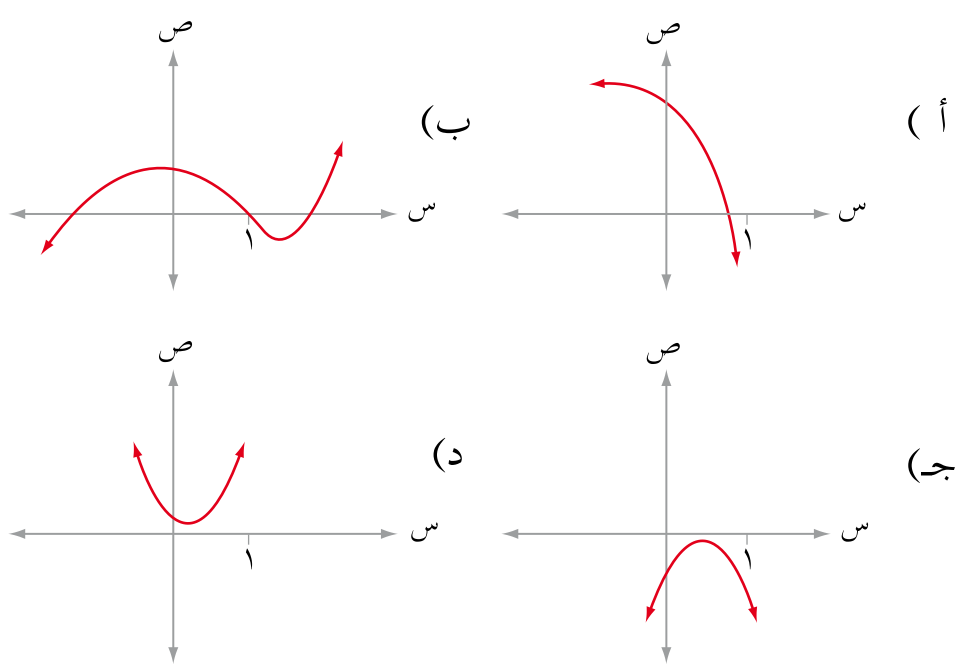
(١٠) إذا كان ق(س)= جتاس – جاس: س ∈[٠، π] فإنَّ قيمة س التي يكون للاقتران عندها قيمة صغرى مطلقة هي:

أ ) ٠　　　ب) $\frac{\pi}{٤}$

جـ) $\frac{\pi}{٢}$　　　د ) $\frac{٣\pi}{٤}$

*(١١) أي المنحنيات في الشكل (٣-٣٤) يمثل رسم الاقتران ق الذي فيه قَ (٠) > ٠،

قَ (١) < ٠ ، قً(س) سالبة دائمًا:




الشكل (٣-٣٤)

* السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

# الفصل الدراسي الثاني

الوحدة الرابعة

٤

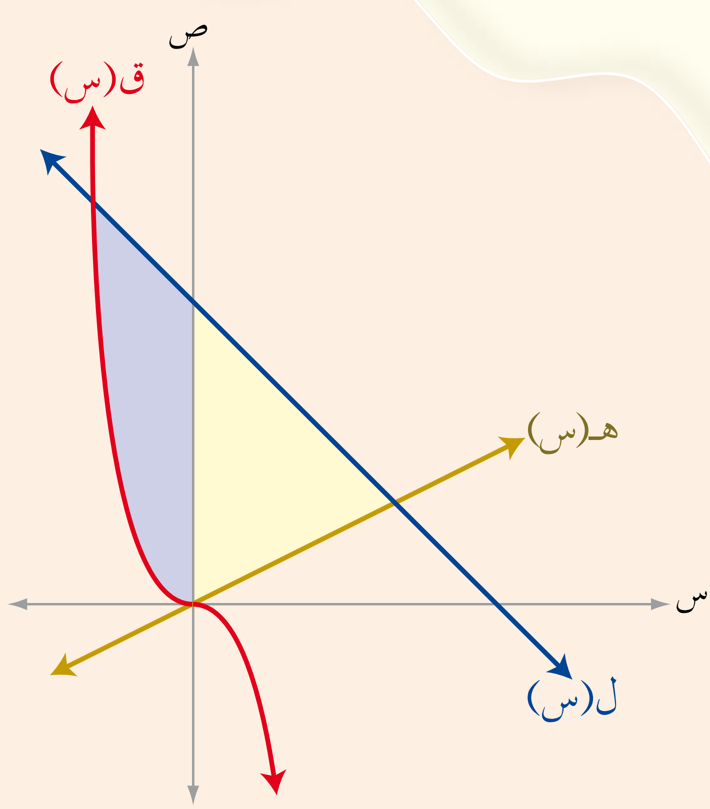
# التكامل وتطبيقاته

## Integration and its Applications

تعد المشتقة و التكامل المحدود أهم موضوعين في علم التفاضل والتكامل ، ويدخل هذا العلم في العديد من التطبيقات في الهندسة والعلوم المختلفة حيث تعالج المشتقة إيجاد ميل المماس وتعريف السرعة والتسارع، وقد سبق لك دراسة هذا الموضوع وتعرفت تطبيقاته، بينما يعالج التكامل المحدود إيجاد مساحات مناطق محدودة بمنحنيات يصعب حسابها بالقوانين العادية ، وهذا أحد تطبيقات التكامل المتعددة في الرياضيات والعلوم الأخرى. وهناك ارتباط وثيق بين المشتقة والتكامل ستتعرفه في هذه الوحدة.

**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- تَعرُّف مفهوم معكوس المشتقة لاقتران ما ، وإيجاده.
- استخدام رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.
- إيجاد التكامل غير المحدود لاقترانات كثيرات حدود ، ومثلثية ، وأسية ، ونسبية .
- تَعرُّف مفهوم التكامل المحدود ، وإيجاد قيمته.
- تَعرُّف قواعد التكامل.
- توظيف قواعد التكامل في إيجاد تكاملات معطاة.
- إيجاد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي وتكامله.
- إيجاد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.
- استخدام عدة طرق لإجراء التكامل مثل التعويض، والأجزاء، والكسور الجزئية.
- استخدام التكامل لإيجاد قيمة المساحة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.
- حَلِّ معادلات تفاضلية.



# الفصل الأول

# التكامل

# Integration

**النتاجات**

- تتعرف معكوس المشتقة للاقتران المتصل.
- تستخدم رمز التكامل للتعبير عن عكس المشتقة.
- تتعرف قواعد التكامل غير المحدود، وتحسبه لاقترانات كثيرات الحدود ، واقترانات مثلثية وأسية ونسبية.
- تتعرف التكامل المحدود على الفترة [ أ ، ب ]، وخصائصه، وتحسبه لاقترانات معطاة.
- تجد مشتقة اقتران اللوغاريتم الطبيعي.
- تجد مشتقة الاقتران الأسي الطبيعي وتكامله.

## أولًا معكوس المشتقة Antiderivative

إذا كان ق(س) = ٣س$^{٢}$، فجد الاقتران الذي مشتقته ق(س).

ستجد أنَّ هناك عددًا لانهائيًا من الاقترانات التي مشتقتها ٣س$^{٢}$ مثل :

س$^{٣}$ ، س$^{٣}$+١ ، س$^{٣}$− $\frac{١}{٢}$ ، س$^{٣}$+ $\sqrt{٣}$ ... إلخ

ويمكن كتابة هذه الاقترانات على الصورة م (س) = س$^{٣}$ + جـ ، حيث جـ عدد ثابت، يسمى الاقتران م(س) **معكوسًا لمشتقة الاقتران ق**.

حيث مَ (س) = ق(س)

**تعريف**

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على الفترة [ أ ، ب ] فإنَّ م(س) يسمى معكوسًا لمشتقة الاقتران ق(س) إذا كان مَ (س) = ق(س) لكل س ∋ ( أ ، ب ).

## مثال ١

بيّن أنَّ الاقتران م (س) = س$^{٥}$ + ٤س$^{٢}$ + ٢ هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = ٥س$^{٤}$ + ٨س

**الحل**

ق(س) اقتران متصل على ح لأنَّه كثير حدود.

مَ (س) = ٥س$^{٤}$ + ٨س = ق(س)

∴ م (س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

### تدريب ١

بيّن أنّ الاقتران م (س) = س$^{٤}$– جاس – $\frac{١}{٣}$ ، هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = ٤س$^{٣}$ – جتاس

### نشاط

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات المعطاة في الجدول، ثم أكمل الجدول:

| الاقتران | معكوس المشتقة | الفرق |
|---|---|---|
| ق(س) = ٢س | م$_{١}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ........... |
| | م$_{٢}$(س) = ........... | م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |
| | م$_{٣}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |
| ل(س) = ٣س$^{٢}$ | م$_{١}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ........... |
| | م$_{٢}$(س) = ........... | م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |
| | م$_{٣}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |
| هـ(س) = قا$^{٢}$س | م$_{١}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٢}$(س) = ........... |
| | م$_{٢}$(س) = ........... | م$_{٢}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |
| | م$_{٣}$(س) = ........... | م$_{١}$ – م$_{٣}$(س) = ........... |

قارن إجابتك مع إجابات زملائك . ماذا تستنتج؟

لابد أنَّك لاحظت أنَّ الفرق بيْن أيِّ معكوسين لمشتقة اقتران معين يساوي ثابتًا.

## مثال ٢

إذا كان الاقترانان م(س) ، هـ (س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س)،
وكان ل(س) = م(س) – هـ(س) ، فجد لَ(٤) .

**الحل**

الاقترانان م ، هـ معكوسان لمشتقة الاقتران ق

إذن م(س) – هـ(س) = جـ ( ثابت ) ، ومنه ل(س) = جـ

∴ لَ(س) = صفرًا ، لَ(٤) = صفرًا

حُلّ مثال (٢) بطريقة أخرى .

### تدريب ٢

إذا كان الاقترانان م(س) ، ل(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق(س) ، وكان ل(س) = ٣م(س) – ٥هـ(س)، فجد لَ(س) بدلالة ق(س).

## مثال ٣

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = جاس　　　٢) ق(س) = قاس ظاس　　　٣) ق(س) = ٩س$^{٨}$

**الحل**

١) م(س) = – جتاس + جـ　　　٢) م(س) = قاس + جـ　　　٣) م(س) = س$^{٩}$ +جـ

يسمى أيُّ معكوس للمشتقة: **بالتكامل غير المحدود** للاقتران ق، وهذا يقودنا إلى التعريف الآتي:

### تعريف

إذا كان م معكوسًا لمشتقة الاقتران ق على الفترة [ أ ، ب] فإنَّ الصورة العامة لقاعدة أي معكوسٍ لمشتقة الاقتران ق هي : م(س) + جـ ، حيث جـ ثابت وذلك؛ لأنَّ:

$$\frac{د}{دس}\left( م(س) + جـ \right) = مَ(س) = ق(س)$$

ويسمى أي معكوس للمشتقة: بالتكامل غير المحدود للاقتران ق(س) بالنسبة إلى س ويرمز له على النحو الآتي : $\int$ ق(س) دس

ويُقرأ: تكامل ق(س) دال س ويعني تكامل الاقتران ق بالنسبة إلى المتغير س .

## مثال ٤

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int$ ٥س$^{٤}$ ءس　　　　　　٢) $\int$ قتا$^{٢}$س ءس

**الحل**

١) $\int$ ٥س$^{٤}$ ءس = س$^{٥}$ + جـ　　　　لماذا؟

٢) $\int$ قتا$^{٢}$س ءس = − ظتاس + جـ　　　　لماذا؟

تعرّفت أنَّ الصورة العامة لقاعدة أي معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

هي م(س) + جـ ، حيث مَ (س) = ق(س)

$\int$ ق(س) ءس = م(س) + جـ ........... (١)

وعليه فإنَّ $\int$ مَ (س) ءس = م(س) + جـ

وباشتقاق الطرفين في (١) ينتج أنَّ

$\frac{ء}{ءس}$ $\int$ ق(س) ءس = ( م(س) + جـ)´ = مَ (س)

وبما أنَّ مَ (س) = ق(س)

إذن $\frac{ء}{ءس}$ $\int$ ق(س) ءس = ق(س)

## مثال ٥

إذا كان $\int$ ق(س) ءس = س$^{٢}$− جتاس + ٢ ، فجد ق(س) ، قَ(س)

**الحل**

$\int$ ق(س) ءس = س$^{٢}$ − جتاس + ٢

ق(س) = ٢س + جـاس　　　　اشتقاق الطرفين

قَ(س) = ٢ + جتاس　　　　اشتقاق الطرفين

## تدريب ٣

إذا كان ق اقترانًا متصلًا على مجاله ، وكان $\int ق(س)\ جا\ \frac{٣\pi}{٢}\ ءس = ١ + س^{٣}$ ، فجد ق (س)

## مثال ٦

إذا كان ق اقترانًا متصلاً على ح ،

وكان $\int \left( ق(س) + ٢ \right) ءس = س^{٣} + ب\ س^{٢} + ٩$ ، ق(١) = ٧ ، فجد قيمة الثابت ب .

**الحل**

$\int \left( ق(س) + ٢ \right) ءس = س^{٣} + ب\ س^{٢} + ٩$

ق(س) + ٢ = ٣س$^{٢}$ + ٢ب س   اشتقاق الطرفين

ق(١) + ٢ = ٣(١)$^{٢}$ + ٢ ب (١)   التعويض بقيمة س = ١

٧ + ٢ = ٣ + ٢ب

٩ = ٣ + ٢ب

٢ب = ٦ ، ومنه ب = ٣

## تدريب ٤

إذا كان $\int قَ(س)\ ءس = جا^{٢}س - أجتاس + ١$، قَ$\left(\frac{\pi}{٤}\right)$ = صفرًا،

فجد قيمة الثابت أ.

١ ) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = $\frac{س}{س+١}$ هو معكوس لمشتقة الاقتران

ق(س) = (س+١)$^{-٢}$ ، س ≠ −١

٢ ) بيّن أنَّ الاقتران م(س) = جا$^{٢}$س هو معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = جا٢س.

٣ ) إذا كان م(س) = س$^{٣}$ + ٥س$^{٢}$ − ٣س + جـ ، معكوسًا لمشتقة الاقتران ق، فجد ق( −٢ ).

٤ ) إذا كان م(س) = ٢س$^{٤}$ + $\sqrt{س^{٢} + ٣}$ معكوسًا لمشتقة الاقتران ق ، فجد ق(١).

٥ ) إذا كان ق(س) = ٣س$^{٢}$ فجد م معكوسًا لمشتقة الاقتران ق؛ علمًا بأنَّ م(٢) = ٥

٦ ) إذا كان الاقترانان م$_{١}$(س)، م$_{٢}$(س) معكوسين لمشتقة الاقتران ق وكان

م$_{١}$(س) = ٣س$^{٢}$ − ٢س + ٥ ، م$_{٢}$(٢) = ٤ فجد قاعدة م$_{٢}$(س) .

٧ ) إذا كان ص = $\int \sqrt[٥]{٣س^{٢} − ٤س + ١٢}$ ءس ، فجد $\left.\frac{ءص}{ءس}\right|_{س=-٢}$

٨ ) إذا كان $\int$ق(س) ءس = س$^{٣}$ − س$^{٢}$ + ٢س + ١ ، فجد قَ(− ٣).

٩ ) إذا كان $\int$ق(س) ءس = جاس − جتاس + ٣. فأثبت أنَّ ق( $\frac{\pi}{٢}$ ) − قَ( $\frac{\pi}{٢}$ )=٢

١٠) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

ب) ق(س) = قاس جتاس

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

د ) ق(س) = ٥ + ٥ ظا$^{٢}$س

١١) إذا كان م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق حيث ق(س)= ظتاس + ١، فجد مً ($\frac{\pi}{٤}$).

## ثانيًا التكامل غير المحدود Indefinite Integral

جد $\int \frac{\text{س}^{2} - \text{س}}{\sqrt{\text{س}} - 1} \, \text{دس}$

تعلمت سابقًا إيجاد التكامل لبعض الاقترانات واعتمدت على المشتقة لإيجاده ، وفي هذا الدرس ستتعرف بعض قواعد التكامل غير المحدود.

**قاعدة (١)**

$\int \text{أ} \, \text{دس} = \text{أ س} + \text{جـ}$ ، حيث أ ثابت ، جـ ثابت التكامل .

**مثال ١**

جد كلاًّ مما يأتي :

١) $\int -5 \, \text{دس}$ ٢) $\int \pi \, \text{دع}$

**الحل**

١) $\int -5 \, \text{دس} = -5\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \pi \, \text{دع} = \pi \, \text{ع} + \text{جـ}$

**تدريب ١**

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int \text{دس}$ ٢) $\int \frac{-1}{4} \, \text{دل}$

**قاعدة (٢)**

$\int \text{س}^{\text{ن}} \, \text{دس} = \frac{\text{س}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{جـ}$ ، ن $\neq -1$

## مثال ٢

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int \text{س}^{٦} \, \text{ءس}$ ٢) $\int \sqrt[٥]{\text{س}} \, \text{ءس}$ ٣) $\int \frac{١}{\text{س}^{٤}} \, \text{ءس}$

**الحل**

١) $\int \text{س}^{٦} \, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٦+١}}{٦+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

٢) $\int \sqrt[٥]{\text{س}} \, \text{ءس} = \int \text{س}^{\frac{١}{٥}} \, \text{ءس}$ لماذا؟

$= \frac{\text{س}^{\frac{١}{٥}+١}}{\frac{١}{٥}+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{\frac{٦}{٥}}}{\frac{٦}{٥}} + \text{جـ} = \frac{٥}{٦}\sqrt[٥]{\text{س}^{٦}} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{١}{\text{س}^{٤}} \, \text{ءس} = \int \text{س}^{-٤} \, \text{ءس}$

$= \frac{\text{س}^{-٤+١}}{-٤+١} + \text{جـ} = \frac{\text{س}^{-٣}}{-٣} + \text{جـ} = \frac{-١}{٣\text{س}^{٣}} + \text{جـ}$ لماذا؟

### تدريب ٢

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int ١٠ \, \text{ءس}$ ٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٧]{\text{س}^{٢}}} \, \text{ءس}$

### تعميم

خصائص التكامل غير المحدود:

١) $\int \text{أ ق(س)} \, \text{ءس} = \text{أ} \int \text{ق(س)} \, \text{ءس}$

٢) $\int \left(\text{ق(س)} + \text{ل(س)}\right) \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} + \int \text{ل(س)} \, \text{ءس}$

٣) $\int \left(\text{ق(س)} - \text{ل(س)}\right) \text{ءس} = \int \text{ق(س)} \, \text{ءس} - \int \text{ل(س)} \, \text{ءس}$

ويمكن تعميم خاصيتي الجمع والطرح لأكثر من اقترانين.

## مثال ٣

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (\text{٣س}^{٣} + \text{٥س} - \text{٤})\, \text{ءس}$ 　　٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{٢س} - \text{١٥}}{\text{س} - \text{٣}}\, \text{ءس}$ 　　٣) $\int \frac{\text{س} - \text{٥}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\, \text{ءس}$

**الحل**

١) $\int (\text{٣س}^{٣} + \text{٥س} - \text{٤})\, \text{ءس}$

$= \int \text{٣س}^{٣}\, \text{ءس} + \int \text{٥س}\, \text{ءس} - \int \text{٤}\, \text{ءس}$ 　　تطبيق خصائص التكامل

$= \frac{\text{٣س}^{٤}}{\text{٤}} + \frac{\text{٥س}^{٢}}{\text{٢}} - \text{٤س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{\text{س}^{٢} + \text{٢س} - \text{١٥}}{\text{س} - \text{٣}}\, \text{ءس} = \int \frac{(\text{س}+\text{٥})(\text{س}-\text{٣})}{\text{س}-\text{٣}}\, \text{ءس}$

$= \int (\text{س}+\text{٥})\, \text{ءس} = \frac{\text{س}^{٢}}{\text{٢}} + \text{٥س} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{س} - \text{٥}}{\sqrt[\text{٣}]{\text{س}}}\, \text{ءس} = \int (\text{س} - \text{٥})\text{س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}}\, \text{ءس} = \int (\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} - \text{٥س}^{\frac{-\text{١}}{\text{٣}}})\, \text{ءس}$

$= \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٣}}} - \text{٥} \times \frac{\text{٣}}{\text{٢}}\text{س}^{\frac{\text{٢}}{\text{٣}}} + \text{جـ} = \frac{\text{٣}}{\text{٥}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{٥}} - \frac{\text{١٥}}{\text{٢}}\sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{٢}} + \text{جـ}$

### فكر وناقش

هل $\int \text{س}\sqrt{\text{س}}\, \text{ءس} = \int \text{س}\, \text{ءس} \times \int \sqrt{\text{س}}\, \text{ءس}$ ؟ برّر إجابتك.

## مثال ٤

جد $\int \frac{\text{س}^{٣} - \text{٤س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}} - \text{٢}}\, \text{ءس}$

**الحل**

$\int \frac{\text{س}^{٣} - \text{٤س}^{٢}}{\sqrt{\text{س}} - \text{٢}}\, \text{ءس} = \int \frac{\text{س}^{٢}(\text{س} - \text{٤})}{\sqrt{\text{س}} - \text{٢}}\, \text{ءس}$ 　　إخراج $\text{س}^{٢}$ عاملًا مشتركًا

$= \int \frac{\text{س}^{٢}(\sqrt{\text{س}} - \text{٢})(\sqrt{\text{س}} + \text{٢})}{\sqrt{\text{س}} - \text{٢}}\, \text{ءس}$ 　　تحليل البسط فرقًا بين مربعين

$= \int (\text{س}^{\frac{\text{٥}}{\text{٢}}} + \text{٢س}^{٢})\, \text{ءس} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}\text{س}^{\frac{\text{٧}}{\text{٢}}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{٣} + \text{جـ} = \frac{\text{٢}}{\text{٧}}\sqrt{\text{س}^{٧}} + \frac{\text{٢}}{\text{٣}}\text{س}^{٣} + \text{جـ}$

**فكر وناقش**

حُلَّ مثال (٤) بطريقة أخرى.

## تدريب ٣

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - ٣}\, \text{ءس}$

٢) $\int \frac{(\text{س} - ٢)^{٣}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\, \text{ءس}$

**نشاط (١)**

أكمل الجدول الآتي :

| معكوس المشتقة م(س) | $\text{م}'(\text{س}) = \text{ق}(\text{س})$ | $\int \text{ق}(\text{س})\, \text{ءس}$ |
|---|---|---|
| $\text{م}(\text{س}) = \frac{(\text{س} - ٢)^{٣}}{٣} + ٢$ | $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س} - ٢)^{٢}$ | $\int (\text{س} - ٢)^{٢}\, \text{ءس} = \frac{(\text{س} - ٢)^{٣}}{٣} + \text{جـ}$ |
| $\text{م}(\text{س}) = \frac{(٢\text{س} + ٣)^{٦}}{١٢} - ٤$ | $\text{ق}(\text{س}) = (٢\text{س} + ٣)^{٥}$ | $\int (٢\text{س} + ٣)^{٥}\, \text{ءس} =$ ............. |
| $\text{م}(\text{س}) =$ ............ | $\text{ق}(\text{س}) = (٥\text{س} + ٤)^{٧}$ | $\int (٥\text{س} + ٧)^{٧}\, \text{ءس} = \frac{(٥\text{س} + ٤)^{٨}}{....\times ٥} + \text{جـ}$ |
| $\text{م}(\text{س}) =$ ............ | $\text{ق}(\text{س}) = (٣ - ٢\text{س})^{٤}$ | $\int (٣ - ٢\text{س})^{٤}\, \text{ءس} = \frac{(٣ - ٢\text{س})^{٥}}{....\times....} + \text{جـ}$ |

ماذا تلاحظ؟

**قاعدة (٣)**

$$\int (\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}}\, \text{ءس} = \frac{(\text{أس} + \text{ب})^{\text{ن}+١}}{\text{أ}(\text{ن} + ١)} + \text{جـ} \text{ ، ن} \neq -١ \text{، أ} \neq \text{صفرًا}$$

## مثال ٥

جد كلًّا مما يأتي :

١) $\int (٦ - ٥\text{س})^{٨}\, \text{ءس}$

٢) $\int \sqrt[٣]{٤\text{س} + ٢}\, \text{ءس}$

**الحل**

١) $\int (٦ - ٥\text{س})^{٨}\, \text{ءس} = \frac{(٦ - ٥\text{س})^{٨+١}}{(٨+١)\times(-٥)} + \text{جـ} = \frac{(٦ - ٥\text{س})^{٩}}{-٤٥} + \text{جـ}$

٢) $\int \sqrt[3]{٤س+٢}\ ءس = \int (٤س+٢)^{\frac{١}{٣}}\ ءس = \frac{(٤س+٢)^{\frac{٤}{٣}}}{٤\times\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} \sqrt[3]{(٤س+٢)^{٤}} + جـ$

**تدريب ٤**

جد كلًّا مما يأتي:

١) $\int \frac{٣}{(٧س+٥)^{٤}}\ ءس$ ٢) $\int س^{٤}(٥ - \frac{٣}{س})^{٤}\ ءس$

**نشاط (٢)**

أكمل الجدول الآتي :

| ق(س) | قَ(س) | $\int$ قَ(س) ءس |
|---|---|---|
| جاس | جتاس | $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ |
| جتاس | − جاس | $\int$ −جاس ءس = جتاس + جـ |
| ظاس | ........................ | ........................................................................ |
| ظتاس | ........................ | ........................................................................ |
| قاس | ........................ | ........................................................................ |
| قتاس | ........................ | ........................................................................ |

**قاعدة (٤)**

١) $\int$ جاس ءس = − جتاس + جـ

٢) $\int$ جتاس ءس = جاس + جـ

٣) $\int$ قا$^{٢}$س ءس = ظاس + جـ

٤) $\int$ قتا$^{٢}$س ءس = − ظتاس + جـ

٥) $\int$ قاس ظاس ءس = قاس + جـ

٦) $\int$ قتاس ظتاس ءس = − قتاس + جـ

## قاعدة (٥)

١) $\int$ جا(أس + ب) ءس = $\frac{-1}{أ}$ جتاس (أس + ب) + جـ

٢) $\int$ جتا(أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ جاس (أس + ب) + جـ

٣) $\int$ قا$^2$(أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ ظاس (أس + ب) + جـ

٤) $\int$ قتا$^2$(أس + ب) ءس = $\frac{-1}{أ}$ ظتاس (أس + ب) + جـ

٥) $\int$ قاس(أس + ب) ظاس (أس + ب) ءس = $\frac{1}{أ}$ قاس (أس + ب) + جـ

٦) $\int$ قتاس (أس + ب) ظتا (أس + ب) ءس = $\frac{-1}{أ}$ قتاس (أس + ب) + جـ

حيث أ، ب $\in$ ح، أ $\neq$ صفرًا

## مثال ٦

جد كلاًّ من التكاملات الآتية:

١) $\int$(جاس − ٤ جتاس + ٥ قتا$^2$س) ءس

٢) $\int$(جا٢س + جتا٣س) ءس

٣) $\int$(قا٣س ظا٣س + قا$^2$ ٥س) ءس

### الحل

١) $\int$(جاس − ٤ جتاس + ٥ قتا$^2$س ) ءس

= $\int$جاس ءس − $\int$٤ جتاس ءس + $\int$٥ قتا$^2$س ءس

= − جتاس − ٤ جاس − ٥ ظتاس + جـ

٢) $\int$(جا٢س + جتا٣س) ءس = $\int$جا٢س ءس + $\int$جتا٣س ءس

= $\frac{-1}{2}$ جتا٢س + $\frac{1}{3}$ جا٣س + جـ لماذا؟

٣) $\int$(قا٣س ظا٣س + قا$^2$ ٥س) ءس = $\int$ قا٣س ظا٣س ءس + $\int$ قا$^2$ ٥س ءس

= $\frac{1}{3}$ قا٣س + $\frac{1}{5}$ ظا٥س + جـ لماذا؟

## تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (\text{قتا}٤\text{س ظتا}٤\text{س} + \text{قتا}^{٢}\,٣\text{س})\,\text{ءس}$ ٢) $\int (\text{جتا}٤\text{س ظا}٤\text{س} + \frac{١}{(\text{جتا}^{٢}\,٦\text{س})})\,\text{ءس}$

## مثال ٧

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$ ٢) $\int \frac{١}{١ + \text{جتاس}}\,\text{ءس}$

**الحل**

١) $\int \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\,\text{ءس}$ لماذا؟

$= \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا}٢\text{س}) + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{١}{١ + \text{جتاس}}\,\text{ءس}$ اضرب كلًّا من البسط والمقام في مرافق المقام (١ – جتاس)

$= \int \frac{١}{١ + \text{جتاس}} \times \frac{١ - \text{جتاس}}{١ - \text{جتاس}}\,\text{ءس} = \int \frac{١ - \text{جتاس}}{١ - \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

$= \int \frac{١ - \text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس} - \int \frac{\text{جتاس}}{\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$ $\text{جا}^{٢}\text{س} + \text{جتا}^{٢}\text{س} = ١$

$= \int \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} - \int \text{قتاس ظتاس}\ \text{ءس}$ لماذا؟

$= -\,\text{ظتاس} + \text{قتاس} + \text{جـ}$

**فكر وناقش**

حُلَّ مثال (٧) فرع (٢) بطريقة أخرى.

## مثال ٨

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{ظا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$ ٢) $\int \text{جا}٥\text{س جتا}٣\text{س}\ \text{ءس}$

**الحل**

١) $\int$ ظا$^٢$س ءس = $\int$ (قا$^٢$س − ١) ءس        ١+ظا$^٢$س=قا$^٢$س

= ظا س − س + جـ

٢) $\int$ جا٥س جتا٣س ءس = $\int \frac{١}{٢}$(جا(٥س − ٣س)+ جا(٥س + ٣س)) ءس        لماذا؟

= $\int \frac{١}{٢}$ (جا٢س + جا٨س) ءس = $\frac{١}{٢}$ ( $\frac{-١}{٢}$ جتا٢س + $\frac{-١}{٨}$ جتا٨س) + جـ

= $\frac{-١}{٤}$ جتا٢س − $\frac{١}{١٦}$ جتا٨س + جـ

**تدريب ٦**

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ (قاس + ظاس )$^٢$ ءس

٢) $\int \frac{٣}{١ - جتا٢س}$ ءس

٣) $\int \frac{جتا٢س}{جا^٢س\ جتا^٢س}$ ءس

٤) $\int$ (جتاس − جاس )$^٢$ ءس

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int (س^٦ + \frac{٣}{س^٥} - \sqrt[٥]{س^٢})\, ءس$

ب) $\int (٥ + ٣ص)^٤\, ءص$

جـ) $\int \frac{س^٣ - ٨}{س - ٢}\, ءس$

د) $\int (٤س^٢ + ٢٠س + ٢٥)^٥\, ءس$

هـ) $\int \frac{(س+٣)^٢ - ٩}{س}\, ءس$

و) $\int (١ - س)(س - ١)^٥\, ءس$

ز) $\int س\sqrt[٣]{\frac{٥}{س^٣} - \frac{١}{س^٢}}\, ءس$

ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}\, ءس$

ط) $\int \sqrt[٣]{س}\,(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}})\, ءس$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}\, ءس$

٢) إذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثالثة؛ بحيث إنَّ قَ(س)=٣ س$^٢$ − ٢ ، وكانت النقطة (١،٠) تقع على منحناه. فجد قاعدة الاقتران ق.

٣) إذا كان قً(س)= $\frac{٦}{\sqrt{س}}$ ، ومنحنى الاقتران ق يمر بالنقطة (٤ ، ٠) ، وميل المماس عند هذه النقطة يساوي (١)، فجد قاعدة ق(س).

٤) إذا كان $\int (قَ(س) + ٢س)\, ءس = س^٣ + ب س^٢ + ١$ ، وكان قَ(١) = ٥، ق(٢) = ٧، فجد ق(−٢).

٥) إذا كان قً(س) = −٤ جتا٢س ، وكان للاقتران ق(س) قيمة صغرى محلية قيمتها (−٢) عند س= $\frac{\pi}{٢}$، فجد قاعدة الاقتران ق .

٦) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ) $\int \left(\frac{\text{٥}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} - \frac{\text{٣}}{\text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}\right) \text{ءس}$

ب) $\int \frac{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١} + \text{جتا٢س}} \text{ءس}$

جـ) $\int (\text{ظتاس} - \text{قتاس})^{\text{٢}} \text{ءس}$

د ) $\int \frac{\text{جاس} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \text{ءس}$

هـ) $\int \frac{\text{١} - \text{حا}^{\text{٢}}\text{س}}{\text{جا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}} \times \text{جتا}^{\text{٢}}\frac{\text{س}}{\text{٢}}} \text{ءس}$

و ) $\int \frac{\text{١} - \text{جا٢س}}{\text{جاس} - \text{جتاس}} \text{ءس}$

ز ) $\int \frac{\text{جتا٣س}}{\text{جتاس}} \text{ءس}$

ح) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{جا}^{\text{٢}}\text{س} - \text{جا}^{\text{٤}}\text{س}}$

ط ) $\int \text{قاس}(\text{ظاس} + \text{جتاس}) \text{ءس}$

ي) $\int \text{جا٦س جا٤س ءس}$

ك ) $\int \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س ءس}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^{\text{٣}}\text{س} - \text{٥}}{\text{١} - \text{جا}^{\text{٢}}\text{س}} \text{ءس}$

م ) $\int \text{جتا٣س جتا٧س ءس}$

ن) $\int (\text{جتا}^{\text{٤}}\text{س} - \text{جا}^{\text{٤}}\text{س}) \text{ءس}$

س) $\int \frac{\text{١}}{\text{قاس} - \text{١}} \text{ءس}$

ع ) $\int \frac{\text{جاس}}{\text{١} - \text{جاس}} \text{ءس}$

# ثالثًا التكامل المحدود

## The Definite Integral

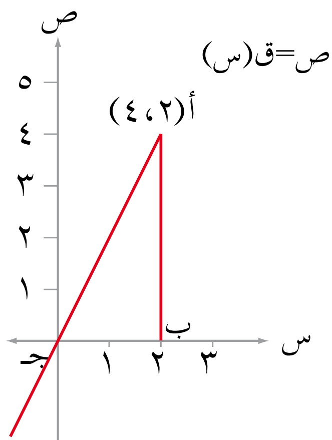
معتمداً الشكل (٤-٢) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س)=٢س، أجب عن كل ممّا يأتي :

١) احسب مساحة المثلث أب جـ.

٢) جد قاعدة الاقتران ل حيث ل(س) = $\int$ ٢س ءس

٣) احسب قيمة ل(٢) - ل(٠)

ماذا تلاحظ؟



شكل (٤-٢)

لابد أنك لاحظت أن ل(٢) - ل(٠) = مساحة المثلث المحصور بين منحنى ق ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢] ويسمى ل(٢) - ل(٠) **بالتكامل المحدود للاقتران ق** ويكتب على الصورة

$\int_{٠}^{٢}$ ق(س) ءس

**تعريف**

إذا كان ق(س) اقترانًا متصلاً على [أ ، ب] ، م(س) معكوسًا لمشتقة الاقتران ق ، يُسمى $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس بالتكامل المحدود حيث:

$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = $\int_{أ}^{ب}$ مَ(س) ءس = $[$م(س)$]_{أ}^{ب}$ = م(ب) - م(أ)

حيث أ: الحد السفلي للتكامل ، ب : الحد العلوي للتكامل

لاحظ أنَّ التكامل المحدود يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س)، ومحور السينات والمستقيمين س= أ ، س = ب .حيث ق(س) > صفر لكلِّ س ∈[أ ، ب]

**مثال ١**

إذا كان ق(-٢) = -٨ ، ق(١) = ١، فجد $\int_{-٢}^{١}$ قَ(س) ءس

**الحل**

$$\int_{-2}^{1} \text{ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = \Big[\text{ق}(\text{س})\Big]_{-2}^{1} = \text{ق}(1) - \text{ق}(-2)$$ لماذا؟

$$= -1 - -8 = 9$$

## تدريب ١

إذا كان ق اقترانًا متصلًا ، ق(١) = ٤ ، ق(٢) = ١٢، $\int_{1}^{2} \text{أ ق}'(\text{س})\,\text{ءس} = 16$ فجد قيمة الثابت أ .

## مثال ٢

احسب قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{1}^{5} 3\text{س}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جتاس}\,\text{ءس}$

**الحل**

١) $\int_{1}^{5} 3\text{س}\,\text{ءس} = \left[\frac{3\text{س}^2}{2}\right]_{1}^{5} = \frac{75}{2} - \frac{3}{2} = 36$

٢) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \text{جتاس}\,\text{ءس} = \Big[\text{جاس}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \text{جا}\,\pi - \text{جا}\,\frac{\pi}{2} = 0 - 1 = -1$

**فكر وناقش**

عدمَ كتابة ثابت التكامل عند إجراء التكامل المحدود.

## تدريب ٢

احسب قيمة كلٍّ من التكاملين الآتيين:

١) $\int_{2}^{7} 4\text{س}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \text{قا}^2\text{س}\,\text{ءس}$

**قاعدة**

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{جـ}\,\text{ءس} = \text{جـ}(\text{ب} - \text{أ})$ ، حيث جـ عدد حقيقي.

## مثال ٣

جد $\int_{٢}^{٦}$ ٥ ءس

**الحل**

$\int_{٢}^{٦}$ ٥ ءس = ٥( ٦ − ٢ ) = ٥ × ٤ = ٢٠

## مثال ٤

إذا كان $\int_{-٢}^{٤}$ ٣ب ءس = ٤٨ ، فجد قيمة الثابت ب .

**الحل**

$\int_{-٢}^{٤}$ ٣ب ءس = ٣ب ( ٤ − -٢ )

٣ب ( ٤ −-٢ ) = ٤٨ ، ومنه ١٨ ب = ٤٨ ، ومنه ب = $\frac{٨}{٣}$

### تدريب ٣

إذا كان $\int_{١+ب}^{٢+٣ب}$ ٥ ءس = ٤٠ ، فجد قيمة الثابت ب.

## خصائص التكامل المحدود

هناك خصائص مهمة للتكامل المحدود تساعد في تسهيل حسابه لبعض الاقترانات في كثير من الحالات، ومن هذه الخصائص:

**خاصية (١)**

١) $\int_{أ}^{أ}$ ق(س) ءس = ٠

٢) $\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = − $\int_{ب}^{أ}$ ق(س) ءس

## مثال ٥

جد $\int_{٣}^{٣} س\sqrt{س^{٢}+١}\ ءس$

**الحل**

$\int_{٣}^{٣} س\sqrt{س^{٢}+١}\ ءس = $ صفرًا

## مثال ٦

إذا كان $\int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس = \frac{٣}{٥}$ ، فجد $\int_{٤}^{١} ق(س)\ ءس$

**الحل**

$\int_{٤}^{١} ق(س)\ ءس = - \int_{١}^{٤} ق(س)\ ءس$

$= \frac{-٣}{٥}$

### تدريب ٤

إذا كان $\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\ ءس = ٢$، فجد $\int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\ ءس$

### خاصية (٢)

١) $\int_{أ}^{ب} جـ\ ق(س)\ ءس = جـ \int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس$

٢) $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) + هـ(س)\right) ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس + \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$

٣) $\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) - هـ(س)\right) ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\ ءس - \int_{أ}^{ب} هـ(س)\ ءس$

ويمكن تعميم خاصيتَيْ الجمع والطرح لأكثر من اقترانين.

## مثال ٧

جد $\int_{١}^{٤} (\text{٣س}^{٢} + \text{٥س})\,\text{ءس}$

**الحل**

$$\int_{١}^{٤} (\text{٣س}^{٢} + \text{٥س})\,\text{ءس} = \int_{١}^{٤} \text{٣س}^{٢}\,\text{ءس} + \int_{١}^{٤} \text{٥س}\,\text{ءس}$$

$$= \left[\text{س}^{٣}\right]_{١}^{٤} + \left[\frac{٥}{٢}\text{س}^{٢}\right]_{١}^{٤} = (٦٤ - ١) + (٤٠ - \frac{٥}{٢}) = ١٠٠{,}٥$$

## مثال ٨

إذا كان $\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢}\text{ق(س)}\,\text{ءس} = -٣$ ، $\int_{٥}^{١} \text{٣هـ(س)}\,\text{ءس} = ١٨$

فجد $\int_{١}^{٥} \left(\text{٤ق(س)} - \text{٥هـ(س)}\right)\text{ءس}$

**الحل**

$\int_{١}^{٥} \frac{١}{٢}\text{ق(س)}\,\text{ءس} = -٣$ ، $\frac{١}{٢}\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = -٣$ لماذا؟

$\therefore \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{ءس} = -٦$

$\int_{٥}^{١} \text{٣هـ(س)}\,\text{ءس} = ١٨$ ، $٣\int_{٥}^{١} \text{هـ(س)}\,\text{ءس} = ١٨$ ، $\int_{١}^{٥} \text{هـ(س)}\,\text{ءس} = -٦$

$$\int_{١}^{٥} \left(\text{٤ق(س)} - \text{٥هـ(س)}\right)\text{ءس} = ٤\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\,\text{ءس} - ٥\int_{١}^{٥} \text{هـ(س)}\,\text{ءس}$$

$$= ٤ \times -٦ - ٥ \times -٦ = ٦$$

### تدريب ٥

إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(\text{٤ق(س)} + \text{٧هـ(س)}\right)\text{ءس} = ١٩$ ، $\int_{١}^{٣} \text{٣ق(س)}\,\text{ءس} = ٩$

فاحسب قيمة $\int_{٣}^{١} \text{٥هـ(س)}\,\text{ءس}$

## مثال ٩

اذا كان $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = ٥$، فما قيمة $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس - \int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس$؟

### الحل

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس - \int_{ب}^{أ} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس + \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس$$ لماذا؟

$$\int_{أ}^{ب} \left(ق(س) + ق(س)\right) ءس = ٢ \times \int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = ٢ \times ٥ = ١٠$$

### تدريب ٦

إذا كان $ع = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,ءس$ ، $ل = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,ءس$

فما قيمة $(ع + ل)$ ؟

### خاصية (٣)

إذا كان ق قابلًا للتكامل على فترة مغلقة تحوي الأعداد أ ،ب،جـ فإنَّ:

١) $\int_{أ}^{ب} ق(س)\,ءس = \int_{أ}^{جـ} ق(س)\,ءس + \int_{جـ}^{ب} ق(س)\,ءس$

### فكر وناقش

هل من الضروري أن تقع جـ بين أ ، ب في خاصية (٣)؟ برِّر ذلك.

## مثال ١٠

إذا كان $\int_{١}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ١٠$ ، فجد $\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} - \int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$

**الحل**

$$\int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} - \int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = \int_{١}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس}$$

$$= \int_{١}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ١٠$$

## مثال ١١

إذا كان $\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\right) \text{ءس} = ٤$ ، $\int_{٨}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٦$

فجد $\int_{٣}^{٨} \left(\text{ق(س)} + ٤\text{س}\right) \text{ءس}$

**الحل**

$$\int_{٣}^{٥} \left(\frac{\text{ق(س)}}{٢} - ٣\right) \text{ءس} = ٤ \text{ ، } \int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\ \text{ءس} - \int_{٣}^{٥} ٣\ \text{ءس} = ٤$$

$$\int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\ \text{ءس} - ٣(٥-٣) = ٤ \text{ ، } \int_{٣}^{٥} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\ \text{ءس} = ١٠$$

$$\therefore \int_{٣}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} = ٢٠$$

$$\int_{٣}^{٨} \left(\text{ق(س)} + ٤\text{س}\right) \text{ءس} = \int_{٣}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٣}^{٨} ٤\text{س}\ \text{ءس}$$

$$\int_{٣}^{٥} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \int_{٥}^{٨} \text{ق(س)}\ \text{ءس} + \left[٢\text{س}^{٢}\right]_{٣}^{٨}$$

$$= (٢٠ + -٦) + (١٢٨ - ١٨) = ١٢٤$$

## تدريب ٧

إذا كان $\int_{٩}^{٢} \left(٢ق(س) + ٣\right) ءس = -١٧$، $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣} ءس = -٢$

فجـــد $\int_{٥}^{٩} \left(٤ق(س) - ١\right) ءس$

## مثال ١٢

جد $\int_{٠}^{٣} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}\ ءس$

**الحل**

$\int_{٠}^{٣} \sqrt{س^٢ - ٤س + ٤}\ ءس = \int_{٠}^{٣} \sqrt{(س - ٢)^٢}\ ءس = \int_{٠}^{٣} |س - ٢|\ ءس$ لماذا؟

$\therefore \int_{٠}^{٢} (٢ - س) ءس + \int_{٢}^{٣} (س - ٢) ءس$ لماذا؟

$= \left[(٢س - \frac{س^٢}{٢})\right]_{٠}^{٢} + \left[(\frac{س^٢}{٢} - ٢س)\right]_{٢}^{٣}$

$= (٤ - ٢) - (صفر) + (\frac{٩}{٢} - ٦) - (٢ - ٤)$

$= ٢,٥$

## تدريب ٨

جد $\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - جتا ٢س}{٢}}\ ءس$

**خاصية (٤)**

١) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) $\leq$ صفر لكل س ∋ [أ ، ب] فإنّ

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \leq صفر$$

٢) إذا كان ق قابلًا للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) $\geq$ صفر لكل س ∋ [أ ، ب] فإنّ

$$\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \geq صفر$$

٣) إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للتكامل على [أ ، ب] ، ق(س) $\leq$ هـ(س) لكل س ∋ [أ ، ب]

فإنَّ $\int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \leq \int_{أ}^{ب} هـ(س)\, ءس$

٤) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل على [أ ، ب]، ل $\leq$ ق(س) $\leq$ ك لكل س ∋ [أ ، ب] فإنّ

$$\int_{أ}^{ب} ل\, ءس \leq \int_{أ}^{ب} ق(س)\, ءس \leq \int_{أ}^{ب} ك\, ءس$$

## مثال ١٣

دون حساب قيمة التكامل، بيّن أنّ $\int_{٠}^{٢\pi} (١ + جا س)\, ءس \geq ٠$

**الحل**

ادرس إشارة (١ + جاس) في الفترة [٠ ، ٢ π]

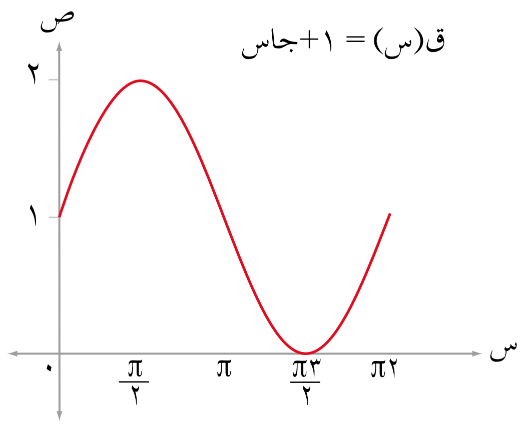
١+جاس $\geq$ ٠ لكل س ∋ [٠ ، ٢ π] — ١ $\leq$ جاس $\leq$ ١

$\therefore \int_{٠}^{٢\pi} (١ + جا س)\, ءس \geq ٠$ لماذا؟

## فكر وناقش

ادرس الشكل (٤–٣) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) = ١ + جاس

وفسّر لماذا $\int_{٠}^{٢\pi}$ (١ + جا س) ءس ≥ ٠



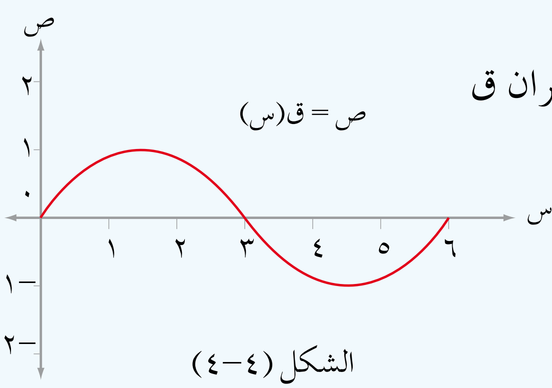
الشكل (٤–٣)

## تدريب ٩

اعتمادًا على الشكل (٤–٤) الذي يمثل منحنى الاقتران ق المتصل على الفترة [ ٠ ، ٦ ] أجب عن كلٍّ مما يأتي :

ما إشارة $\int_{١}^{٣}$ ق(س) ءس ، لماذا؟

ما إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) ءس ، لماذا؟



الشكل (٤–٤)

## مثال ١٤

بيّن أنَّ $\int_{٢-}^{٥}$ (س$^٢$+ ٤) ءس ≥ $\int_{٢-}^{٥}$ ٣س ءس ، دون حساب قيمة كلٍّ من التكاملين.

**الحل**

افرض أنَّ ق(س) = س$^٢$ + ٤ ، هـ(س) = ٣س ،

ل(س) = ق(س) – هـ(س)

ادرس إشارة ل(س)

ل(س) ≥ صفر لكل س ∋ [–٢ ، ٥ ] لماذا ؟

س$^٢$ – ٣س + ٤ ≥ صفر

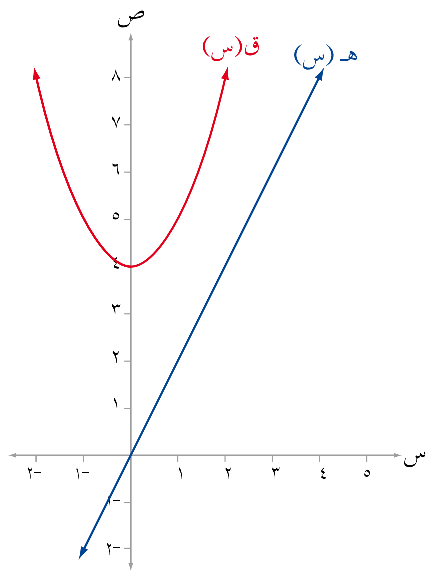
$س^{٢} + ٤ \geq ٣س$ لكل س $\in$ [ -٢ ، ٥ ]

$\therefore \int_{-٢}^{٥} (س^{٢} + ٤)\, ءس \geq \int_{-٢}^{٥} ٣س\, ءس$

## فكر وناقش

ادرس الشكل (٤-٥) وفسّر ما يأتي؟

$\int_{-٢}^{٥}$ ق(س) ءس $\leq$ $\int_{-٢}^{٥}$ هـ(س) ءس



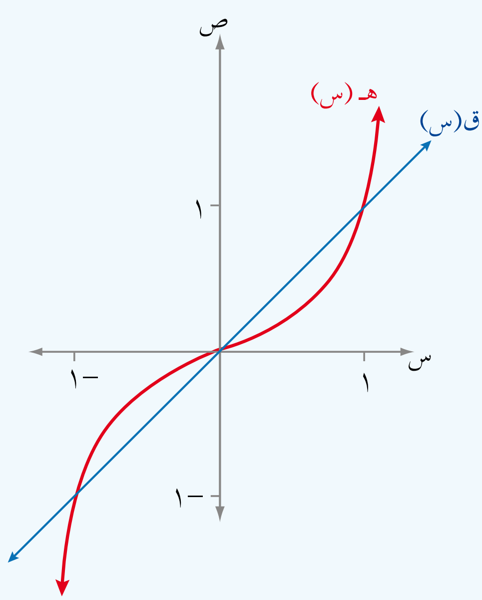
الشكل (٤-٥)

## تدريب ١٠

اعتمادًا على الشكل (٤-٦) الذي يمثل منحنيي الاقترانين ق، هـ قارن بين قيمتي التكامل في كلٍّ مما يأتي؛ مبررًا إجابتك:

١) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) ءس ، $\int_{٠}^{١}$ هـ(س) ءس

٢) $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) ءس ، $\int_{-١}^{٠}$ هـ(س) ءس



الشكل (٤-٦)

## مثال ١٥

بيّن أنَّ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+ جتا$^2$ س) ءس ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

دون إيجاد قيمة التكامل

**الحل**

$-1 \leq$ جتاس $\leq 1$ لكل س $\in [\,0 , 2\pi\,]$ لماذا؟

$0 \leq$ جتا$^2$س $\leq 1$ لماذا؟

$3 \leq 3+$جتا$^2$س $\leq 4$

$\int_{0}^{2\pi}$ ٣ ءس $\leq$ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+ جتا$^2$ س) ءس $\leq$ $\int_{0}^{2\pi}$ ٤ ءس

ومنه ٦ π $\leq$ $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+جتا$^2$س) ءس $\leq$ ٨ π

$\therefore$ المقدار $\int_{0}^{2\pi}$ (٣+جتا$^2$س) ءس ينحصر بين ٦ π ، ٨ π

### فكر وناقش

حُلّ مثال (١٥) بطريقة أخرى.

### تدريب ١١

إذا علمت أنَّ م $\leq \int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2}$ ءس $\leq$ ك ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دونَ حساب قيمة $\int_{0}^{1} \frac{س}{1+س^2}$ ءس.

### فكر وناقش

حُلّ تدريب (١١) بطريقتين مختلفتين.

١) احسب قيمة كلٍّ من التكاملات الآتية:

أ ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{س^{٢}}\, ءس$

ب) $\int_{٠}^{٣} (س^{٢} - |س - ١|)\, ءس$

جـ) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٢}} جا٢س\, ءس$

د ) $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{٠} (س + جتاس)\, ءس$

هـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\sqrt{١ + جا٢س}}{جاس + جتاس}\, ءس$

و ) $\int_{٢}^{٢} (٩س - ٧)^{٥}\, ءس$

ز ) $\int_{-١}^{٣} (س - ١)(س^{٢} + س + ١)\, ءس$

ح ) $\int_{٠}^{١} \sqrt{س}\, (\sqrt{س} + ٢)^{٢}\, ءس$

ط) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{(س - ١)^{٢}}\, ءس$

ي ) $\int_{١}^{٣} \frac{٢س^{٣} - ٤س^{٢} + ٥}{س^{٢}}\, ءس$

ك ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٩س^{٢} - ١٢س + ٤}\, ءس$

ل ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (جتاس - جاس)\, ءس$

٢) إذا كان $ق(س) = \int \left( \int_{٠}^{-٢} ٤\, ءس - ٣س^{٢} \right) ءس$ ، فجد $قَ(-١)$.

٣) إذا كان $\int_{ب}^{٢} ٢ب\, ءس = -٣٠$، حيث $ب \in ح$ ، فجد قيمة الثابت ب .

٤) إذا كان $\int_{٠}^{جـ} س(١ - س)\, ءس = ٠$ ، حيث $جـ \in ح$ ، فجد قيمة جـ .

٥) إذا كان $\int_{-١}^{٣} \left( ٣س^{٢} - ٢ \int_{٠}^{جـ} ٣م\, ءم \right) ءس = -٢٠$ ، فجد قيمة الثابت جـ.

٦ ) إذا كان $ق(س) = \begin{cases} -س & ، \quad -٣ < س \leq ٠ \\ س & ، \quad ٠ < س \leq ٤ \end{cases}$ ، فجد $\int_{-٣}^{٤} ق(س)\, ءس$

٧ ) إذا كان $\int_{٢}^{ب} (٢س - ٣)\, ءس = ٢٠$، فجد قيمة الثابت ب.

٨ ) إذا كان $\int_{١}^{٣} \left(٢ق(س) + \frac{١}{س^{٢}} - ٦\right) ءس = ١٢$ ، فجد $\int_{١}^{٣} \left(\frac{ق(س)}{٢} - س^{٢}\right) ءس$

٩ ) إذا كان $\int_{٩}^{٢} (٢ق(س) + ٣)\, ءس = -١٧$، $\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\, ءس = -٢$

فجد $\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\, ءس$

١٠) دون حساب تكامل المقدار $\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س + ٢}\, ءس$ بيّن أنَّ

$$\frac{\pi}{٥} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٣جتا^{٢}س + ٢}\, ءس \leq \frac{\pi}{٢}$$

١١) إذا علمت أن $م \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ءس \leq ك$ ، فجد أكبر قيمة ممكنة للثابت م ، وأصغر قيمة ممكنة للثابت ك تحقق المتباينة دونَ حساب قيمة $\int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩ - س^{٢}}\, ءس$

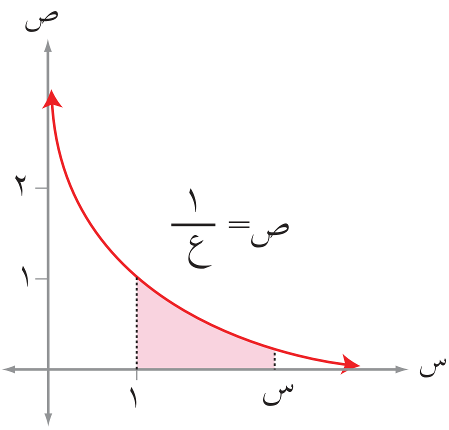
١٢) إذا كان ق اقتران كثير حدود من الدرجة الثانية ، وكان ق(٠) = ٥ ، قً(س) = ٤،

$\int_{٠}^{١} قَ(س)\, ءس = ٣$ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

١٣) جد كثير حدود ق(س) من الدرجة الأولى بحيث $\int_{-١}^{١} ق(س)\, ءس = ٤$ ، $\int_{١}^{٣} ق(س)\, ءس = ٢$

## رابعًا
# اقتران اللوغاريتم الطبيعي
## Natural Logarithmic Function

هل يمكن إيجاد $\int \frac{1}{س}$ ءس باستخدام قواعد التكامل التي تعلمتها سابقًا؟ فسّر إجابتك.




الشكل (٤–٧)

يبين الشكل (٤–٧) منحنى الاقتران ص = $\frac{1}{ع}$ ، ع > ٠ ،

المتصل على (٠ ، ∞) ، ويمكن إيجاد ل(س) = $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ ءع

التي تمثل مساحة المنطقة المظللة

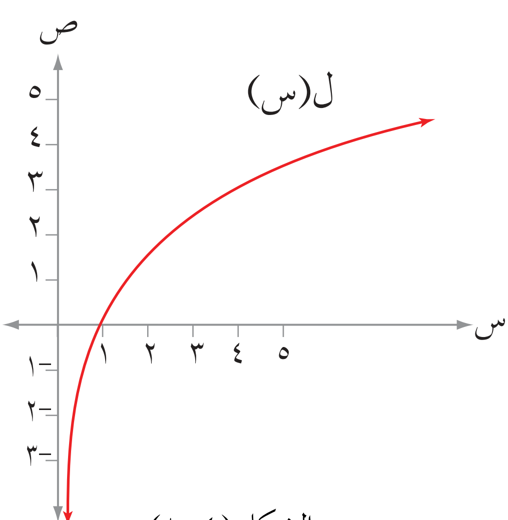
وفي ما يأتي نورد بعض خصائص الاقتران ل(س) ، س > ٠

١) ل(١) = ٠

٢) لَ(س) = $\frac{1}{س}$

٣) ل(س) اقتران متزايد على (٠ ، ∞) لماذا؟

٤) منحنى ل(س) مقعر للأسفل على (٠ ، ∞) لماذا؟




الشكل (٤–٨)

بالاستعانة بهذه الخصائص يمكن رسم منحنى تقريبي للاقتران ل. يبين الشكل (٤–٨) منحنى ل(س) وهو منحنى **اقتران اللوغاريتم**. إنَّ العدد الحقيقي الذي يجعل مساحة المنطقة المظللة في الشكل (٤–٧) تساوي وحدة واحدة يسمى **العدد النيبيري**، ويرمز له بالرمز (هـ) وهو أساس اللوغاريتم الطبيعي، وهو عدد غير نسبي يساوي ٢,٧ تقريبًا.

### تعريف

**الاقتران اللوغاريتمي**: هو اقتران ق غير ثابت قابل للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة يحقق ق(أ ب) = ق(أ) + ق(ب) لكل أ > ٠ ، ب > ٠ .

إذا كانت س ∋ (٠ ، ∞) فإنَّ الاقتران $\int_{1}^{س} \frac{1}{ع}$ ءع = لـــوهـس ويقرأ **اللوغاريتم الطبيعي لِـ س**.

**قاعدة**

١) إذا كان ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$ س ، س > ٠ ، فإنَّ قَ(س) = $\frac{١}{س}$

٢) إذا كان ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$ل(س)، وكان ل(س) قابلًا للاشتقاق، فإنَّ قَ(س) = $\frac{لَ(س)}{ل(س)}$ ،
حيث ل(س) > ٠

**مثال ١**

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي :

١) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$ (س$^{٢}$ + ٥)   ٢) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$جا٢س   ٣) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}\sqrt{س^{٢} + ٧}$

**الحل**

١) قَ(س) = $\frac{٢س}{س^{٢} + ٥}$

٢) قَ(س) = $\frac{٢جتا٢س}{جا٢س}$ = ٢ظتا٢س

٣) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}\sqrt{س^{٢} + ٧}$ = $\frac{١}{٢}$ $\text{لـو}_{هـ}$ (س$^{٢}$ + ٧)   لماذا؟

∴ قَ(س) = $\frac{١}{٢} \times \frac{٢س}{س^{٢} + ٧}$ = $\frac{س}{س^{٢} + ٧}$

**نشاط**

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) = $\text{لـو}_{هـ}$ (س − ٤)

٢) $\text{لـو}_{هـ}$|س − ٤|   ( إرشاد: أعد تعريف |س − ٤| )

ماذا تستنتج؟

## تدريب ١

جد قَ(س) لكل مما يأتي:

١) ق(س) = لــوهـ (٢ − جتاس)

٢) ق(س) = لــوهـ |٢س + ٥|

## مثال ٢

إذا كان ق(س) = لــوهـ $\left(\dfrac{\text{جتا س}}{\sqrt{\text{٤ − ٣س}^{\text{٢}}}}\right)$، فجد قَ(س)

**الحل**

ق(س) = لــوهـ جتا س − لــوهـ $\sqrt{\text{٤ − ٣س}^{\text{٢}}}$ لماذا؟

= لــوهـ جتا س − $\dfrac{\text{١}}{\text{٢}}$لــوهـ (٤ − ٣س^٢^) لماذا؟

$$\text{قَ(س)} = \dfrac{\text{− جا س}}{\text{جتاس}} - \dfrac{\text{١}}{\text{٢}} \times \dfrac{\text{− ٦س}}{\text{٤−٣س}^{\text{٢}}} = \text{− ظاس} + \dfrac{\text{٣س}}{\text{٤−٣س}^{\text{٢}}}$$

### فكر وناقش

حُلَّ مثال (٢) بطريقة أخرى.

## مثال ٣

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) ق(س) = $\dfrac{\text{١}}{\text{س}}$

٢) ق(س) = $\dfrac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{س}^{\text{٣}} + \text{٧}}$

**الحل**

١) م(س) = لــوهـ |س| + جـ

٢) م(س) = لــوهـ |س^٣^ + ٧| + جـ

### قاعدة

١) $\int \frac{١}{س} ءس = لـو_{هـ} |س| + جـ$

٢) $\int \frac{قَ(س)}{ق(س)} ءس = لـو_{هـ} |ق(س)| + جـ$

### مثال ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{٣}{س} ءس$ ٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{٣س^٢ - ٥} ءس$ ٣) $\int ظتاس ءس$

**الحل**

١) $\int \frac{٣}{س} ءس = ٣ \int \frac{١}{س} ءس = ٣ لـو_{هـ} |س| + جـ$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٦س}{٣س^٢ - ٥} = [لـو_{هـ} |٣س^٢ - ٥|]_{١}^{٣}$

$= لـو_{هـ} |٢٧ - ٥| - لـو_{هـ} |٣ - ٥| = لـو_{هـ} ٢٢ - لـو_{هـ} ٢ = لـو_{هـ} ١١$ لماذا؟

٣) $\int ظتاس ءس = \int \frac{جتا س}{جاس} ءس = لـو_{هـ} |جاس| + جـ$

### تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢س} ءس$ ٢) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{قا^٢س}{٢ + ظاس} ءس$

١) جد المشتقة الأولى لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) $ق(س) = لو_{هـ} ٢ س$

ب) $ق(س) = لو_{هـ} جا^{٣} ٥س$

جـ) $ق(س) = لو_{هـ} |س^{٢} + ٤س - ٥|$

د ) $ق(س) = لو_{هـ} (س^{٢} + ٥ س + ٣)$

هـ) $ق(س) = س^{٣} لو_{هـ} س$

و ) $ق(س) = لو_{هـ} (٢ + \sqrt{س})$

ز ) $ق(س) = لو_{هـ} س^{٣} ظاس$

ح ) $ق(س) = لو_{هـ} \left(\frac{س}{س^{٢} + ١}\right)$

ط) $ق(س) = (لو_{هـ} س)^{٣}$

ي) $ق(س) = لو_{هـ} \frac{(٤ س^{٢} + ٥)^{٦}}{(٧ - ٢س)^{٥}}$

ك ) $ق(س) = لو_{هـ} \sqrt[٣]{٥س^{٣} + ٤س}$

ل ) $ق(س) = ظا(لو_{هـ} س)$

٢) إذا كان $ق(س) = لو_{هـ} (س + \sqrt{س^{٢} - ١})$ أثبت أنَّ $قَ(س) = \frac{١}{\sqrt{س^{٢} - ١}}$

٣) إذا كان $\int (قَ(س) - س) ءس = لو_{هـ} |قاس + ظاس| + س^{٢}$ فأثبت أنَّ:

$قَ(س) = ٣س + قاس$

٤) بيِّن أنَّ الاقتران $م(س) = لو_{هـ} جاس$ هو معكوس لمشتقة الاقتران $ق(س) = ظتاس$.

٥) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ) $\int \frac{٢س}{س^{٢} + ٣} ءس$

ب) $\int \frac{١ + جتاس}{س + جاس} ءس$

جـ) $\int \frac{٥ + ٥ظتاس^{٢}}{ظتاس} ءس$

د ) $\int \frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٥} ءس$

هـ) $\int \frac{\text{س} + ٥}{\text{س}} \, \text{ءس}$

و ) $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} \, \text{ءس}$

ز ) $\int_{١-}^{٢} \frac{|٢\text{س}|}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{ءس}$

ح ) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}} \, \text{ءس}$

ط) $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \, \text{ءس}$

ي ) $\int \text{ظاس ءس}$

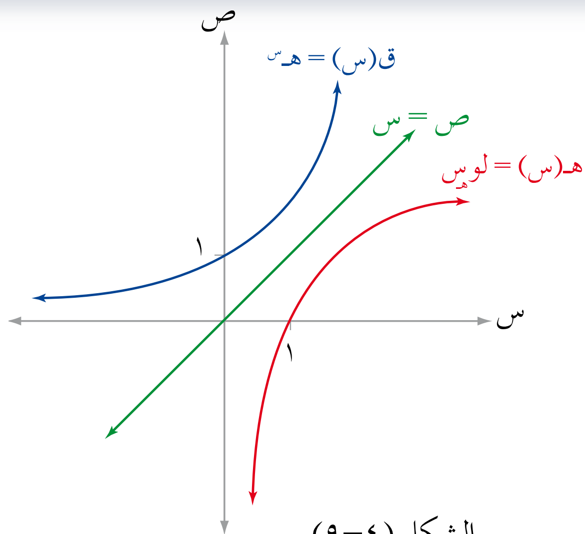
٦) جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) $\text{ق}(\text{س}) = \left(\frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤}\right)$

ب ) $\text{ق}(\text{س}) = \left(\frac{٣\text{جتا}٣\text{س}}{٥ + \text{جا}٣\text{س}}\right)$

## خامسًا مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي
## Derivative and Integral of Natural Exponential Function

الاقتران الأسي الطبيعي ق(س) = $هـ^{س}$،
حيث هـ: هو العدد النيبيري، هو الاقتران العكسي لاقتران اللوغاريتم الطبيعي انظر الشكل (٤-٩).



الشكل (٤-٩)

**قاعدة (١)**

١) إذا كان ق(س) = $هـ^{س}$ فإن قَ(س) = $هـ^{س}$

٢) إذا كان ق(س) = $هـ^{ل(س)}$ ، حيث ل(س) قابل للاشتقاق؛ فإنَّ
قَ(س) = لَ(س) $هـ^{ل(س)}$

**البرهان**

١) ص = $هـ^{س}$ ← $لو_{هـ}$ ص = س    لماذا؟

$\frac{صَ}{ص} = ١$    اشتقاق الطرفين

صَ = ص ← $\frac{ءص}{ءس} = هـ^{س}$

**فكر وناقش**

برهن فرع (٢) من قاعدة (١)

**مثال ١**

جد قَ(س) لكلٍّ مما يأتي:

١) ق(س) = $هـ^{س}$ + $لو_{هـ}$(س$^{٣}$ + ٥)

٢) $ق(س) = هـ^{٧-٢س^{٣}}$

٣) $ق(س) = هـ^{\frac{١}{س}}$

**الحل**

١) $قَ(س) = هـ^{س} + \frac{٣س^{٢}}{س^{٣} + ٥}$

٢) $قَ(س) = -٦س^{٢} هـ^{٧-٢س^{٣}}$

٣) $قَ(س) = \frac{-١}{س^{٢}} هـ^{\frac{١}{س}}$

### تدريب ١

جد $قَ(س)$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $ق(س) = هـ^{جاس}$ 　　 ٢) $ق(س) = س^{٤} هـ^{٢س}$

### فكر وناقش

برهن أنّه إذا كان $ق(س) = هـ^{لو_{هـ} ل(س)}$ ، فإنَّ $ق(س) = ل(س)$

### مثال ٢

جد $قَ(س)$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س^{٣}}$ 　　 ٢) $ق(س) = هـ^{لو_{هـ} س^{٤}}$

**الحل**

١) $ق(س) = لو_{هـ} هـ^{س^{٣}} = س^{٣} لو_{هـ} هـ$ 　　 قوانين اللوغاريتمات

$\therefore$ $ق(س) = س^{٣}$ ، $قَ(س) = ٣س^{٢}$

٢) $ق(س) = هـ^{لو_{هـ} س^{٤}} = س^{٤}$ ، ومنه: $قَ(س) = ٤س^{٤}$

### تدريب ٢

جد $قَ(س)$ لكلٍّ مما يأتي:

١) $ق(س) = س لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$ 　　 ٢) $ق(س) = هـ^{٣لو_{هـ}(١+جاس)}$

**قاعدة (١)**

$$\int هـ^{س} \, ءس = هـ^{س} + جـ$$

## مثال ٣

جد $\int (هـ^{٢} + هـ^{س}) \, ءس$

**الحل**

$$\int (هـ^{٢} + هـ^{س}) \, ءس = هـ^{٢} س + هـ^{س} + جـ$$

## مثال ٤

جد معكوسًا لمشتقة كلٍّ من الاقترانات الآتية:

١) $ق(س) = ٢ هـ^{٢س}$

٢) $ق(س) = -٣ هـ^{١-٣س}$

٣) $ق(س) = هـ^{أس}$

**الحل**

١) $م(س) = هـ^{٢س} + جـ$

٢) $م(س) = هـ^{١-٣س} + جـ$

٣) $م(س) = \frac{١}{أ} هـ^{أس} + جـ$ لماذا؟

ماذا تلاحظ؟

**تعميم**

$$\int هـ^{أس} \, ءس = \frac{١}{أ} هـ^{أس} + جـ$$

## مثال ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{هـ}^{٥س} \, \text{ءس}$ ٢) $\int \text{هـ}^{٣-٤س} \, \text{ءس}$

**الحل**

١) $\int \text{هـ}^{٥س} \, \text{ءس} = \frac{١}{٥} \text{هـ}^{٥س} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{هـ}^{٣-٤س} \, \text{ءس} = \frac{-١}{٤} \text{هـ}^{٣-٤س} + \text{جـ}$

## تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٠}^{١} (١ + \text{هـ}^{س})^{٢} \, \text{ءس}$ ٢) $\int \text{هـ}^{٣س} (١ + \text{هـ}^{٢س}) \, \text{ءس}$

١) جد $\frac{ءص}{ءس}$ لكلٍّ من الاقترانات الآتية:

أ ) ص = س + هـ$^{٩س}$

ب) ص = س$^{٣}$ + هـ$^{٦-٥س^{٤}}$

جـ) ص = جاهـ$^{٢س}$

د ) ص = $\sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

هـ) ص = هـ$^{\frac{١}{س}}$ + لو$_{هـ}\sqrt{س}$

و ) ص = هـ$^{٥}$ + لو$_{هـ}$ قاس

ز ) ص = هـ$^{٤لو_{هـ}س^{٣}+٢}$

ح ) ص = $\frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

ط) ص = هـ$^{٢}$ + س$^{٣}$ هـ$^{جاس}$

ي ) ص = (هـ$^{٤س+٥}$)$^{٦}$

٢) إذا كان ص = هـ$^{ظاس}$ + أ لو$_{هـ}$ جتاس + $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{ءس}{١ + ظا^{٢}س}$

وكان $\frac{ءص}{ءس}\Big|_{س=\frac{\pi}{٤}}$ = ٢هـ + ١، فجد قيمة الثابت أ .

٣) إذا كان قً (س) = جـاس + هـ$^{٢س}$ ، ق(٠) = $\frac{١}{٤}$ ، قَ(٠) = $\frac{١}{٢}$ ، فجد قاعدة الاقتران ق.

٤) إذا كان هـ$^{ص س}$ = س − ص، فأثبت أن $\frac{ءص}{ءس}$ = $\frac{ص^{٢} - ص س + ١}{س^{٢} - س ص + ١}$

٥) إذا كان ص = هـ$^{أس}$ ، فجد قيمة (قيم) الثابت أ التي تحقق المعادلة الآتية:

صً − ٥صَ + ٦ ص = صفرًا

٦) إذا كان ق(س) = ٣$^{ل(س)}$، حيث ل(س) قابل للاشتقاق؛ فأثبت أنَّ:

قَ(س) = ٣$^{ل(س)}$ × لَ(س) لـو$_{هـ}$ ٣

٧) إذا كان $\int \text{قَ(س)}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{١}-\text{س}^{\text{٢}}} + \text{٤هـ}$ ، $\text{قَ(ب)} = -\text{٢ب}$ ، $\text{ب} \neq \text{صفرًا}$ فجد قيمة (قيم) الثابت ب.

٨) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ ) $\int \text{هـ}^{\text{٧س}}\,\text{ءس}$

ب) $\int_{\text{٠}}^{\text{١}} \text{٣هـ}^{\text{٣س}}\,\text{ءس}$

جـ) $\int_{\text{١}}^{\text{٣}} \text{هـ}^{\text{٤}}\,\text{ءس}$

د ) $\int \dfrac{\text{٤هـ}^{\text{٤س}} - \text{٣}}{\text{هـ}^{\text{٤س}} - \text{٣س}}\,\text{ءس}$

هـ) $\int \dfrac{\text{هـ}^{\text{٣س}} - \text{٢٧}}{\text{هـ}^{\text{س}} - \text{٣}}\,\text{ءس}$

و ) $\int \text{هـ}^{\text{٥}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جتاس}}\,\text{ءس}$

ز ) $\int_{\text{١}}^{\text{هـ}^{\text{٢}}} \dfrac{\text{١}}{\text{هـ} - \text{١}}\,\text{ءس}$

ح ) $\int \text{٣س هـ}^{\text{٢}+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{\text{٢}}}\,\text{ءس}$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{٥س}} \sqrt{\text{هـ}^{\text{٢س}} + \text{٤هـ}^{\text{س}} + \text{٤}}\,\text{ءس}$

ي ) $\int (\text{هـ}^{\text{٢س}+\text{٥}})^{\text{٢}}\,\text{ءس}$

# الفصل الثاني

# طرائق التكامل

# Techniques of Integration

**النتاجات**

- تتعرف طريقة التكامل بالتعويض، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.
- تتعرف طريقة التكامل بالأجزاء، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.
- تتعرف طريقة التكامل بالكسور الجزئية، وتستخدمها في إيجاد بعض التكاملات.

عندما يُطلب منك إجراء تكامل ما، قد يكون بالإمكان تطبيق قواعد التكامل التي سبق لك أن درستها، أمّا في بعض الحالات التي لاتخضع للتطبيق المباشر لقواعد التكامل الأساسية؛ فمن الممكن استخدام طرق أخرى مثل:

- التكامل بالتعويض.
- التكامل بالأجزاء.
- التكامل بالكسور الجزئية.

وفي هذا الفصل سيتم توضيح كلٍّ من هذه الطرق.

## أولًا التكامل بالتعويض Integration by Substitution

**نشاط**

أجب عن كلٍّ مما يأتي :

١) بيّن أن م(س) = $\frac{١}{٦}$(س$^{٢}$ + ٣)$^{٦}$ معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = ٢س(س$^{٢}$ + ٣)$^{٥}$

٢) جد $\int$ ٢س (س$^{٢}$ + ٣)$^{٥}$ ءس

٣) افرض ص= س$^{٢}$ + ٣ ثم جد $\frac{ءص}{ءس}$

٤) اكتب التكامل في (٢)؛ بدلالة ص باستخدام الرموز في (٣) ماذا تلاحظ؟

## مثال ١

جد $\int ٦س^{٥}\,(س^{٦}+٤)^{٧}\,ءس$

**الحل**

افرض $ص = س^{٦} + ٤$

ومنها $ءص = ٦س^{٥}\,ءس$ اشتقاق الطرفين

$$\int ٦س^{٥}(س^{٦}+٤)^{٧}\,ءس = \int (س^{٦}+٤)^{٧}\,(٦س^{٥}\,ءس) = \int (ص)^{٧}\,ءص = \frac{ص^{٨}}{٨} + جـ$$

$$= \frac{(س^{٦}+٤)^{٨}}{٨} + جـ$$

وتُسمى عملية إجراء التكامل على هذا النحو **بالتكامل بالتعويض**.

**قاعدة**

$$\int ق\left(هـ(س)\right)\,هـ'(س)\,ءس = \int ق(ص)\,ءص$$

حيث $ص = هـ(س)$ ، $ءص = هـ'(س)\,ءس$

ويمكن تلخيص الخطوات التي يتم بها إجراء التكامل بالتعويض، على النحو الآتي:

١) افرض $ص = هـ(س)$

٢) اشتق الطرفين واكتب ءص على الصورة $ءص = هـ'(س)\,ءس$.

٣) عوِّض ص بدلًا من هـ (س)، وعوّض ءص بدلًا من $هـ'(س)\,ءس$.

٤) أي مقدار يبقى بدلالة س بعد عملية التعويض والتبسيط، اكتبه بدلالة ص.

٥) احسب التكامل الناتج بعد عملية التعويض بدلالة ص.

٦) أعد كتابة ناتج التكامل بدلالة س.

## مثال ٢

جد $\int س^{٣}\sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,ءس$

**الحل**

افرض $ص = ٣س^{٤} + ٤$ ، $ءص = ١٢س^{٣}\,ءس$

$$\int س^{٣}\sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,ءس = \frac{١}{١٢}\int \sqrt[٣]{٣س^{٤}+٤}\,(١٢س^{٣})\,ءس = \frac{١}{١٢}\int (ص)^{\frac{١}{٣}}\,ءص$$

$$= \frac{١}{١٢} \times \frac{٣}{٤}ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ = \frac{١}{١٦}\sqrt[٣]{(٣س^{٤}+٤)^{٤}} + جـ$$

## مثال ٣

جد $\int \frac{٦س - ٩}{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٣}} \, ءس$

### الحل

افرض $ص = س^{٢} - ٣س + ١$ ومنه $ءص = (٢س - ٣) \, ءس$

$$\int \frac{٦س - ٩}{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٣}} \, ءس = \int \frac{٣(٢س - ٣)}{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٣}} \, ءس$$

$$= \int \frac{٣}{(س^{٢} - ٣س + ١)^{٣}} \times (٢س - ٣) \, ءس = \int \frac{٣}{(ص)^{٣}} \, ءص = \int ٣ص^{-٣} \, ءص$$

$$= \frac{٣ص^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{٣(س^{٢} - ٣س + ١)^{-٢}}{-٢} + جـ = \frac{-٣}{٢(س^{٢} - ٣س + ١)^{٢}} + جـ$$

## تدريب ١

جد كلاً من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٢}(٦س^{٣} + ٥)^{٣} \, ءس$

٢) $\int (س + ٣) \sqrt[٥]{س^{٢} + ٦س - ٤} \, ءس$

٣) $\int \frac{١٠س - ٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢} - س + ١)^{٢}}} \, ءس$

## مثال ٤

جد $\int س^{٣}(س^{٢} + ٤)^{٦} \, ءس$

### الحل

افرض $ص = س^{٢} + ٤$ ، ومنه $ءص = ٢س \, ءس$

$\int س^{٣}(س^{٢} + ٤)^{٦} \, ءس = \frac{١}{٢}\int س^{٢} (ص)^{٦} \, (٢س \times ءس)$ لماذا؟

$\frac{١}{٢}\int س^{٢} \, (ص)^{٦} \, ءص$ تعويض و تبسيط

لاحظ هنا بعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص

ومنه $س^{٢} = ص - ٤$

$$\int \frac{١}{٢}(ص-٤)ص^{٦}\,ءص = \int \frac{١}{٢}(ص^{٧}-٤ص^{٦})\,ءص$$ تعويض و تبسيط

$$= \frac{١}{٢}\left(\frac{ص^{٨}}{٨}-\frac{٤ص^{٧}}{٧}\right)+جـ$$ إجراء التكامل

$$= \frac{(س^{٢}+٤)^{٨}}{١٦}-\frac{٢(س^{٢}+٤)^{٧}}{٧}+جـ$$ كتابة الناتج بدلالة س

## تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int س^{٧}\sqrt{س^{٤}-٣}\,ءس$

٢) $\int ٢س^{٥}(س^{٢}+٥)^{٤}\,ءس$

## مثال ٥

جد $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{١١}}\,ءس$

**الحل**

اكتب $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{١١}}\,ءس$ على الصورة $\int \frac{(س+١)^{٩}}{س^{٩}\times س^{٢}}\,ءس$ لماذا؟

$$\int \frac{\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}}{س^{٢}}\,ءس$$

افرض $ص=\frac{س+١}{س}$ ، $ص=١+\frac{١}{س}$ ، $ءص=\frac{-١}{س^{٢}}\,ءس$ تبسيط الطرفين واشتقاقهما

$$\int \frac{\left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}}{س^{٢}}\,ءس = -\int \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٩}\times\frac{-١}{س^{٢}}\,ءس = -\int ص^{٩}\,ءص$$ تعويض و تبسيط

$$= \frac{-ص^{١٠}}{١٠}+جـ$$ إجراء التكامل

$$= \frac{-\left(\frac{س+١}{س}\right)^{١٠}}{١٠}+جـ$$ كتابة الناتج بدلالة س

**فكر وناقش**

حُلَّ مثال (٥) بطريقة أخرى وذلك بإخراج س عاملًا مشتركًا.

## تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{(\text{٢س}+\text{١})^{\text{٥}}}{\text{س}^{\text{٧}}}\ \text{ءس}$

٢) $\int \text{س}^{\text{٢}} \sqrt[\text{٣}]{\text{س}^{\text{٧}} + \text{٥س}^{\text{٣}}}\ \text{ءس}$

٣) $\int \sqrt[\text{٣}]{\text{٤س}^{\text{٥}} + \text{٢س}^{\text{٣}}}\ \text{ءس}$

٤) $\int (\text{٧س}^{\text{٥}} - \text{٢س})^{\text{٣}}\ \text{ءس}$

## مثال ٦

جد $\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جا٢س}}{\sqrt{\text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}}\ \text{ءس}$

**الحل**

افرض $\text{ص} = \text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}$

$\text{ءص} = -\text{٢جاس جتاس ءس}$ ، $\text{ءص} = -\text{جا٢س ءس}$ متطابقة $\text{جا٢س} = \text{٢ جاس جتاس}$

وبما أنَّ حدود التكامل بدلالة س؛ إذن يلزم تغييرها بحيث تصبح بدلالة ص

عندما $\text{س} = \text{٠}$ فإنَّ $\text{ص} = \text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}(\text{٠}) = \text{٢}$

عندما $\text{س} = \frac{\pi}{\text{٢}}$ فإنَّ $\text{ص} = \text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}(\frac{\pi}{\text{٢}}) = \text{١}$

$$\int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{\text{جا٢س}}{\sqrt{\text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}}\ \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\frac{\pi}{\text{٢}}} \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{١} + \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}} \times -\text{جا٢س ءس}$$

$$= \int_{\text{٢}}^{\text{١}} \frac{-\text{١}}{\sqrt{\text{ص}}}\ \text{ءص} = \int_{\text{٢}}^{\text{١}} -\text{ص}^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}}\ \text{ءص} = \left[-\text{٢ص}^{\frac{\text{١}}{\text{٢}}}\right]_{\text{٢}}^{\text{١}}$$

$$= \left[-\text{٢}\sqrt{\text{ص}}\right]_{\text{٢}}^{\text{١}} = -\text{٢}(\sqrt{\text{١}} - \sqrt{\text{٢}}) = \text{٢}\sqrt{\text{٢}} - \text{٢}$$

### فكر وناقش

ناقش مع زملائك إيجاد التكامل غير المحدود في مثال (٦)، ثم جد قيمة التكامل المحدود لقيمة س، وقارن إجابتك.

## تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int_{٠}^{٤} \text{س} \sqrt{\text{س}^{٢} + ٩}\ \text{ءس}$ ٢) $\int_{١}^{٢} \frac{(\text{س} + ١)^{٥}}{\text{س}^{٧}}\ \text{ءس}$

## مثال ٧

جد $\int \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\ \text{ءس}$

**الحل**

افرض $\text{ص} = \text{ظا}٢\text{س}$ ، ومنه $\text{ءص} = (٢\text{قا}^{٢}\ ٢\text{س})\ \text{ءس}$

$$\int \text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}} (٢\text{قا}^{٢}\ ٢\text{س} \times \text{ءس}) = \int \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ص}}\ \text{ءص}$$

$$= \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{\text{ظا}٢\text{س}} + \text{جـ}$$

## مثال ٨

جد $\int (\text{س} + ٣)\ \text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)\ \text{ءس}$

**الحل**

افرض $\text{ص} = \text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤$ ، ومنه $\text{ءص} = (٢\text{س} + ٦)\ \text{ءس}$

$$\int (\text{س} + ٣)\ \text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)\ \text{ءس} = \int \frac{١}{٢}\text{قتا}^{٢}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤)\ ٢(\text{س} + ٣)\ \text{ءس}$$

$$= \int \frac{١}{٢}\text{قتا}^{٢}\ \text{ص}\ \text{ءص} = \frac{-١}{٢}\ \text{ظتا ص} + \text{جـ} = \frac{-١}{٢}\ \text{ظتا}(\text{س}^{٢} + ٦\text{س} - ٤) + \text{جـ}$$

## تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int (س^{٢} + ١)\ جا(س^{٣} + ٣س + ١)\ ءس$ ٢) $\int س\ ظا^{٢}(س^{٢} + ٥)\ ءس$

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^{٢}}\ ءس$

## مثال ٩

جد $\int جا^{٣}\ ٢س\ جتا^{٥}\ ٢س\ ءس$

**الحل**

افرض $ص = جتا ٢س$ ، ومنه $ءص = -٢ جا ٢س\ ءس$

$\int جا^{٣}\ ٢س\ جتا^{٥}\ ٢س\ ءس = \int \frac{-١}{٢} جا^{٢}\ ٢س\ جتا^{٥}\ ٢س\ (-٢ جا ٢س\ ءس)$

$\int \frac{-١}{٢}\ (جا^{٢}\ ٢س) ص^{٥} \times ءص = \int \frac{-١}{٢}\ (١ - جتا^{٢}\ ٢س)\ ص^{٥} \times ءص$

لاحظ هنا: بَعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص ،

$\int \frac{-١}{٢}\ (١ - ص^{٢}) \times ص^{٥}\ ءص = \int \frac{-١}{٢} (ص^{٥} - ص^{٧})\ ءص$

$= \frac{-١}{٢} (\frac{ص^{٦}}{٦} - \frac{ص^{٨}}{٨}) + جـ = \frac{(جتا ٢س)^{٨}}{١٦} - \frac{(جتا ٢س)^{٦}}{١٢} + جـ$

### فكر وناقش

في مثال (٩) افرض $ص = جا ٢س$، وناقش الحل مع زملائك، وقارن إجابتك.

## مثال ١٠

جد $\int جا^{٤} س\ جتا^{٣} س\ ءس$

**الحل**

افرض $ص = جاس$، ومنه $ءص = جتا س\ ءس$

$\int جا^{٤}س\ جتا^{٣}س\ ءس = \int جا^{٤}س\ جتا^{٢}س (جتاس \times ءس) = \int ص^{٤} جتا^{٢}س\ ءص$

لاحظ هنا بعد التبسيط بقي المتغير س؛ لذا نعود إلى الفرض لكتابة المتغير س بدلالة المتغير ص.

$$= \int \text{ص}^{٤}\,(١ - \text{جا}^{٢}\text{س})\,\text{ءص} = \int \text{ص}^{٤}\,(١ - \text{ص}^{٢})\,\text{ءص}$$ لماذا؟

$$= \int (\text{ص}^{٤} - \text{ص}^{٦})\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٥}}{٥} - \frac{\text{ص}^{٧}}{٧} + \text{جـ} = \frac{(\text{جاس})^{٥}}{٥} + \frac{(\text{جاس})^{٧}}{٧} + \text{جـ}$$

**فكر وناقش**

هل يمكن حلُّ مثال (١٠) من خلال فرض ص = جتاس ؟ برر إجابتك.

## مثال ١١

جد $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

**الحل**

$$\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس} = \int \text{جتا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس}$$

$$= \int (\text{جتاس} \times \text{جاس})^{٢}\ \text{جا}^{٢}\text{س}\ \text{ءس} = \int \left(\frac{١}{٢}\text{جا}٢\text{س}\right)^{٢} \times \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\ \text{ءس}$$ لماذا؟

$$= \int \frac{١}{٨}\left(\text{جا}^{٢}\,٢\text{س} - \text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س}\right)\text{ءس} = \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{ءس} - \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{ءس}$$

أولًا جد $\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{ءس}$

$$= \int \frac{١}{١٦}(١ - \text{جتا}٤\text{س})\ \text{ءس} = \frac{١}{١٦}\left(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا}٤\text{س}\right) + \text{جـ}$$ متطابقة $\text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا}٢\text{س})$

$$\therefore \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{ءس} = \frac{١}{١٦}\left(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا}٤\text{س}\right) + \text{جـ}$$ ....... (١)

ثم جد $\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{ءس}$

افرض ص = جا٢س، ومنه ءص = (٢ جتا٢س) ءس

$$\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س}\ \text{جتا}٢\text{س}\ \text{ءس} = \int \frac{١}{١٦}\text{جا}^{٢}\,٢\text{س} \times (٢\,\text{جتا}٢\text{س}\ \text{ءس})$$ لماذا؟

$$= \int \frac{١}{١٦}\text{ص}^{٢}\,\text{ءص} = \frac{\text{ص}^{٣}}{٤٨} + \text{جـ} = \frac{\text{جا}^{٣}\,٢\text{س}}{٤٨} + \text{جـ}$$

$\therefore \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س جتا٢س ءس} = \frac{\text{جا}^{٣}\text{٢س}}{٤٨} + \text{جـ}$ ....... (٢)

إذن: $\int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س ءس} - \int \frac{١}{٨}\text{جا}^{٢}\text{٢س جتا٢س ءس} = \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٤س}) - \frac{\text{جا}^{٣}\text{٢س}}{٤٨} + \text{جـ}$

ومنه $\int \text{جتا}^{٢}\text{٢س جا}^{٤}\text{س ءس} = \frac{١}{١٦}(\text{س} - \frac{١}{٤}\text{جا٤س}) - \frac{\text{جا}^{٣}\text{٢س}}{٤٨} + \text{جـ}$

## تدريب ٦

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \text{ظا}^{٥}\text{٣س قا}^{٢}\text{ ٣س ءس}$

٢) $\int \frac{\text{جتا ٢س}}{\text{قتا}^{٥}\text{ ٢س}}\text{ ءس}$

٣) $\int \text{جا}^{٣}\text{س ءس}$

٤) $\int \text{جا}^{٤}\text{ ٥س جتا}^{٣}\text{ ٥س ءس}$

## تحدّث

تحدّث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي:

١) لماذا سُميت طريقة التكامل السابقة التكامل بالتعويض؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالتعويض؟

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ ) $\int_{٠}^{٢} (س+٣)\sqrt{س^{٢} + ٦س}\ ءس$

ب) $\int \frac{٢س - ٣}{٢س^{٢} - ٦س - ٥}\ ءس$

جـ) $\int \frac{٢}{(٤س^{٢} - ٢٠س + ٢٥)^{٧}}\ ءس$

د ) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^{٢} - ٤س + ٤}\ ءس$

هـ) $\int \frac{ظتا^{٢} \frac{١}{س}}{س^{٢}}\ ءس$

و ) $\int \frac{(٥ + \sqrt{س})^{٧}}{\sqrt{س}}\ ءس$

ز ) $\int \frac{١}{س^{٢}} \sqrt{\frac{٢س + ١}{س}}\ ءس$

ح) $\int_{١}^{هـ^{٣}} \frac{١}{س\sqrt{١ + لو_{هـ}س}}\ ءس$

ط) $\int هـ^{س^{٣} + ٢لو_{هـ}س}\ ءس$

ي) $\int \frac{س^{٣}}{(س+١)^{٥}}\ ءس$

ك ) $\int \sqrt[٣]{س^{\frac{-٣}{٤}} + ١}\ ءس$

ل ) $\int جتا^{٣}س(١ + حاس)^{٧}\ ءس$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٨} ق(س)\ ءس = ١٨$ ؛ فجد قيمة $\int_{١}^{٢} س^{٢}\ ق(س^{٣})\ ءس$

٣) إذا كان $\int_{٠}^{١} ق(س)\ ءس = ٨$ ؛ فجد قيمة $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} ٣جتا(٢س)\ ق(جا٢س)\ ءس$

٤) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ ) $\int هـ^{جاس + لو_{هـ}جتاس}\ ءس$

ب) $\int_{٠}^{٢} \frac{س^{٣}}{\sqrt{(س^{٢} + ٩)^{٣}}}\ ءس$

جـ) $\int \frac{١ - ظا^{٢}س}{جتا^{٢}س}\ ءس$

د ) $\int \frac{جاس\sqrt{جا^{٢}س + ٤}}{قاس}\ ءس$

هـ) $\int \text{قتا}^{٤}\, ٦\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\, ٦\text{س}\ \text{ءس}$

و) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

ز) $\int \dfrac{\text{جا}\,٢\text{س}}{(١ + \text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}\ \text{ءس}$

ح) $\int \text{جا}\,٢\text{س} \times \text{هـ}^{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

ط) $\int \dfrac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\ \text{ءس}$

ي) $\int \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

ك) $\int \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}}\,(٢ + \sqrt{\text{س}})}\ \text{ءس}$

ل) $\int \dfrac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس} + ٣}}{٢ - ٢\,\text{جتا}^{٢}\text{س}}\ \text{ءس}$

م) $\int \text{جاس}\,(١ + \text{جتا}\,٢\text{س})^{٥}\ \text{ءس}$

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^{٣}\text{س}}\ \text{ءس}$

س) $\int \dfrac{١}{\text{س}^{٢}} \sqrt{\dfrac{٢\text{س} + ١}{\text{س}}}\ \text{ءس}$

ع) $\int \text{جتا}\,٢\text{س}\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^{٨}\ \text{ءس}$

٥) أثبت أنَّ $\displaystyle\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(\text{س} - ١)^{\text{ن}}}{\text{س}^{\text{ن}+٢}}\ \text{ءس} = \begin{cases} \dfrac{-١}{\text{ن} + ١} & \text{، حيث ن عدد فردي} \\[2ex] \dfrac{١}{\text{ن} + ١} & \text{، حيث ن عدد زوجي} \end{cases}$

٦) اكتب الفرض المناسب لإيجاد كلٍّ من التكاملات الآتية؛ بطريقة التكامل بالتعويض (دون إجراء التكامل):

أ) $\int \text{جتا}^{١٠}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{ءس}$

ب) $\int \text{جتا}^{٥}\text{س}\ \text{جا}^{٧}\text{س}\ \text{ءس}$

جـ) $\int \text{ظا}^{٥}\text{س}\ \text{قا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

د) $\int \text{ظا}^{٣}\text{س}\ \text{قا}^{٥}\text{س}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \text{ظتا}^{٦}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

و) $\int \text{ظتا}^{٧}\text{س}\ \text{قتا}^{٤}\text{س}\ \text{ءس}$

## ثانيًا التكامل بالأجزاء Integration By Parts

**نشاط**

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ م(س) = س جاس + جتاس معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = س جتاس

٢) جد $\int$ س جتاس ءس

٣) افرض ق = س ، هـَ = جتاس ءس ثم جد قَ ، هـ

٤) اكتب ناتج التكامل في (٢) باستخدام الرموز في (٣) ماذا تلاحظ؟

إذا كان ق، هـ اقترانين قابلين للاشتقاق بالنسبة إلى المتغير س فإنَّ :

(ق(س) × هـ(س))َ = قَ(س) × هـ(س) + ق(س) × هـَ(س)

أي أنَّ ق(س) × هـَ(س) = (ق(س) × هـ(س))َ − قَ(س) × هـ(س)

وبإجراء التكامل للطرفين بالنسبة إلى س يكون :

$\int$ ق(س) × هـَ(س) ءس = $\int$ (ق(س) × هـ(س))َ ءس − $\int$ قَ(س) × هـ(س) ءس

لكن ءهـ = هـَ(س) ءس ، ءق = قَ(س) ءس

أي أنَّ:

**تعميم**

$\int$ ق × ءهـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

وتُسمى هذه بقاعدة التكامل بالأجزاء

**مثال ١**

جد $\int$ ٢س جاس ءس

**الحل**

افرض

ق = ٢ س        ءق = ٢ ءس        اشتقاق

ء هـ = جاس ءس        هـ = − جتاس        إجراء التكامل

باستخدام القاعدة : $\int$ ق × ءهـ = ق×هـ − $\int$ هـ × ء ق

فإنَّ $\int$ ٢ س جاس ءس = ٢س × − جتاس − $\int$ −جتاس × ٢ءس

= − ٢س جتاس + $\int$ ٢ جتاس ءس

= −٢س جتاس + ٢ جاس + جـ

**مثال ٢**

جد $\int$ س × هـ$^{٣س}$ ءس

**الحل**

افرض

ق = س        ءق = ءس

ءهـ = هـ$^{٣س}$ ءس        هـ = $\frac{١}{٣}$ هـ$^{٣س}$

وباستخدام القاعدة : $\int$ ق×ء هـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int$ س × هـ$^{٣س}$ ءس = س × $\frac{١}{٣}$ هـ$^{٣س}$ − $\int$ $\frac{١}{٣}$ هـ$^{٣س}$ ءس

= $\frac{١}{٣}$ س هـ$^{٣س}$ − $\frac{١}{٩}$ هـ$^{٣س}$ + جـ

**تدريب ١**

جد كلًّا من التكاملات الآتية :

١) $\int$ س جتاس ءس        ٢) $\int$ س جا٥س ءس

٣) $\int$ (٢س − ٣) هـ$^{س}$ ءس        ٤) $\int$ س قا$^{٢}$س ءس

**مثال ٣**

جد $\int$ س جتا$^{٢}$س ءس

**الحل**

افرض

ق = س ءق = ءس

ء هـ = جتا$^{٢}$س ءس = $\frac{١}{٢}$(١ + جتا٢س)ءس هـ = $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س)

$\int$ ق × ء هـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int$ س جتا$^{٢}$س ءس = س × $\frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\int \frac{١}{٢}$(س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س)ءس

= $\frac{١}{٢}$ س (س + $\frac{١}{٢}$ جا٢س) − $\frac{١}{٢}$ ( $\frac{١}{٢}$س$^{٢}$ − $\frac{١}{٤}$ جتا٢س) + جـ

**مثال ٤**

جد $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ لـو$_{هـ}$س ءس

**الحل**

افرض

ق = لـو$_{هـ}$س ءق = $\frac{١}{س}$ ءس

ء هـ = ءس هـ = س

وباستخدام القاعدة : $\int$ ق × ءهـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ لـو$_{هـ}$س ءس = $[$لـو$_{هـ}$س × س$]_{هـ}^{هـ^{٢}}$ − $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ س × $\frac{١}{س}$ ءس

= $[$س لـو$_{هـ}$س $]_{هـ}^{هـ^{٢}}$ − $\int_{هـ}^{هـ^{٢}}$ ءس

= (هـ$^{٢}$ × لـو$_{هـ}$هـ$^{٢}$) − (هـ × لـو$_{هـ}$ هـ) − (هـ$^{٢}$ − هـ) = هـ$^{٢}$

## تدريب ٢

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ س جا$^٢$س ءس

٢) $\int$ س لـوهـ س$^٣$ ءس

٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$ ٣س جاس ءس

٤) $\int \frac{\text{س}}{١ - \text{جتا}٢\text{س}}$ ءس

## مثال ٥

جد $\int$ س$^٢$ جاس ءس

**الحل**

افرض

ق = س$^٢$ ءق = ٢س ءس

ءهـ = جاس ءس هـ = − جتاس

وباستخدام القاعدة : $\int$ ق × ء هـ = ق × هـ − $\int$ هـ × ءق

$\int$ س$^٢$ جاس ءس = − س$^٢$ جتاس + $\int$ ٢س جتاس ءس

لاحظ أنَّ $\int$ ٢س جتاس ءس يمثل تكامل حاصل ضرب اقترانين ليس أحدهما مشتقة للآخر؛ لذلك استخدم التكامل بالأجزاء مرة أخرى.

افرض

ق = ٢س ءق = ٢ ءس

ءهـ = جتاس ءس هـ = جاس

$\int$ ٢س جتاس ءس = ٢س جاس − $\int$ ٢ جاس ءس

وعليه فإنَّ

$\int$ س$^٢$ جاس ءس = − س$^٢$ جتاس + ٢س جاس − $\int$ ٢ جاس ءس

= − س$^٢$ جتاس + ٢س جاس + ٢ جتاس + جـ

## تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية :

١) $\int$ س$^{٢}$ هـ$^{س}$ ؏س   ٢) $\int$ س (لـوهـ س)$^{٢}$ ؏س

ويمكن حل مثال (٥) بطريقة أخرى تسمى **طريقة الجدول (Tabular Method)**

وفي ما يلي توضيح لخطوات هذه الطريقة: لحل $\int$ س$^{٢}$ جاس ؏س

على فرض أنَّ: ق = س$^{٢}$ ، ل(س) = جاس

١) اشْتَقَّ الاقتران ق عدة مرات حتى تحصل على (٠)، وأدرج النتائج في العمود الأول كما في الجدول التالي.

٢) أجرِ التكامل للاقتران ل(س) بعدد مرات تفاضل (ق)، وأدرج النتائج في العمود الثاني من الجدول.

٣) ارسم أسهمًا من مدخلة العمود الأول إلى المدخلة الثانية للعمود الثاني بشكل قطري.

٤) ضع إشارة + و − بالتناوب على الأسهم بدءًا بـ(+)

٥) وبذلك يكون الناتج النهائي كما يلي :

| ق (إجراء التفاضل) | | ؏هـ (إجراء التكامل) |
|---|---|---|
| س$^{٢}$ | + | جاس |
| ٢س | − | − جتاس |
| ٢ | + | − جاس |
| صفر | | جتاس |

$\int$ س$^{٢}$ جاس ؏س = س$^{٢}$ × − جتاس − ٢س × − جاس + ٢ × جتاس + جـ

= − س$^{٢}$ جتاس + ٢س جاس + ٢ جتاس + جـ

**ملاحظة: حالات استخدام طريقة الجدول**

حاصل ضرب اقترانين أحدهما كثير حدود، والاقتران الآخر على إحدى الصور الآتية:

١) جا أ س   ٢) جتا أ س   ٣) هـ$^{أس}$   ٤) (أس + ب)$^{ن}$ ، ن ≠ − ١، أ ≠ صفرًا

## تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ س$^{٣}$ هـ$^{س}$ ؏س   ٢) $\int$ س$^{٢}$ جتا ٤س ؏س

٣) $\int$ (س$^{٢}$ − س) جا ٢س ؏س   ٤) $\int$ س$^{٢}$ (٢س + ١)$^{٥}$ ؏س

## مثال ٦

جد $\int$ س$^{٥}$ جتاس$^{٣}$ ءس

**الحل**

افرض ص = س$^{٣}$ ، ومنه ءص = ٣س$^{٢}$ ءس

$\int$ س$^{٥}$ جتاس$^{٣}$ ءس = $\int \frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ جتاس$^{٣}$ (٣س$^{٢}$ ءس) = $\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص

والآن استخدم طريقة التكامل بالأجزاء لإجراء تكامل المقدار $\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص

افرض

ق = $\frac{١}{٣}$ ص   ءق = $\frac{١}{٣}$ ءص

ءهـ = جتاص ءص   هـ = جاص

$\int \frac{١}{٣}$ ص جتاص ءص = $\frac{١}{٣}$ ص × جاص − $\int \frac{١}{٣}$ جاص ءص

= $\frac{١}{٣}$ ص × جاص + $\frac{١}{٣}$ جتاص + جـ

= $\frac{١}{٣}$ س$^{٣}$ × جا س$^{٣}$ + $\frac{١}{٣}$ جتا س$^{٣}$ + جـ

### تدريب ٥

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int$ قا$^{٢}$س هـ$^{\sqrt{\text{ظاس}}}$ ءس

٢) $\int$ جا٢س هـ$^{\text{جاس}}$ ءس

٣) $\int$ جتا $\sqrt{٢س + ١}$ ءس

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}}$ ٣قا$^{٤}$س لو$_{هـ}$ ظاس ءس

## مثال ٧

جد $\int هـ^{٢س}\ جاس\ ءس$

**الحل**

افرض $ق = هـ^{٢س}$ $\qquad\qquad$ $ءق = ٢هـ^{٢س}$

$ءهـ = جاس\ ءس$ $\qquad\qquad$ $هـ = -\ جتاس$

$\int هـ^{٢س}\ جاس\ ءس = -هـ^{٢س} جتاس + ٢\int هـ^{٢س} جتاس\ ءس$ $\qquad$ ( $\int هـ^{٢س} جتاس\ ءس$ تكامل بالأجزاء)

$= -هـ^{٢س} جتاس + ٢(هـ^{٢س} جاس - ٢\int هـ^{٢س}\ جاس\ ءس)$

ومنه $\int هـ^{٢س}\ جاس\ ءس = \frac{٢}{٥} هـ^{٢س}\ جاس - \frac{١}{٥} هـ^{٢س}\ جتاس + جـ$

حل مثال (٧) بطريقة أخرى.

### تحدث

تحدّث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي:

١) لماذا سُميت طريقة التكامل بالأجزاء بهذا الاسم؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالأجزاء؟

١) جد كلاً من التكاملات الآتية:

أ ) $\int_{\cdot}^{\pi} (٢\text{س} + ١)\ \text{جتا}\ ٣\text{س}\ \text{ءس}$

ب) $\int \text{س}^{٢}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}\ \text{ءس}$

جـ) $\int_{-٢}^{١} ٥\text{س}\sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{ءس}$

د ) $\int \frac{\text{س جاس}}{\text{جتا}^{٣}\text{س}}\ \text{ءس}$

هـ) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ظاس}\ \text{ءس}$

و ) $\int \frac{\text{س}}{\text{هـ}^{٢\text{س}}}\ \text{ءس}$

ز ) $\int \text{جتا}\sqrt[٣]{\text{س}}\ \text{ءس}$

ح) $\int \text{جتاس}\ \ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

ط ) $\int \text{س}(\text{جاس} + \text{جتاس})^{٢}\ \text{ءس}$

ي ) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا}٣\text{س}\ \text{ءس}$

ك ) $\int \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س} + ٣)}{\sqrt{\text{س}+٣}}\ \text{ءس}$

ل ) $\int (\text{س}^{٢} - ٢\text{س})\sqrt{\text{س} + ٣}\ \text{ءس}$

م ) $\int \text{قا}^{٢}\text{س}\ \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{جاس}\ \text{ءس}$

ن ) $\int ٢\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جاس جتاس}\ \text{ءس}$

س) $\int (\text{س}^{٣} + ٢\text{س})\ \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{ءس}$

ع ) $\int \frac{\text{س هـ}^{\text{س}}}{(١ + \text{س})^{٢}}\ \text{ءس}$

٢) إذا كان $\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\text{ءس} = ٣$ ، $\text{ق}(١) = ٥$ ، $\text{ق}(٢) = ٨$ ، فاحسب قيمة $\int_{١}^{٢} \text{س ق}'(\text{س})\text{ءس}$

٣) إذا كان ق اقترانًا قابلًا للاشتقاق على مجموعة الأعداد الحقيقية ح وكان
$\int_{١}^{٢} \text{ق}(\text{س})\ \text{ءس} = ١٠$ ، $\text{ق}(٢) = ٣$ ، $\text{ق}(١) = -١$ ، فجد قيمة $\int_{\cdot}^{١} \text{س}^{٥}\ \text{ق}'(\text{س}^{٣} + ١)\text{ءس}$

## ثالثًا التكامل بالكسور الجزئية
## Integration by Partial Fractions

**نشاط**

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) بيّن أنَّ م(س) = لـوهـ|س − ١| − لـوهـ|س + ١| معكوس لمشتقة الاقتران ق(س) = $\frac{٢}{س^٢ - ١}$

٢) جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ١}$ ءس

٣) جزّئ الكسر $\frac{٢}{س^٢ - ١}$

٤) جد تكامل المقدار الناتج من تجزئة الكسر في (٣)، ماذا تلاحظ؟

**مثال ١**

جد $\int \frac{٢}{س^٢ - ٤}$ ءس

**الحل**

$\frac{٢}{س^٢ - ٤} = \frac{٢}{(س - ٢)(س + ٢)}$ تحليل المقام

افرض: $\frac{٢}{(س - ٢)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ٢} + \frac{ب}{س + ٢}$

$= \frac{أ(س + ٢) + ب(س - ٢)}{(س - ٢)(س + ٢)}$ توحيد المقامات

من هذه المساواة يمكنك استنتاج أنَّ:

٢ = أ(س + ٢) + ب(س − ٢) تساوي كسرين لهما المقام نفسه

يمكنك إيجاد أ ، ب بتعويض قيم محددة لـ س، ولتكن أصفار المقام

عندما س = ٢ ← ٢ = ٤ أ ← أ = $\frac{١}{٢}$

عندما س = −٢ ← ٢ = −٤ ب ← ب = $\frac{-١}{٢}$

ومنه $\int \frac{٢}{س^{٢} - ٤}$ ءس = $\int \frac{٢}{(س-٢)(س+٢)}$ ءس

= $\int \frac{\frac{١}{٢}}{س-٢}$ ءس − $\int \frac{\frac{١}{٢}}{س+٢}$ ءس

= $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|س−٢| − $\frac{١}{٢}$ لـو$_{هـ}$|س + ٢| + جـ

وتسمى عملية إجراء التكامل على هذا النحو **بالتكامل بالكسور الجزئية**

**ملاحظة**

١) عند تجزئة الاقتران النسبي يجب أن تكون درجة البسط أقل من درجة المقام.

٢) عند تجزئة الاقتران النسبي يجب أن يكون مقام كل من الاقترانات الجزئية عاملاً من عوامل مقام الاقتران الأصلي.

٣) إذا كانت درجة البسط أكبر من أو تساوي درجة المقام، نقوم بإجراء القسمة الطويلة ثم نجزِّئ الكسر.

٤) سنناقش في هذا الدرس اقترانات نسبية مقامها من الدرجة الثانية، ويمكن تحليله.

**تدريب ١**

جد $\int \frac{٥}{س^{٢} - ٤س + ٣}$ ءس

**مثال ٢**

جد $\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{س^{٢} + س - ٢}$ ءس

**الحل**

$$\frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢} = \frac{٤س - ١}{(س - ١)(س + ٢)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ٢}$$

$٤س - ١ = أ(س + ٢) + ب(س - ١)$

بتعويض $س = ١$ ، تجد أنَّ $أ = ١$

بتعويض $س = -٢$ ، تجد أنَّ $ب = ٣$

إذن

$$\int_{٢}^{٤} \frac{٤س - ١}{س^٢ + س - ٢} \, ءس = \int_{٢}^{٤} \frac{١}{س - ١} \, ءس + \int_{٢}^{٤} \frac{٣}{س + ٢} \, ءس$$

$$= \left[ لو_هـ |س - ١| \right]_{٢}^{٤} + \left[ ٣ لو_هـ |س + ٢| \right]_{٢}^{٤}$$

$$= لو_هـ ٣ - لو_هـ ١ + ٣ لو_هـ ٦ - ٣ لو_هـ ٤ = لو_هـ \frac{٨١}{٨}$$

**تدريب ٢**

جد $\int \frac{س - ١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} \, ءس$

**مثال ٣**

جد $\int \frac{٢س^٢ + ٣}{س^٢ - س} \, ءس$

**الحل**

لاحظ أنَّ درجة البسط تساوي درجة المقام؛ لذلك

أجرِ عملية القسمة الطويلة؛ كما هو موضح جانبًا

$$\begin{array}{r|l} ٢ & \\ \hline ٢س^٢ + ٣ & س^٢ - س \\ -(٢س^٢ - ٢س) & \\ \hline ٢س + ٣ & \end{array}$$

$$\frac{٢س^٢ + ٣}{س^٢ - س} = ٢ + \frac{٢س + ٣}{س^٢ - س}$$

جزِّئ الكسر $\frac{٢س + ٣}{س^٢ - س}$

$$\frac{٢س + ٣}{س^٢ - س} = \frac{٢س + ٣}{س(س - ١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س - ١}$$

$٢س + ٣ = أ(س - ١) + ب س$

بتعويض $س = ٠$ تجد أنَّ $أ = -٣$

بتعويض $س = ١$ تجد أنَّ $ب = ٥$

إذن $\int \frac{٢س^٢ + ٣}{س^٢ - س} ءس = \int ٢ ءس + \int \frac{-٣}{س} ءس + \int \frac{٥}{س - ١} ءس$

$= ٢س - ٣ لـو_هـ |س| + ٥ لـو_هـ |س - ١| + جـ$

## تدريب ٣

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{س^٢ + س + ٥}{س^٢ + س} ءس$ ٢) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^٣ + س}{س - ١} ءس$

## فكر وناقش

قام كلٌّ من أحمد وعلي بإيجاد $\int \frac{٢س^٢}{س^٢ - ١} ءس$ فكانت إجابة كلٍّ منهما كما يأتي:

أحمد : $٢س + لـو_هـ |س - ١| - لـو_هـ |س + ١| + جـ$

علي : $لـو_هـ |س - ١| - لـو_هـ |س + ١| + جـ$

**ناقش:** (أيّ منهما إجابته صحيحة) . مبررًا إجابتك.

## مثال ٤

جد $\int \frac{٢}{س - ٣\sqrt{س} - ٤} ءس$

**الحل**

افرض $ص = \sqrt{س}$ فتكون $ص^٢ = س$ ، ومنه $٢ص ءص = ءس$ اشتقاق ضمني

$\int \frac{٢}{س - ٣\sqrt{س} - ٤} ءس = \int \frac{٢}{ص^٢ - ٣ص - ٤} \times ٢ص ءص = \int \frac{٤ص}{ص^٢ - ٣ص - ٤} ءص$

استخدم الكسور الجزئية لإيجاد $\int \frac{٤ص}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} ء س$

$$\frac{٤ص}{ص^{٢} - ٣ص - ٤} = \frac{٤ص}{(ص - ٤)(ص + ١)} = \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ١}$$

$$٤ص = أ(ص + ١) + ب(ص - ٤)$$

عندما ص $= ٤$ فإنَّ أ $= \frac{١٦}{٥}$ عندما ص $= -١$ فإنَّ ب $= \frac{٤}{٥}$

$$\int \frac{٤ص}{س^{٢} - ٣ص - ٤} ءص = \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص - ٤} ءص + \int \frac{\frac{٤}{٥}}{ص + ١} ءص$$

$$= \frac{١٦}{٥} لو_{هـ} |ص - ٤| + \frac{٤}{٥} لو_{هـ} |ص + ١| + جـ$$

$$= \frac{١٦}{٥} لو_{هـ} |\sqrt{س} - ٤| + \frac{٤}{٥} لو_{هـ} |\sqrt{س} + ١| + جـ$$

## مثال ٥

جد $\int \frac{٨هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ١٦} ءس$

**الحل**

افرض ص $=$ هـ$^{س}$ ، ومنه ءص $=$ هـ$^{س}$ ءس

$$\int \frac{٨هـ^{س}}{هـ^{٢س} - ١٦} ءس = \int \frac{٨}{(هـ^{س})^{٢} - ١٦} \times هـ^{س} ءس = \int \frac{٨}{ص^{٢} - ١٦} ءص$$

$$\frac{٨}{ص^{٢} - ١٦} = \frac{٨}{(ص - ٤)(ص + ٤)} = \frac{أ}{ص - ٤} + \frac{ب}{ص + ٤}$$

$$٨ = أ(ص + ٤) + ب(ص - ٤)$$

عندما ص $= ٤$ فإنَّ أ $= ١$ ، عندما ص $= -٤$ فإنَّ ب $= -١$

$$\int \frac{٨}{ص^{٢} - ١٦} ءص = \int \frac{١}{ص - ٤} ءص + \int \frac{-١}{ص + ٤} ءص$$

$$= لو_{هـ} |ص - ٤| - لو_{هـ} |ص + ٤| + جـ = لو_{هـ} |هـ^{س} - ٤| - لو_{هـ} |هـ^{س} + ٤| + جـ$$

## تدريب ٤

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\,\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\,\text{ظاس} - ٢}\, \text{ءس}$

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\, \text{ءس}$

٣) $\int_{٠}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}\, \text{ءس}$

### تحدث

تحدث إلى زملائك عن كلٍّ مما يأتي :

١) لماذا سُميت طريقة التكامل السابقة بالتكامل بالكسور الجزئية؟

٢) متى تستخدم طريقة التكامل بالكسور الجزئية؟

جد كلًّا من التكاملات الآتية:

١) $\int \frac{٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ١٠}\,\text{ءس}$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} - ٤\text{س} - ١٢}\,\text{ءس}$

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|١ - \text{س}|}{\text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ٦}\,\text{ءس}$

٤) $\int \frac{\text{س}^{٣} + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^{٢} - ٩}\,\text{ءس}$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣\text{س}^{٢} + ٣}{٣\text{س}^{٢} - \text{س} - ٤}\,\text{ءس}$

٦) $\int \frac{\text{ظاس}}{٢٥ - (\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{جتاس})^{٢}}\,\text{ءس}$

٧) $\int \frac{١}{\text{هـ}^{\text{س}} + ١}\,\text{ءس}$

٨) $\int \frac{\text{هـ}^{٣\text{س}}}{\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٣\text{هـ}^{\text{س}} - ٤}\,\text{ءس}$

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{\text{س}}}{\text{س} - ٤}\,\text{ءس}$

١٠) $\int \frac{\text{جتاس}}{١ + ٣\text{جاس} - \text{جتا}٢\text{س}}\,\text{ءس}$

١١) $\int \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{٢} - ٩)\,\text{ءس}$

١٢) $\int \frac{\text{س}}{\text{س}^{٤} + \text{س}^{٢}}\,\text{ءس}$

١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\text{ءس}}{\text{س} - ٣\sqrt{\text{س}} + ٢}$

١٤) $\int \frac{\sqrt{\text{س} - ٢} + ١}{\sqrt{٤\text{س} - ٨} - ٢}\,\text{ءس}$

١٥) $\int \sqrt{١ - \text{هـ}^{\text{س}}}\,\text{ءس}$

١٦) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥ - \text{قا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

١٧) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتاس}}{٨ + \text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{ءس}$

١٨) $\int \frac{\text{ءس}}{\text{س}\,(\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - ٤\text{س}}$

# الفصل الثالث

# تطبيقات التكامل

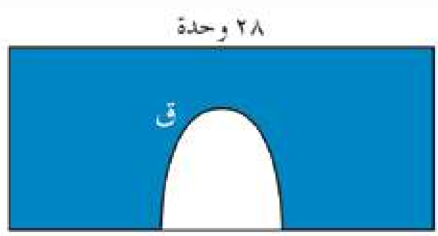
## Applications of the Integral

**النتاجات**

- تستخدم التكامل لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات على الأكثر.
- تـحلّ معادلات تفاضلية.
- تـحلّ مسائل في مواقف حياتية تتضمن علاقات ضمنية.

## أولًا المساحة Area

الشكل (٤–١٠) يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني وشكل المدخل لهذا المبنى يمثله منحنى $\text{ق}(\text{س}) = ٨ - \frac{\text{س}^٢}{٢}$ ، ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة الملوّنة باللون الأزرق؛ إذا علمت أنَّ سعر الدهان للوحدة المربعة (٤٠) قرشًا؟




الشكل (٤–١٠)

تعلمت سابقًا حساب مساحة منطقة مستوية على شكل مضلع أو دائرة، وفي هذا الدرس ستتعلم كيفية حساب مساحة منطقة محصورة بين أكثر من منحنى لا يمكن حسابها بالطرق المعتادة.

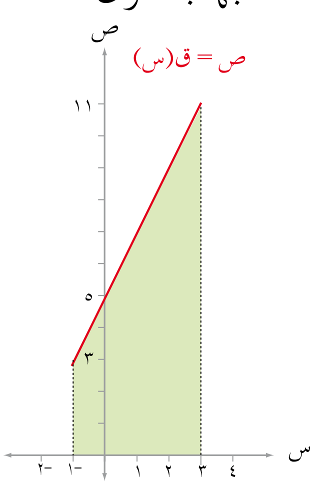
### إيجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنى اقتران ومحور السينات

**مثال ١**

اعتمادًا على الشكل (٤–١١) الذي يمثل منحنى الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ٢\text{س} + ٥$ في الفترة $[-١ ، ٣]$

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمَيْن $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٣$




الشكل (٤–١١)

٢) جد $\int_{-1}^{3} |ق(س)|\, ءس$

**الحل**

١) لاحظ أنَّ المنطقة المطلوبة على شكل شبه منحرف

م = $\frac{1}{2}$ ( مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين) × الارتفاع

م = $\frac{1}{2}$ ( ق(-١) + ق(٣) ) × ( ٣ - (-١) )

م = $\frac{1}{2}$ ( ٣ + ١١ ) ( ٤ ) = ٢٨ وحدة مساحة

٢) $\int_{-1}^{3} |ق(س)|\, ءس = \int_{-1}^{3} (٢س+٥)\, ءس = [س^{2} + ٥س]_{-1}^{3}$

= ( ٩ + ١٥ ) - ( ١ - ٥ ) = ٢٨

ماذا تلاحظ؟

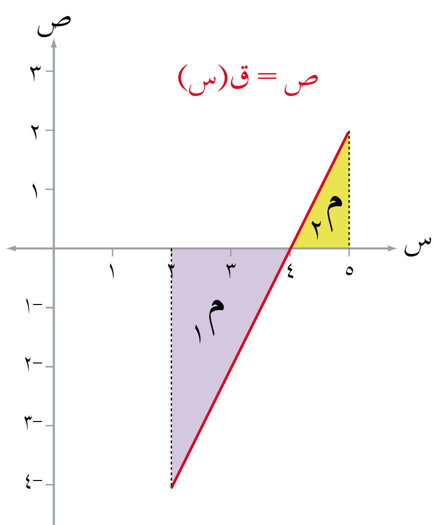
## مثال ٢

اعتمادًا على الشكل ( ٤ - ١٢ ) الذي يمثل منحنى

ق(س) = ٢س - ٨ في الفترة [ ٢ ، ٥ ] أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) احسب مساحة المنطقة المظللة.

٢) جد $\int_{2}^{5} |ق(س)|\, ءس$




الشكل (٤-١٢)

**الحل**

لاحظ أنَّ المنطقة المطلوبة عبارة عن منطقتين، كل واحدة على شكل مثلث، إذن

$م_{1}$ = $\frac{1}{2}$ × طول القاعدة × الارتفاع

= $\frac{1}{2}$ × (٤ - ٢) × ٤ = ٤ وحدة مساحة

$م_{2}$ = $\frac{1}{2}$ × ١ × ٢ = ١ وحدة مساحة

ولكن م = $م_{1}$ + $م_{2}$

م = ٤ + ١ = ٥ وحدة مساحة

٢) $\int_{2}^{5} |ق(س)|\, ءس = \int_{2}^{4} (٨ - ٢س)\, ءس + \int_{4}^{5} (٢س - ٨)\, ءس$

$= [٨س - س^{2}]_{2}^{4} + [س^{2} - ٨س]_{4}^{5}$

= (٣٢ – ١٦) – (١٦ – ٤) + (٢٥ – ٤٠) – (١٦ – ٣٢)

= ٥

ماذا تستنتج؟

لابد أنَّك لاحظت في المثالين (١) ، (٢) أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات والمستقيمين س = أ ، س = ب ، تساوي $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس}$

**قاعدة**

إذا كان ق اقترانًا قابلًا للتكامل في الفترة [ أ ، ب] فإنَّ مساحة المنطقة ( م ) المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] تُعطى وفق القاعدة م = $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} |\text{ق(س)}|\,\text{ءس}$

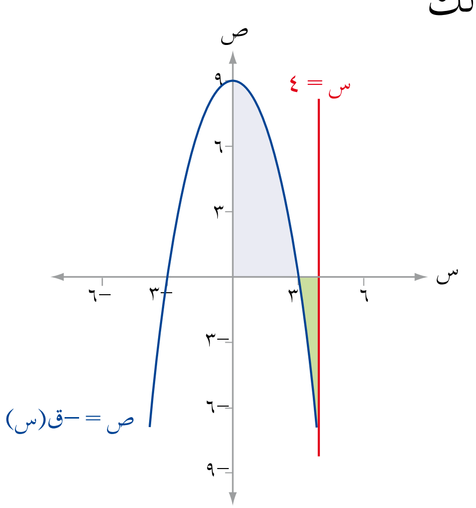
لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ومحور السينات في فترة محددة؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) ارسم منحنى الاقتران، وحدّد المنطقة المطلوبة.

٢) جد أصفار الاقتران، ثم جزِّئ المنطقة المطلوبة حسب موقعها من محور السينات ( فوق محور السينات، تحت محور السينات).

٣) احسب مساحة كلِّ منطقة جزئية على حدة؛ باستخدام التكامل مع الانتباه إلى أنَّ قيمة المساحة يجب أن تكون موجبة.

٤) اجمع المساحات التي حصلت عليها في خطوة (٣)، وبذلك تكون قد حصلت على مساحة المنطقة المطلوبة.




الشكل (٤–١٣)

**مثال ٣**

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٩ – $\text{س}^{٢}$ و محور السينات على الفترة [٠ ، ٤]

**الحل**

المنطقة المظللة في الشكل (٤– ١٣) تمثل المساحة المطلوبة

$$م = \int_{٠}^{٤} |ق(س)|\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{٣} (٩ - س^{٢})\,ءس + \int_{٣}^{٤} (س^{٢} - ٩)\,ءس$$

$$= \left[\frac{-س^{٣}}{٣} + ٩س\right]_{٠}^{٣} + \left[\frac{س^{٣}}{٣} - ٩س\right]_{٣}^{٤}$$

$$= (-٩ + ٢٧) - \text{صفر} + (\frac{٦٤}{٣} - ٣٦) - (٩ - ٢٧)$$

$$= \frac{٦٤}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

## تدريب ١

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $ق(س) = ٢ - \sqrt{س}$ ، وكلٍّ من محوري السينات والصادات.

## مثال ٤

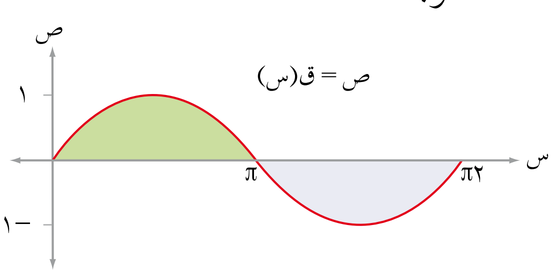
إذا كان $ق(س) = جاس$ ، $س \in [٠ ، ٢\pi]$ فجد كلًّا مما يأتي :

١) مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة $[٠، ٢\pi]$

٢) $\int_{٠}^{٢\pi} ق(س)\,ءس$

**الحل**

١) الشكل (٤-١٤) يوضح منحنى الاقتران ق والمنطقة المطلوبة



الشكل (٤-١٤)

$$م = \int_{٠}^{٢\pi} |ق(س)|\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{٢\pi} |جاس|\,ءس$$

$$= \int_{٠}^{\pi} جاس\,ءس + \int_{\pi}^{٢\pi} -جاس\,ءس$$

$$= -[جتاس]_{٠}^{\pi} + [جتاس]_{\pi}^{٢\pi}$$

$$= (-جتا(\pi) + جتا(\text{صفر})) + (جتا(٢\pi) - جتا(\pi))$$

$$= (١ + ١) + (١ + ١) = ٤ \text{ وحدة مساحة}$$

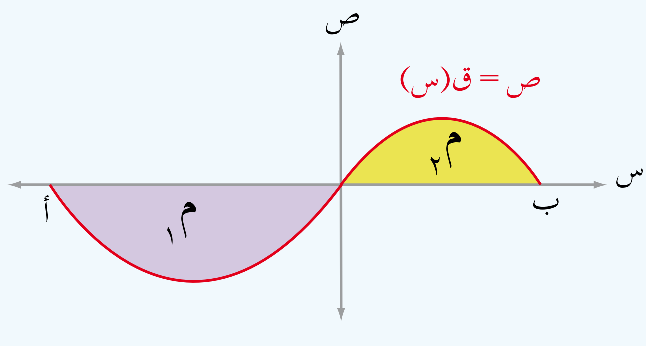
٢) $\int_{٠}^{٢\pi} ق(س)\,ءس = \int_{٠}^{٢\pi} جاس\,ءس = -[جتاس]_{٠}^{٢\pi}$

$$= (-جتا(٢\pi) + جتا(٠)) = (-١ + ١) = \text{صفرًا}$$

**فكر وناقش**

ناقش مع زملائك الإجابات التي حصلت عليها في فرعَي مثال (٤).

## تدريب ٢



الشكل (٤–١٥)

يمثل الشكل (٤–١٥) المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق، ومحور السينات في الفترة [أ ، ب] فإذا علمت أنَّ مساحة المنطقة (م$_1$) تساوي (٨) وحدات مربعة، ومساحة المنطقة (م$_2$) تساوي (٥) وحدات مربعة

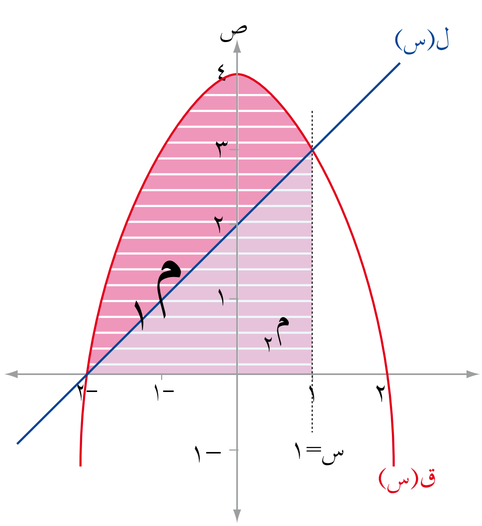
فجد $\int_{أ}^{ب}$ ق(س)ءس.

## تدريب ٣

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتا(πس) ومحور السينات في الفترة [٠ ، ٢]

### إيجاد مساحة منطقة محصورة بين منحنيين

**مثال ٥**



الشكل (٤–١٦)

اعتمادًا على الشكل (٤–١٦) الذي يمثل منحنى ق(س) = ٤ – س$^2$ ، والمستقيم ل(س) = س + ٢

أجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) جد مساحة المنطقة (م$_1$) المحصورة بين منحنى الاقتران ق ومحور السينات في الفترة [–٢ ، ١]

٢) جد مساحة المنطقة (م$_2$) المحصورة بين منحنى الاقتران ل ومحور السينات في الفترة [–٢ ، ١]

٣) جد قيمة م$_1$ – م$_2$

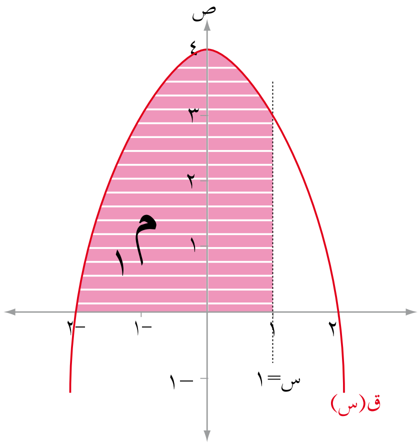
٤) جد قيمة $\int_{-٢}^{١}$ (ق(س) – ل(س)) ءس، ماذا تلاحظ؟

## الحل

١) الشكل (٤-١٧) يوضح منحنى الاقتران ق والمنطقة المطلوبة

$$\text{م}_{١} = \int_{-٢}^{١} (٤ - \text{س}^{٢})\, \text{ءس} = ٤\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} \Big]_{-٢}^{١}$$

$$= (٤ - \frac{١}{٣}) - (-٨ + \frac{٨}{٣}) = ٩ \text{ وحدات مساحة}$$

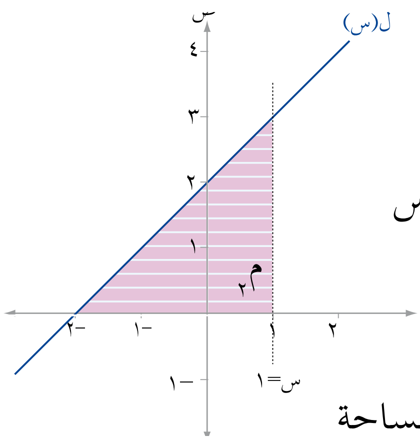



الشكل (٤-١٧)

٢) الشكل (٤-١٨) يوضح منحنى الاقتران ل والمنطقة المطلوبة

$$\text{م}_{٢} = \int_{-٢}^{١} (\text{س} + ٢)\, \text{ءس} = \Big[\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٢\text{س}\Big]_{-٢}^{١}$$

$$= (\frac{١}{٢} + ٢) - (٢ - ٤) = ٤,٥ \text{ وحدة مساحة}$$




الشكل (٤-١٨)

٣) $\text{م}_{١} - \text{م}_{٢} = ٩ - ٤,٥ = ٤,٥$ وحدة مساحة

٤) $$\int_{-٢}^{١} (\text{ق(س)} - \text{ل(س)})\, \text{ءس} = \int_{-٢}^{١} ((٤ - \text{س}^{٢}) - (\text{س} + ٢))\, \text{ءس}$$

$$= \int_{-٢}^{١} (٢ - \text{س}^{٢} - \text{س})\, \text{ءس} = ٢\text{س} - \frac{\text{س}^{٣}}{٣} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} \Big]_{-٢}^{١}$$

$$= (٢ - \frac{١}{٣} - \frac{١}{٢}) - (-٤ + \frac{٨}{٣} - ٢) = ٤,٥ \text{ وحدة مساحة}$$

لابد أنَّك لاحظت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى

الاقتران ق والمستقيم ل(س) في الفترة [−٢ ، ١] هي : $\int_{-٢}^{١} (\text{ق(س)} - \text{ل(س)})\, \text{ءس}$

**قاعدة**

إذا كان ق، هـ اقترانين متصلين على الفترة [أ ، ب] وكان ق(س) ≥ هـ(س) لكل س ∈ [أ ، ب]

فإنَّ مساحة المنطقة المحصورة بينهما في الفترة [أ ، ب] هي: $\text{م} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{ق(س)} - \text{هـ(س)})\, \text{ءس}$

لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيين؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) جد نقط تقاطع المنحنييْن.

٢) ارسم منحنى كلِّ اقتران، وحدِّد المنطقة المطلوب حساب مساحتها.

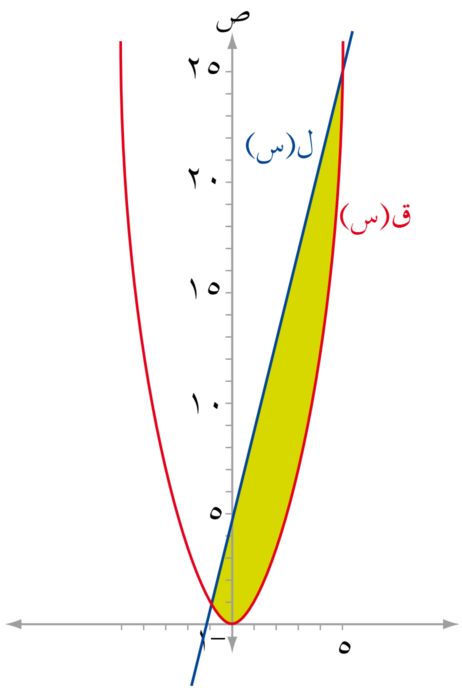
٣) احسب مساحة كلِّ منطقة جزئية على حدة باستخدام التكامل المحدود.

٤) اجمع مساحات المناطق الجزئية التي حصلت عليها في خطوة (٣)، فيكون الناتج المساحة المطلوبة.

## مثال ٦

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران

ق(س) = س$^{٢}$ ومنحنى الاقتران ل (س) = ٤س + ٥



الشكل (٤-١٩)

### الحل

جد نقط تقاطع المنحنيين

س$^{٢}$ = ٤س + ٥، ومنه س$^{٢}$ −٤س − ٥ = صفرًا

(س− ٥) (س + ١) = صفرًا ،منه س =٥ ، س =−١

نقط التقاطع هي:(−١،١) ، (٥،٢٥)

لاحظ أنَّ ل(س) ≤ ق(س) لكلِّ س ∈[−١، ٥]

انظر الشكل(٤−١٩)

م = $\int_{-١}^{٥}$ (ل(س) − ق(س)) ءس= $\int_{-١}^{٥}$ (٤ س + ٥ − س$^{٢}$)ءس

=٢س$^{٢}$ + ٥س− $\frac{س^{٣}}{٣}$ ]$_{-١}^{٥}$ = (٥٠+٢٥ − $\frac{١٢٥}{٣}$) − (٢ − ٥+ $\frac{١}{٣}$)

=٣٦ وحدة مساحة

## تدريب ٤

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ٤ س$^{٢}$−٣س ، هـ(س)=٥س

## مثال ٧

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = جتاس ، والقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين (٠،١) ، ($\frac{\pi}{٢}$،٠)

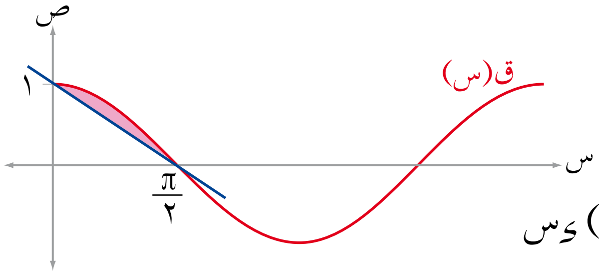
### الحل

أولًا جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٠،١)، ($\frac{\pi}{٢}$،٠): ميل المستقيم = $\frac{ص_{٢} − ص_{١}}{س_{٢} − س_{١}}$

= $\frac{٠ − ١}{\frac{\pi}{٢} − ٠}$ = $\frac{-٢}{\pi}$

معادلة المستقيم: ص = $\frac{-٢}{\pi}$ (س − $\frac{\pi}{٢}$) ومنه ص= $\frac{-٢}{\pi}$س + ١

انظر الشكل (٤ - ٢٠)




الشكل (٤-٢٠)

$$م = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} (ق - ص)\, ءس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \left(\text{جتاس} + \frac{٢}{\pi}س - ١\right) ءس$$

$$= \left[\text{جاس} + \frac{س^{٢}}{\pi} - س\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} = \left(١ - \frac{\pi}{٤}\right) \text{ وحدة مساحة}$$

## مثال ٨

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين

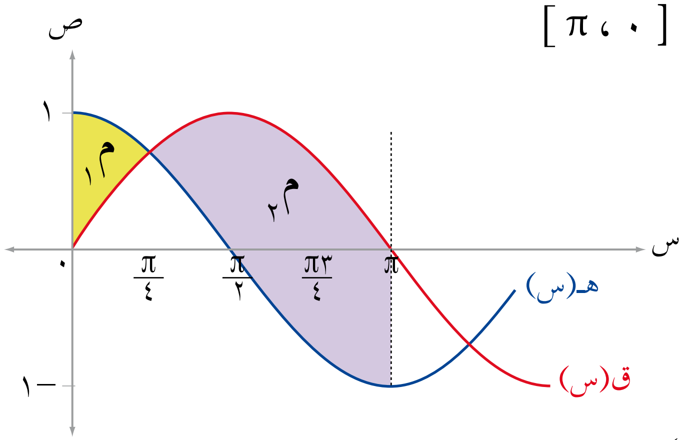
ق(س) = جاس، هـ(س) = جتاس في الفترة [ ٠ ، π ]

### الحل

جد نقط تقاطع المنحنيين في الفترة [ ٠ ، π ]

بتعويض جاس = جتاس ومنها س = $\frac{\pi}{٤}$

انظر الشكل (٤ - ٢١)




الشكل (٤-٢١)

$$م_{١} = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (هـ - ق)\, ءس = \int_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\, ءس$$

$$= \left[(\text{جاس} + \text{جتاس})\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٤}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) - ١ = (\sqrt{٢} - ١) \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_{٢} = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (ق - هـ)\, ءس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi} (\text{جاس} - \text{جتاس})\, ءس = \left[(-\text{جتاس} - \text{جاس})\right]_{\frac{\pi}{٤}}^{\pi}$$

$$= ١ - \left(-\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}}\right) = (١ + \sqrt{٢}) \text{ وحدة مساحة}$$

إذن المساحة المطلوبة هي: $م = م_{١} + م_{٢}$

ومنه $م = \sqrt{٢} - ١ + ١ + \sqrt{٢} = ٢\sqrt{٢}$ وحدة مساحة

## تدريب ٥

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقترانين ق(س) = ١ + جاس،

هـ(س) = ١ + جتاس في الفترة $\left[\frac{\pi}{٢} ، \frac{٣\pi}{٢}\right]$.

## إيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات

لإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين ثلاثة منحنيات؛ اتبع الخطوات الآتية:

١) ارسم منحنى كلِّ اقتران وحدد المنطقة المطلوب حساب مساحتها.

٢) جزِّئ المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى مناطق جزئية؛ بحيث تكون كلٌّ منها محصورة بين منحنيين، أو منحنى ومحور السينات.

٣) جد الإحداثيات السينية لنقط تقاطع المنحنيات مع بعضها ومع محور السينات.

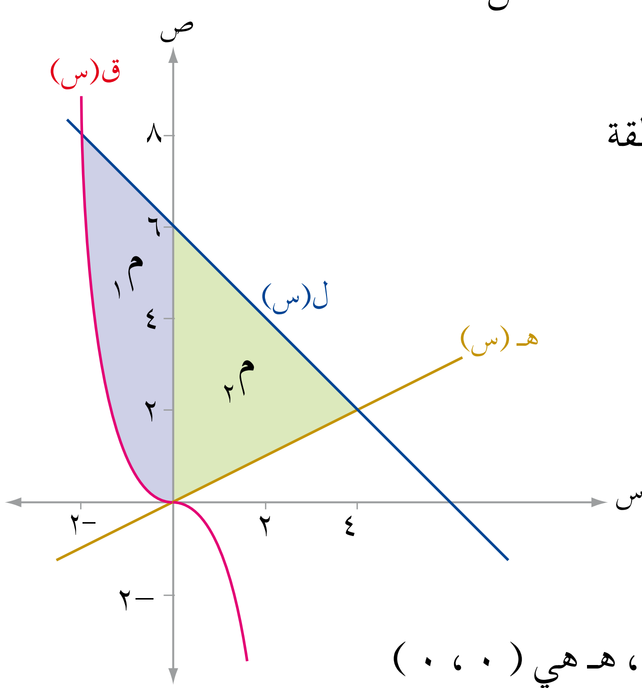
٤) جد مساحة كلِّ منطقة جزئية، ثم جد المساحة المطلوبة بجمع مساحات المناطق الجزئية.

**مثال ٩**

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

ق(س) = − س$^{٣}$ ، هـ(س) = $\frac{١}{٢}$ س ، ل(س) = ٦ − س

**الحل**



الشكل (٤−٢٢)

١) ارسم منحنيات الاقترانات الثلاثة وحدّد المنطقة المطلوبة انظر الشكل ( ٤ − ٢٢ )

٢) جد نقط التقاطع بين كلِّ منحنيين .

لتجد نقط التقاطع بين ق، هـ:

حُلَّ المعادلة

− س$^{٣}$ = $\frac{١}{٢}$ س ، س$^{٣}$ + $\frac{١}{٢}$ س = ٠

ومنه س= ٠

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ق، هـ هي ( ٠ ، ٠ )

لتجد نقط التقاطع بين ق، ل:

حُلَّ المعادلة :

− س$^{٣}$ = ٦ − س ، س$^{٣}$ − س + ٦ = ٠

(س + ٢) ( س$^{٢}$ −٢س + ٣ ) = ٠ ومنه س= − ٢

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي ق، ل هي (− ٢ ، ٨ )

لتجد نقاط التقاطع بين ل، هـ:

حُلّ المعادلة:

$$\text{٦} - \text{س} = \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{س} \quad \text{ومنه س} = \text{٤}$$

أي أنَّ نقطة التقاطع بين منحنيي ل، هـ هي ( ٤ ، ٢ )

٣) جزِّئ المنطقة المطلوب حساب مساحتها إلى جزأين:

$\text{م}_{\text{١}}$: المنطقة المحصورة بين منحنيي ل ، ق في [ −٢ ، ٠ ]

$\text{م}_{\text{٢}}$: المنطقة المحصورة بين منحنيي ل ، هـ في [ ٠ ، ٤ ]

٤) احسب المساحة كما تعملت في الأمثلة السابقة

$$\text{م}_{\text{١}} = \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} \left(\text{ل(س)} - \text{ق(س)}\right) \text{ءس} = \int_{-\text{٢}}^{\text{٠}} (\text{٦} - \text{س} + \text{س}^{\text{٣}})\, \text{ءس}$$

$$= \left[\text{٦س} - \frac{\text{س}^{\text{٢}}}{\text{٢}} + \frac{\text{س}^{\text{٤}}}{\text{٤}}\right]_{-\text{٢}}^{\text{٠}} = \text{صفر} - (-\text{١٢} - \text{٢} + \text{٤}) = \text{١٠ وحدات مساحة}$$

$$\text{م}_{\text{٢}} = \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \left(\text{ل(س)} - \text{هـ(س)}\right) \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \left(\text{٦} - \text{س} - \frac{\text{س}}{\text{٢}}\right) \text{ءس} = \int_{\text{٠}}^{\text{٤}} \left(\text{٦} - \frac{\text{٣س}}{\text{٢}}\right) \text{ءس}$$

$$= \left[\text{٦س} - \frac{\text{٣س}^{\text{٢}}}{\text{٤}}\right]_{\text{٠}}^{\text{٤}} = (\text{٢٤} - \text{١٢}) - \text{صفر} = \text{١٢ وحدة مساحة}$$

ولكن $\text{م} = \text{م}_{\text{١}} + \text{م}_{\text{٢}}$ ومنه م = ١٠ + ١٢ = ٢٢ وحدة مساحة

### تدريب ٦

جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

$\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{١}$ ، هـ(س) = ١ − س ، ل(س) = ٣

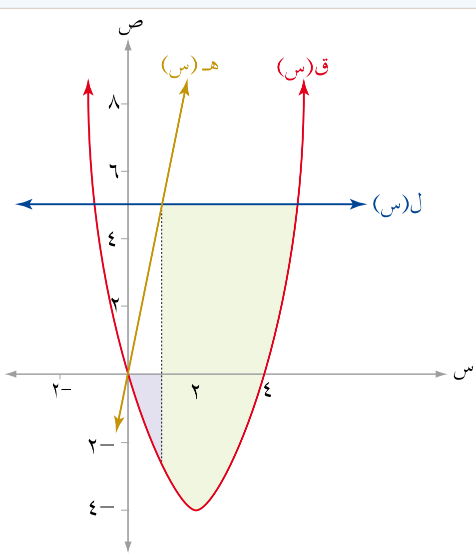
### مثال ١٠

جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل ( ٤ − ٢٣ )

حيث $\text{ق(س)} = \text{س}^{\text{٢}} - \text{٤س}$

هـ(س) = ٥س

ل(س) = ٥



الشكل (٤−٢٣)

**الحل**

جد نقط التقاطع بين منحنيي ل، هـ:

٥س = ٥ ← س = ١

إذن نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ل، هـ هي: (١ ، ٥)

جد نقطة التقاطع بين منحنيي الاقترانين ل ، ق:

$س^٢ - ٤س = ٥$، $س^٢ - ٤س - ٥ = $ صفرًا، $(س - ٥)(س + ١) = $ صفرًا

$س = ٥$، $س = -١$ تهمل (لماذا؟) إذن نقطة التقاطع بين منحنيي ل، ق هي: (٥ ، ٥)

لاحظ أنَّ: $م = م_١ + م_٢$

$$م_١ = \int_{٠}^{١} (-س^٢ + ٤س)\, ءس$$ لماذا؟

$$= -\left[\frac{س^٣}{٣} + ٢س^٢\right]_{٠}^{١} = \frac{-١}{٣} + ٢ = \frac{٥}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

$$م_٢ = \int_{١}^{٥} (ل(س) - ق(س))\, ءس = \int_{١}^{٥} (٥ - س^٢ + ٤س)\, ءس$$

$$= \left[٥س - \frac{س^٣}{٣} + ٢س^٢\right]_{١}^{٥} = (٢٥ - \frac{١٢٥}{٣} + ٥٠) - (٥ - \frac{١}{٣} + ٢) = \frac{٨٠}{٣} \text{ وحدة مساحة}$$

ولكن $م = م_١ + م_٢$ ومنه $م = \frac{٥}{٣} + \frac{٨٠}{٣} = \frac{٨٥}{٣}$ وحدة مساحة

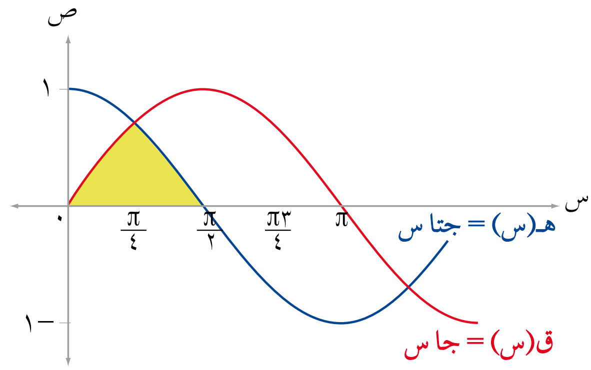
**فكر وناقش**

حُلّ مثال (١٠) بطريقة أخرى، وناقش الحل مع زملائك.

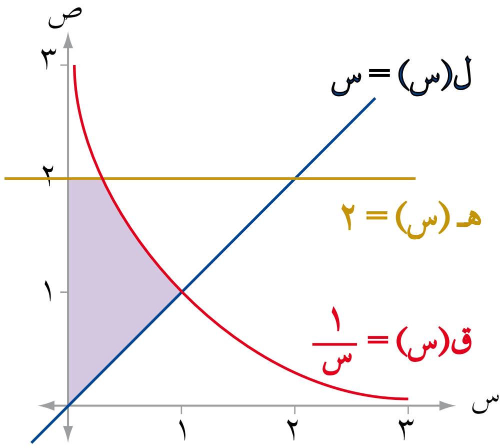
**تدريب ٧**

حُلَّ المسألة الواردة في مقدمة الدرس.

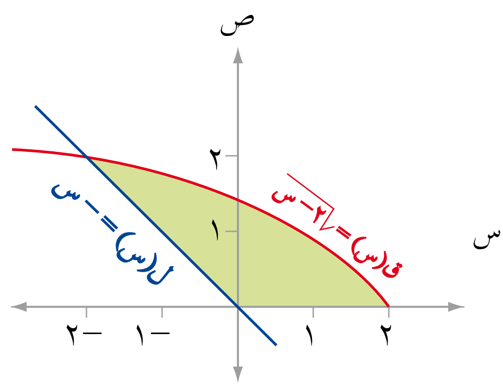
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



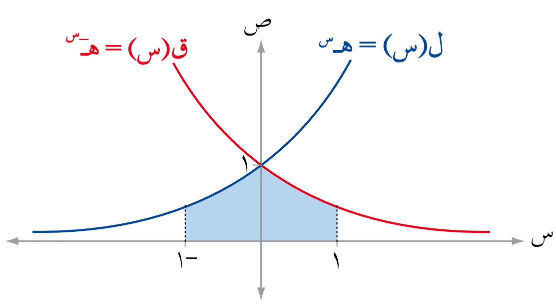

الشكل (٤–٢٤)



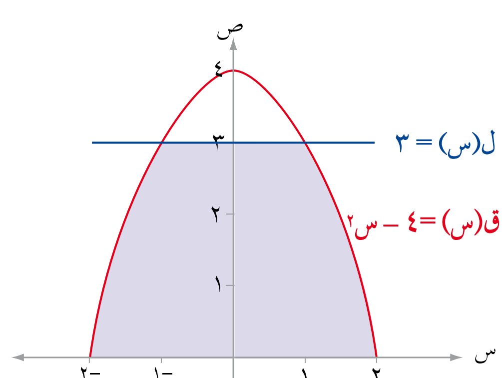

الشكل (٤–٢٥)



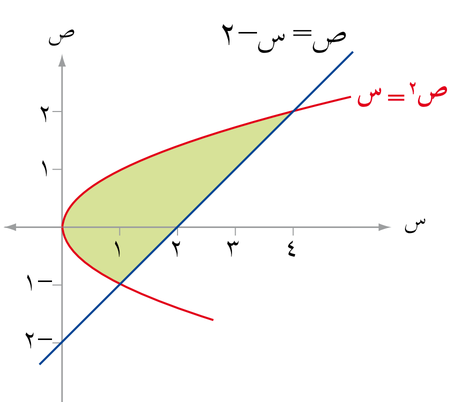

الشكل (٤–٢٦)




الشكل (٤–٢٧)




الشكل (٤–٢٨)




الشكل (٤–٢٩)

٢ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ٤ س$^{٣}$ – ٤ س ، ومحور السينات .

٣ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = ٤ س$^{٣}$ – ٣ س ، هـ(س) = ٥ س

٤ ) إذا كان ق(س) = ٣س$^{٢}$ –٣، جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى ق(س) ومحور السينات والمستقيمين س= – ٣ ، س= ٢

٥ ) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول و المحصورة بين المستقيم ص = ٨س ، ومنحنى الاقتران ص = ٩ – س$^{٢}$ ومحور السينات.

٦ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق(س) = جاس ، هـ(س) = جا٢س الواقعة في الربع الأول.

٧ ) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق ( س ) = $\frac{٢}{س}$ ، ومحور السينات و المستقيم ٢ س – ص = ٠ ، والمستقيم هـ – س = صفرًا ( هـ : العدد النيبيري )

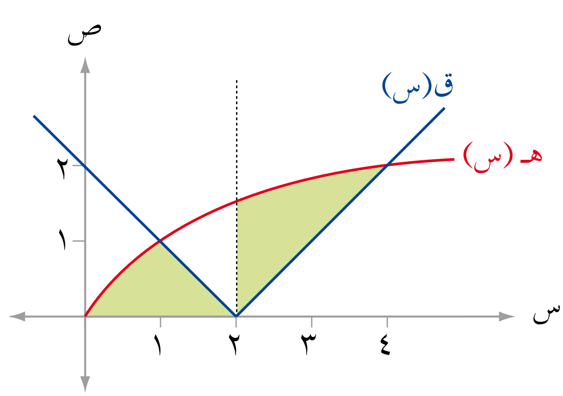
٨ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = ١ – س$^{٢}$ ، ومحور الصادات والمستقيم س + ص = ٥ و المستقيم ص = س – ١

٩ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق( س) = ١ + س$^{٣}$ ، ل( س) = س$^{٢}$ + ٥ والمستقيمين ص + س – ١ = ٠ ، ٣ – س = ٠

١٠ ) جد مساحة المنطقة الواقعة في الربع الأول المحصورة بين منحنى الاقتران ق(س) = س$^{٢}$ – ٤ ، والمستقيم ص = ٢ س + ٤ ، والمحورين الإحداثيين.

١١ ) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى العلاقة ص$^{٢}$ = ٤س والمستقيم س – ص= ٣

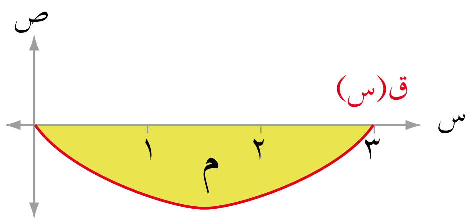
١٢ ) جد مساحة المنطقة المظللة في الشكل ( ٤ – ٣٠ ) حيث ق(س) = | س – ٢ | ، هـ(س) = $\sqrt{س}$



الشكل (٤–٣٠)

١٣) معتمدًا الشكل (٤ – ٣١) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في الفترة [ ٠، ٣ ] إذا كانت مساحة المنطقة (م) تساوي ٦ وحدات مربعة

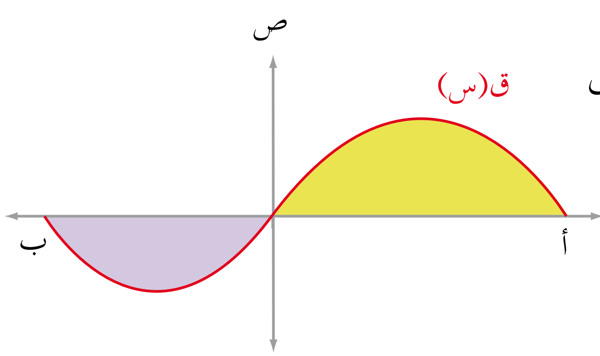
فجد $\int_{٠}^{٣}$ (٢– ق(س))ءس




الشكل (٤–٣١)

١٤) معتمدًا الشكل ( ٤ – ٣٢ )،إذا كانت مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى الاقتران ق( س) ومحور السينات تساوي ( ١٤ ) وحدة مربعة

وكان $\int_{٠}^{ب}$ ق(س)ءس= ٦ فما قيمة $\int_{أ}^{٠}$ ق(س)ءس




الشكل (٤–٣٢)

## ثانيًا المعادلات التفاضلية
## Differential Equations

إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س ، ص ) يساوي ٢ س ص، فجد قاعدة العلاقة ص.

يمكن إيجاد قاعدة العلاقة ص كما يأتي :

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{٢س ص}$ لماذا؟

وتسمى هذه المعادلة **بالمعادلة التفاضلية**

$\frac{\text{ءص}}{\text{ص}} = \text{٢س ءس}$ فصل المتغيرات

$\text{لـو}_{\text{هـ}} |\text{ص}| = \text{س}^{٢} + \text{جـ}$ إجراء التكامل للطرفين

$|\text{ص}| = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}+\text{جـ}}$ ومنه $|\text{ص}| = \text{جـ}_{١}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$ $|\text{ص}| = \text{هـ}^{\text{س}^{٢}} \times \text{هـ}^{\text{جـ}} = \text{جـ}_{١}\,\text{هـ}^{\text{س}^{٢}}$

### تعريف

**المعادلة التفاضلية:** هي معادلة تحوي على مشتقات أو تفاضلات .

ويقصد **بحلّ المعادلة التفاضلية** إيجاد علاقة تربط بين المتغير ص و المتغير س، بحيث تحقق المعادلة.

### مثال ١

حُلَّ المعادلة التفاضلية :

$$\frac{\text{٢ءص}}{\text{١} - \text{س}} = (\text{٢س} + \text{١})\,\text{ءس}$$

**الحل**

$\text{٢ءص} = (\text{١} - \text{س})(\text{٢س} + \text{١})\,\text{ءس}$ ضرب طرفي المعادلة بـ ( ١ − س )

$\int \text{٢ءص} = \int (-\text{٢س}^{٢} + \text{س} + \text{١})\,\text{ءس}$ إجراء التكامل غير المحدود لطرفي المعادلة

$\text{٢ص} = \frac{-\text{٢س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \text{س} + \text{جـ}_{١}$

$ص = \frac{-س^3}{3} + \frac{س^2}{4} + \frac{س}{2} + \frac{ج_1}{2}$ قسمة طرفي المعادلة على ٢

$ص = \frac{-س^3}{3} + \frac{س^2}{4} + \frac{س}{2} + ج$ حيث $ج = \frac{ج_1}{3}$

## مثال ٢

حُلَّ المعادلة التفاضلية: $جتا^2 س \, ءص + ص \, ءس = ءص$

**الحل**

اجعل المقدارين اللذين يحويان ءص في طرف والمقدار الذي يحوي ءس في طرف آخر

$جتا^2 س \, ءص - ءص = - ص \, ءس$

$(جتا^2 س - 1) \, ءص = - ص \, ءس$ إخراج ءص عاملًا مشتركًا

$\frac{ءص}{ص} = \frac{-ءس}{جتا^2 س - 1}$ قسمة طرفي المعادلة على $(جتا^2 س - 1) \times ص$

$\frac{ءص}{ص} = قتا^2 س \, ءس$ لماذا؟

$\int \frac{ءص}{ص} = \int قتا^2 س \, ءس$ إجراء التكامل غير المحدود لطرفي المعادلة

$لو_هـ |ص| = - ظتاس + ج$

$|ص| = هـ^{-ظتاس + ج_1}$ ومنه $|ص| = هـ^{-ظتاس} \times هـ^{ج_1}$

$|ص| = ج \, هـ^{-ظتاس}$ $ج = هـ^{ج_1}$

### تدريب ١

حُلَّ المعادلة التفاضلية:

$(س^2 - 3س) \, ءص = هـ^{-ص} (س^2 + س - 12) \, ءس$

## مثال ٣

إذا كان ميل المماس لمنحنى علاقة عند النقطة (س، ص) يساوي $\frac{\sqrt{2ص + 1}}{\sqrt{3س - 2}}$

فجد قاعدة هذه العلاقة؛ إذا علمت أنَّ منحناها يمر بالنقطة (١، ٤).

**الحل**

ميل المماس $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{\sqrt{\text{٢ص} + ١}}{\sqrt{\text{٣س} - ٢}}$ ، $\frac{\text{ءص}}{\sqrt{\text{٢ص} + ١}} = \frac{\text{ءس}}{\sqrt{\text{٣س} - ٢}}$

$\int (\text{٢ص} + ١)^{\frac{-١}{٢}} \text{ءص} = \int (\text{٣س} - ٢)^{\frac{-١}{٢}} \text{ءس}$

$\frac{١}{٢} \times ٢ (\text{٢ص} + ١)^{\frac{١}{٢}} = \frac{١}{٣} \times ٢ (\text{٣س} - ١)^{\frac{١}{٢}} + \text{جـ}$

$\sqrt{\text{٢ص} + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{٣س} - ٢} + \text{جـ}$

ولكن المنحنى يمر بالنقطة ( ١ ، ٤)

ومنه $\sqrt{٢ \times ٤ + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{٣ \times ١ - ٢} + \text{جـ}$ ، جـ $= \frac{٧}{٣}$

$\sqrt{\text{٢ص} + ١} = \frac{٢}{٣} \sqrt{\text{٣س} - ٢} + \frac{٧}{٣}$

**تدريب ٢**

إذا كان ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س، ص) يساوي $\text{س} \sqrt{٣ + \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س}}$ ، فجد قاعدة العلاقة ص علمًا بأنَّ منحناها يمر بالنقطة ( هـ ، ٤)، حيث هـ : العدد النيبيري

**مثال ٤**

يسير جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت $= ٢\sqrt{\text{ع}}$ ، حيث ع > صفر ، ت: تسارع الجسيم، ع: سرعة الجسيم. فإذا كانت سرعة الجُسيم عند بدء حركته ٩م/ث فجد المسافة التي يقطعها الجسيم بعد (٣) ثوانٍ من بدء حركته؛ علمًا بأنَّه قطع مسافة قدرها $\frac{٦٤}{٣}$ متر في أول ثانية من حركته.

**الحل**

المعطيات: ت $= ٢\sqrt{\text{ع}}$ ، ع(٠) = ٩م/ث ، ف(١) $= \frac{٦٤}{٣}$ متر

المطلوب : إيجاد ف(٣)

ت $= \frac{\text{ءع}}{\text{ءن}}$ ، $\frac{\text{ءع}}{\text{ءن}} = ٢\sqrt{\text{ع}}$ ومنه $\frac{\text{ءع}}{٢\sqrt{\text{ع}}} = \text{ءن}$

$\int \frac{1}{2} \times ع^{\frac{-1}{2}}$ ءع $= \int$ ءن

$ع^{\frac{-1}{2}} = ن + جـ$ ...... (١)

لكن ع(٠) = ٩ بالتعويض في معادلة (١)، ٣ = ٠ + جـ ، ومنه جـ = ٣

ع = (ن + ٣)$^{٢}$ لماذا؟

ولكن ع = $\frac{ءف}{ءن}$ ، $\frac{ءف}{ءن}$ = (ن + ٣)$^{٢}$ ، ومنه ءف = (ن+٣)$^{٢}$ ءن

$\int$ ءف = $\int$ (ن + ٣)$^{٢}$ ءن

ف = $\frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$ + جـ$_{١}$ ...... (٢)

لكن ف(١) = $\frac{٦٤}{٣}$ بالتعويض في معادلة (٢)،

$\frac{٦٤}{٣} = \frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$ + جـ$_{١}$

جـ$_{١}$ = ٠ ، ومنه ف = $\frac{(ن + ٣)^{٣}}{٣}$

ف(٣) = $\frac{(٣ + ٣)^{٣}}{٣}$ ← ف(٣) = ٧٢ م

أي المسافة التي قطعها الجُسيم بعد (٣) ثوانٍ من حركته تساوي ٧٢ م.

### تدريب ٣

يسير جُسيم على خط مستقيم وفق العلاقة ت = $\sqrt{ع}$، حيث ع > ٠ ، ت: تسارع الـجُسيم، ع: سرعة الـجُسيم. فإذا كانت سرعة الـجُسيم عند بدء حركته ٩م/ث، وقطع مسافة (٨٠) مترًا في (٤) ثوانٍ. فجد المسافة التي قطعها الـجُسيم بعد ثانيتين من بدء حركته.

### تدريب ٤

قُذفت كرة من قمة برج ارتفاعه (٤٥) مترًا عن سطح الأرض إلى أعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (−١٠)م/ث$^{٢}$. جد الزمن الذي استغرقته الكرة لتعود إلى سطح الأرض.

١) حُلَّ كلاًّ من المعادلات التفاضلية الآتية:

أ ) $\text{س}^{٣}\ \text{ءص} - \text{ص}\ \text{ءس} = ٠$

ب) $\text{ءس} - ٣\ \text{ءص} = \text{جتاس}\ \text{ءس}$

جـ) $\text{هـ}^{-\text{ص}}\ \text{جاس} - \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}\ \text{جتا}^{٢}\text{س} = ٠$

د ) $\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{ءص} - \text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\ \text{ءس} = ٠$

هـ ) $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ١ - \text{ص} + \text{س}^{٢} - \text{ص}\ \text{س}^{٢}$

و ) $(\text{س}^{٢} + ٣\text{س})\ \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \text{هـ}^{-٢\text{ص}}\ (\text{س}+١)\ (\text{س}^{٢} - ٩)$

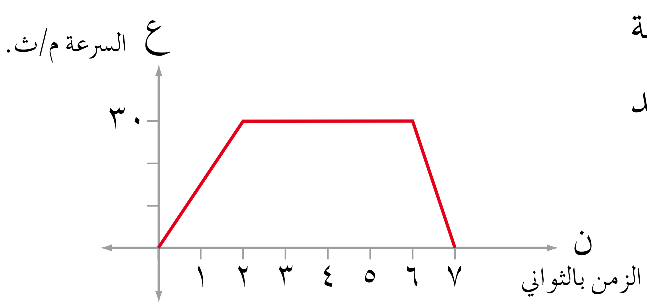
٢) آلة صناعية قيمتها عند الشراء ( ٢٥٠٠ ) دينار، إذا كانت قيمتها تتناقص بمرور الزمن وفق العلاقة $\frac{\text{ء ق}}{\text{ء ن}} = \frac{-٥٠٠}{(\text{ن}+١)^{٢}}$ حيث ق : قيمة الآلة بعد ن سنة من شرائها، فاحسب قيمة هذه الآلة بعد ( ٣ ) سنوات من شرائها.

٣) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ،ص) يساوي $\frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$

حيث هـ: العدد النيبيري .

فجد قاعدة العلاقة ص علماً بأنَّ منحناها يمر بالنقطة ( ٠ ، ١ )

٤) يمثل الشكل (٤-٣٣) العلاقة بين السرعة والزمن لجسم يتحرك على خط مستقيم فجد المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية [ ٠ ، ٧ ]




الشكل (٤-٣٣)

٥ ) ابتدأ جُسيم الحركة من نقطة الأصل على محور السينات وفقا للعلاقة ت $= -٤$ ع$^{\frac{٣}{٢}}$، حيث ع > ٠ ، ت: تسارع الجُسيم ، ع: سرعة الجُسيم فإذا كانت سرعته عند بدء الحركة ٤سم/ث. أثبت أن ف= ٢ن $\sqrt{ع}$ .

٦) قذف جسم رأسيًا لأعلى بسرعة ابتدائية مقدارها (٤٠)م/ث وبتسارع مقداره (−١٠) م/ث$^{٢}$، إذا كان ارتفاعه عن سطح الأرض بعد ثانية واحدة من بدء حركته يساوي (٨٠)مترًا، فجد أقصى ارتفاع وصل إليه الجسم.

٧) يزداد عدد سكان مدينة حسب العلاقة $\frac{ءع}{ءن}$ = ٠,٠٢٥ ع ، حيث ع: عدد السكّان، ن: الزمن بالسنوات، إذا علمت أنَّ عدد سكان المدينة بلغ (٢٠٠٠٠٠) نسمة عام (٢٠١٥)، فجد عدد سكّانها بعد (٤٠) عامًا.

١) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int_{٢}^{٣} \sqrt{٤س + ١}\ ءس$

ب) $\int \frac{س\ قا^{٢}س - س\ ظا^{٢}س}{\sqrt[٣]{س}}\ ءس$

جـ) $\int \frac{\sqrt{س^{٢} - س^{٤}}}{س^{٥}}\ ءس$

د) $\int ظتاس\ لو_{هـ}\ جاس\ ءس$

هـ) $\int (س^{٨} - ٤س)^{٦}\ ءس$

و) $\int قا^{٤}س\ لو_{هـ}\ ظاس\ ءس$

ز) $\int \sqrt[٣]{٢س^{٥} - س^{٢}}\ ءس$

ح) $\int_{٠}^{١} \frac{هـ^{س}}{هـ^{٢س} + ٢هـ^{س} + ١}\ ءس$

ط) $\int جا(لو_{هـ}\ س)\ ءس$

ي) $\int \frac{س^{٣}}{٢س^{٤} + س^{٨}}\ ءس$

ك) $\int \frac{\sqrt{٤س + ١٢} - ٣}{\sqrt{س + ٣} + ٣}\ ءس$

ل) $\int لو_{هـ}(س^{٢} + ٢س)\ ءس$

٢) حُلَّ المعادلة التفاضلية $٣ظاص - \frac{ءص}{ءس}\ قاس = ٠$

٣) إذا كان $ص^{٢} = لو_{هـ}\ س\ ص - هـ^{س^{٢}}$ ، فجد $\frac{ءص}{ءس}$

٤) إذا كان $م(س) = س^{٣} + ب\ س^{٢} - ١$ معكوسًا لمشتقة الاقتران $ق(س)$ ، $ق(٢) = ٢٤$ ، فجد قيمة الثابت ب.

٥) إذا كان $م(س)$ ،$هـ(س)$ معكوسين لمشتقة الاقتران $ق(س)$ ،

وكان $\int_{-١}^{٣} \left(م(س) - هـ(س)\right) ءس = ١٢$ ، فجد $\int_{٠}^{٤} ٢س\ م(س)\ ءس + \int_{٤}^{٠} ٢س\ هـ(س) ءس$

٦) إذا كان $\int_{٣}^{١} \left(٢ق(س) + \int_{٠}^{٢} ٢م\ ءم\right) ءس = ١٤$ ، فجد $\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\ ءس$

٧) إذا كان $ق(س) = س^{٢} - \int \left(٣س^{٢} - \int_{٠}^{١} ٢ص\ ءص\right) ءس$، فجد $قَ(س)$

٨ ) إذا كان $\int_{\text{١-}}^{\text{١}}$ (٤ق(س) + ٣) ءس = ١٨ ، $\int_{\text{١}}^{\text{٤}}$ ٢ق(س) ءس = ٢٠ ، فجد

$\int_{\text{٤}}^{\text{١-}}$ (٢س − ق(س)) ءس

٩ ) يسير جسيم على خط مستقيم حسب العلاقة ت = أ $\sqrt[\text{٣}]{\text{ع}}$ ، ع > ٠ ، حيث ت :تسارع الجسيم ، ع:سرعة الجسيم. إذا تحرك الجسيم من السكون، فجد قيمة الثابت أ التي تجعل سرعته ٨سم/ث بعد (٣) ثوانٍ من بدء حركته.

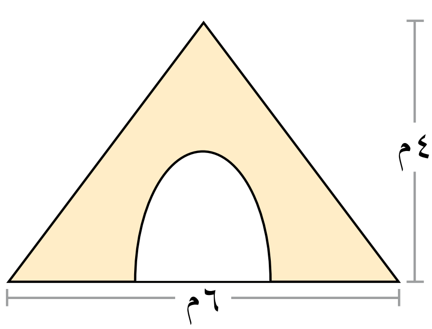
١٠) إذا كان ميل المماس لمنحنى العلاقة ص عند النقطة (س ، ص) يساوي $\frac{\sqrt{\text{هـ}^{\text{ص}}}}{\text{١} - \text{جتا}^{\text{٢}}\text{س}}$ فجد قاعدة العلاقة ص علمًا بأنَّ منحناها يمر بالنقطة ($\frac{\pi}{\text{٤}}$، ٠)

١١) جد مساحة المنطقة المحصورة في الربع الأول و المحدودة بمنحنى الاقتران ق (س)= ٤ − س$^{\text{٢}}$ ، ومحور الصادات و المستقيمين ص= س − ٢ ، ص = ٦ − س

١٢) جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيات الاقترانات الآتية:

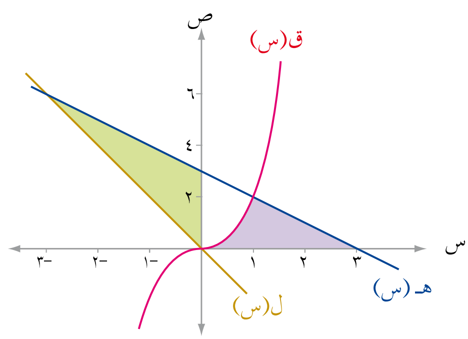
ق( س) = $\frac{\text{٣}}{\text{س}}$ ، هـ ( س ) = س − ٢ ، ل ( س ) = ٣

١٣) الشكل(٤−٣٤) يمثل الواجهة الأمامية لأحد المباني، مدخل هذا المبنى على شكل منحنى الاقتران ق(س) = ٢ − $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ س$^{\text{٢}}$ . ما التكلفة الكلية لدهان المنطقة المظللة؟ إذا علمت أنَّ سعر دهان الوحدة المربعة نصف دينار.



الشكل (٤−٣٤)

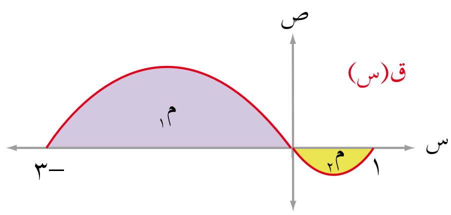
١٤) جد مجموع مساحتي المنطقتين المظللتين المبيّنتين في الشكل (٤ – ٣٥) حيث $ق(س) = ٢س^{٣}$ ،
$هـ(س) = ٣ - س$ ، $ل(س) = -٢س$



الشكل (٤–٣٥)

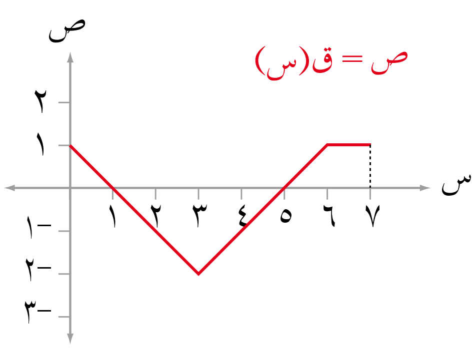
١٥) اعتمادًا على الشكل (٤–٣٦) الذي يمثل منحنى الاقتران ق في الفترة [–٣ ، ١] حيث $م_{١} = (١٠)$ وحدات مربعة، $م_{٢} = (٤)$ وحدات مربعة، فجد

$$\int_{٠}^{٢} س\ ق(١-س^{٢})\ ءس$$



الشكل (٤–٣٦)

١٦) اعتمد على الشكل (٤ –٣٧) الذي يمثل منحنى الاقتران ق(س) في إيجاد كلٍّ ممّا يأتي:



الشكل (٤–٣٧)

أ) $\int_{٠}^{٧} ق(س)\ ءس$

ب) $\int_{٠}^{٧} |ق(س)|\ ءس$

جـ) $\left|\int_{٠}^{٧} ق(س)\ ءس\right|$

١٧) جد كلًّا من التكاملات الآتية:

أ) $\int جا\sqrt{س}\ جتا^{٣}\sqrt{س}\ ءس$

ب) $\int س\ \sqrt[٣]{س^{٢}+١}\ ءس$

جـ) $\int_{٠}^{\frac{٣\pi}{٤}} \frac{قا^{٤}س}{ظا^{٢}س - ٣ظاس + ٢}\ ءس$

د) $\int \frac{ظتاس\ قتاس}{٩ - ٤قتا^{٢}س}\ ءس$

هـ) $\int_{٠}^{٢} س^{٤} هـ^{س^{٣}+لو_{هـ}س}\ ءس$

و) $\int جا٣س\ قتاس\ ءس$

ز ) $\int \frac{٢\text{جا}٣\text{س جتاس}}{\text{جتا}٢\text{س}}$ ءس

ح ) $\int \frac{\text{س} + \text{جاس}}{١ + \text{جتاس}}$ ءس

ط ) $\int \frac{٤\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{(\text{س} - ١)}$ ءس

ي) $\int (\text{ظاس} + \text{قاس})^{١٠}$ قاس ءس

١٨) يتكون هذا السؤال من (١١) فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل فقرة ( ٤) بدائل، واحد فقط منها صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) إذا كان ق اقتراناً متصلاً على مجاله ، وكان $\int$ ق(س)ءس= $\text{هـ}^{\text{جا}٢\text{س}}$ − $\text{لو}_{\text{هـ}}$ جتاس−١، فإن ق(٠) تساوي:

أ ) ١ ب) هـ جـ ) ٢هـ د ) ٢

(٢) إذا كان $\int$ق(س) ءس = $\text{س}^٥$ + جاس + ٣ ، فإنَّ ق(س) يساوي:

أ ) ٥$\text{س}^٤$ + جتاس

ب) $\frac{١}{٦}\text{س}^٦$ − جتاس + ٣س +جـ

جـ) ٥$\text{س}^٤$− جتاس

جـ) $\frac{١}{٦}\text{س}^٦$ − جتاس

(٣) إذا كان ق اقترانًا معرفًا على الفترة[−١ ، ٢] وكان ١ ≤ ق(س) ≤ ٤ فما أكبر قيمة للمقدار $\int_{-١}^{٢}$ ٢ق(س) ءس؟

أ) ٦ ب) ٢٤ جـ ) ٣ د ) ١٢

(٤) إذا كان $\int_{-٢}^{٣}$ ٢ق(س) ءس = ١٠، $\int_{-٢}^{١}$ ق(س) ءس = ٤، فإنَّ $\int_{١}^{٣}$ (٢ق(س)+ ٣) ءس يساوي:

أ) ٥ ب) ١٤ جـ ) ٨ د ) ٢٤

(٥) $\int_{أ}^{ب}$ قَ ( هـ (س) ) × هـَ (س) ءس يساوي:

أ ) ق( ب ) − ق( أ )

جـ) ق(هـ ( ب )) − ق( هـ ( أ ) )

ب) قَ ( ب ) − قَ ( أ )

د ) قَ (هـ ( ب )) − قَ ( هـ ( أ ) )

(٦) إذا كان م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة الاقتران المتصل ق وكان

$\int_{-1}^{2}$ (م(س) – هـ(س)) ءس = ١٢ ، فما قيمة $\int_{-1}^{2}$ س(م(س) – هـ(س)) ءس؟

أ ) ٣  ب) ٤,٥  جـ ) ١٢  د ) ١٨

(٧) إذا كان $\int_{1}^{هـ}$ س ق(س) ءس = ٤ ، فما قيمة $\int_{0}^{2}$ هـ^س^ ق( $\sqrt{هـ^{س}}$ ) ءس؟

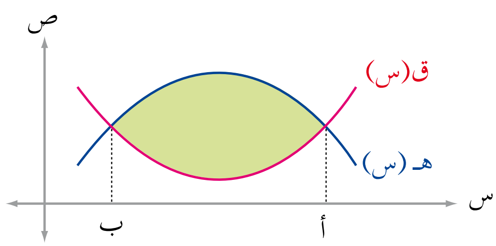
أ ) ١  ب) ٨  جـ ) ٢  د ) ٤

(٨) إذا كان ق(س) = هـ$^{٢}$ + لـو$_{هـ}$ جاس فإنَّ قَ(س) تساوي:

أ ) ظتاس  ب) – ظتاس  جـ ) ٢هـ + ظتاس  د ) هـ$^{٢}$ + ظتاس

(٩) معتمدًا الشكل (٤–٣٨)، إذا علمت أنَّ مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الاقترانين ق ، هـ تساوي (٦) وحدات مربعة وكان

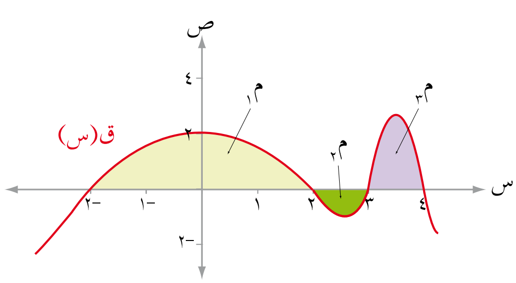
$\int_{أ}^{ب}$ ق(س) ءس = ١٠ ، فإنَّ قيمة $\int_{أ}^{ب}$ هـ (س) ءس =



الشكل (٤–٣٨)

أ ) ١٠  ب) ٦  جـ ) ١  د ) – ٤

(١٠)* معتمدًا الشكل (٤–٣٩) الذي يبين المساحة بين منحنى ق(س) ومحور السينات، إذا علمت أن م$_{١}$=٤,٨ وحدة مربعة، م$_{٢}$=٠,٨ وحدة مربعة، م$_{٣}$=٢ وحدة مربعة، فإنَّ $\int_{-2}^{4}$ ق(س) ءس تساوي:



الشكل (٤–٣٩)

أ ) ٥,٦  ب) ٦  جـ ) ٦,٨  د ) ٧,٦

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية.

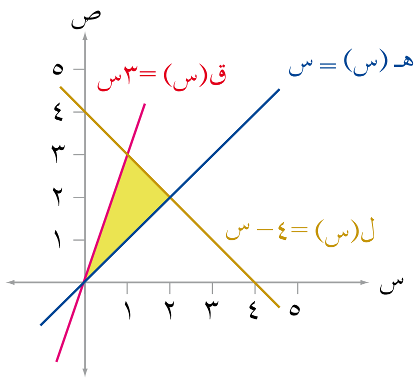
(١١) معتمدًا الشكل (٤ – ٤٠) ما مساحة المنطقة المظللة؟

أ ) $\int_{٠}^{١} (٣س - س)\, ءس$

ب) $\int_{٠}^{١} ٢س\, ءس + \int_{١}^{٢} (٤ - ٢س)\, ءس$

جـ) $\int_{٠}^{١} ٢س\, ءس + \int_{١}^{٢} (٤ - س)\, ءس$

د ) $\int_{١}^{٢} (٣س - س)\, ءس$



الشكل (٤–٤٠)

٥

## الوحدة الخامسة

# القطوع المخروطية وتطبيقاتها

## Conic Sections and its Applications

تبرز أهمية القطوع المخروطية ودراستها من خلال تطبيقاتها المتعددة في العلوم المختلفة. فحركة الكواكب والنجوم وحركة إلكترونات الذرة في مساراتها حول النواة، تكون في مسارات إهليليجية.

ويتم استخدام القطوع المخروطية في المرايا والعدسات وبناء المراصد الفلكية والجسور المعلقة، والأطباق اللاقطة للإشارات اللاسلكية ، والأقمار الصناعية، وفي المقذوفات، وبناء الروبوتات، والمحاكاة، والصور المتحركة، ومعظم الصناعات الحديثة.

**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- كتابة معادلة محل هندسيّ تمثل:
  (مستقيم، ودائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تعرُّفِ الصيغة القياسية لمعادلة (دائرة، وقطع مكافئ، وقطع ناقص، وقطع زائد).
- تمييز نوع القطع المخروطي إذا علمت معادلته.
- تمثيل القطع المخروطي بيانيًا إذا عُلمت معادلته.
- نمذجة مسائل حياتية على القطوع المخروطية وحلّها، مع تبرير الحل.

الفصل الأول

# القطوع المخروطية
# Conic Sections

**النتاجات**

- تتعرف القطع المخروطي.
- تتعرف المحل الهندسي.
- تجد معادلة محل هندسي.

## أولًا القطع المخروطي Conic Section

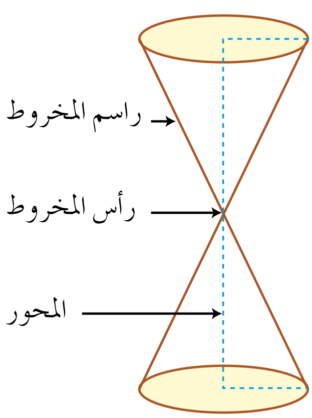
الشكل (٥-١) يبين مخروطًا دائريًا قائمًا مزدوجًا، حدد الشكل الناتج إذا قطع مستوى المخروط في كل من الحالات الآتية:

١) بشكل أفقي (عمودي على المحور ولا يحتوي الرأس).

٢) بشكل مائل قليلًا عن المحور بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر.

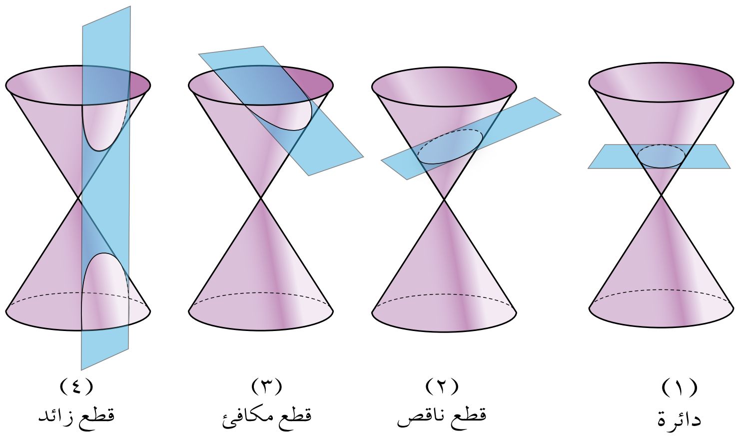
٣) بشكل مائل موازٍ لراسم المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر.

٤) فرعي المخروط ولا يمر بالرأس.




الشكل (٥-١)

انظر الأشكال الناتجة عن كل حالة:




الشكل (٥-٢)

١) إذا كان المستوى القاطع عموديًّا على المحور ولا يمر بالرأس، فإنَّ الشكل الناتج **دائرة** (Circle).

٢) إذا كان المستوى القاطع مائلًا قليلًا على المحور، ويقطع أحد المخروطين دون الآخر ، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا ناقصًا** (Ellipse).

٣) إذا زاد ميل المستوى القاطع ليصبح موازيًا لراسم المخروط ويقطع أحد المخروطين دون الآخر، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا مكافئًا** (Parabola).

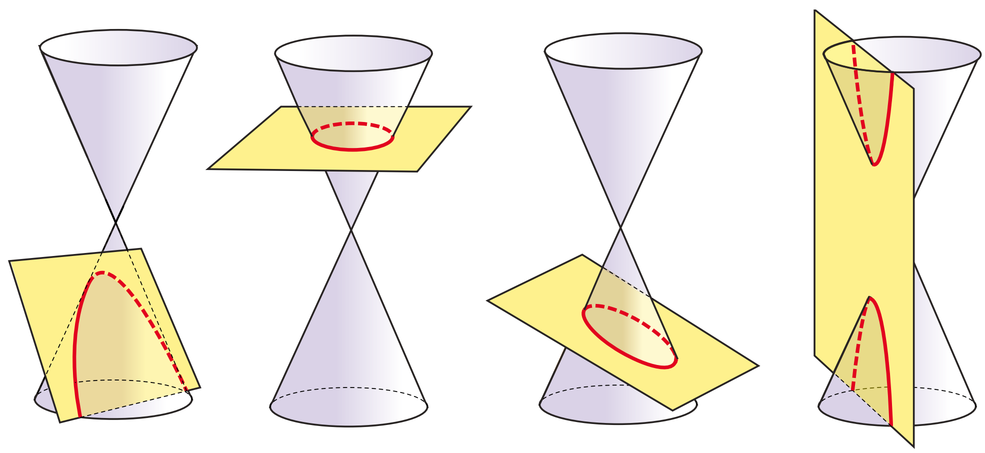
٤) إذا قطع المستوى فرعَيْ المخروط، وكان القطع لا يحتوي على نقطة الرأس، فإنَّ الشكل الناتج يُسمّى **قطعًا زائدًا** (Hyperbola).

تسمى الأشكال السابقة الناتجة **قطوع مخروطية**، وسندرس في هذه الوحدة كلًّا منها بالتفصيل.

**فكر وناقش**

ما الشكل الناتج عن تقاطع مستوى مع مخروط دائري قائم مزدوج بشكل عمودي على المحور، ومحتويًا رأس المخروط؟

١) اعتمادًا على الشكل (٥-٣)؛ اكتب اسم القطع المخروطي الناتج في كل حالة:



الشكل (٥-٣)

٢) اكتب اسم الشكل الناتج عن قطع مستوى لمخروط قائم مزدوج في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ ) إذا قطع المستوى فَرْعَي المخروط حيث لا يحتوي القطع على رأس المخروط.

(                    )

ب) إذا قطع المستوى المخروط بشكل عمودي على المحور، ولا يحوي رأس المخروط.

(                    )

جـ) إذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل موازٍ لراسم المخروط بحيث يقطع أحدهما دون الآخر.

(                    )

د ) إذا قطع المستوى المخروط بشكل مائل قليلًا عن المحور، بحيث يقطع أحد المخروطين دون الآخر.

(                    )

## ثانيًا  المحل الهندسي  Locus

الشكل (٥–٤) يوضح خطوات أحمد الذي يسير بحيث يبعد بعدًا ثابتًا عن حافة الرصيف.
ما الشكل الهندسي الناتج عن مسار خطواته؟

الشكل (٥–٤)

لاحظ أنَّ حافة الرصيف تُمثّل في المستوى على شكل مستقيم، وبما أن بُعد أحمد عن الرصيف مقدار ثابت، فإنَّ مسار خطواته يشكل مستقيمًا موازيًا لحافة الرصيف. لماذا؟

ويُسمى المستقيم في هذه الحالة **محلًّا هندسيًا**.

**تعريف**

**المحل الهندسي**

هو المنحنى الناتج عن حركة نقطة في المستوى الإحداثي تحت شروط معينة.

أما العلاقة الجبرية التي تربط بين الإحداثيين السيني والصادي للنقطة المتحركة فتسمى **معادلة المحل الهندسي**.

**مثال ١**

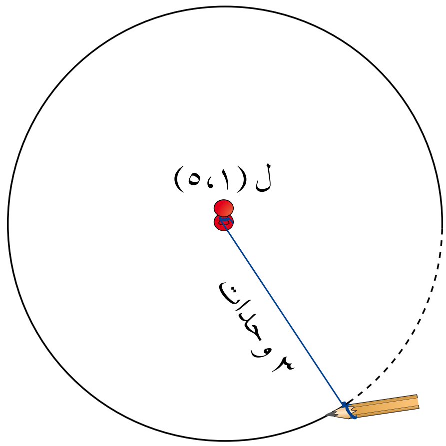
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ن(س ، ص) التي تبعد بعًدا ثابتًا مقداره (٣) وحدات، عن النقطة الثابتة ل (١، ٥).

**الحل**

لمعرفة شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة (ن) في المستوى؛ أحضر خيطًا، اربط بطرفه قلمًا صغيرًا، وثبِّت الطرف الآخر من الخيط في نقطة ثابتة في المستوى، ثم حرِّك القلم بصورة مستمرة باتجاه واحد دون رفعه عن المستوى، مع بقاء الخيط مشدودًا، حتى يعود رأس القلم إلى نقطة البداية، ما الشكل الناتج؟

لا بد أنَّك لاحظت أنَّ رأس القلم يمثل النقطة المتحركة ن(س، ص) في المستوى الإحداثي، وأنَّ طول الخيط يمثل البعد الثابت، والنقطة الثابتة تمثل النقطة (ل).

وأنَّ المحل الهندسي الناتج هو دائرة، كما يوضح الشكل (٥-٥) مركزها النقطة الثابتة ل (١،٥) وطول نصف قطرها البعد الثابت ٣ وحدات.




الشكل (٥-٥)

ولإيجاد معادلة المحل الهندسي الناتج؛ استخدم قانون البُعد بين النقطتين ن(س ، ص)، ل(١ ، ٥) كما يأتي:

$$\text{ن ل} = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$٣ = \sqrt{(\text{س} - ١)^٢ + (\text{ص} - ٥)^٢}$$

$$\text{ومنه } (٣)^٢ = (\text{س} - ١)^٢ + (\text{ص} - ٥)^٢$$

إذن معادلة المحل الهندسي المطلوب هي: $(\text{س} - ١)^٢ + (\text{ص} - ٥)^٢ = ٩$

**تدريب ١**

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب (س ، ص) التي تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره وحدة واحدة، عن النقطة الثابتة ك (٢ ، -٤).

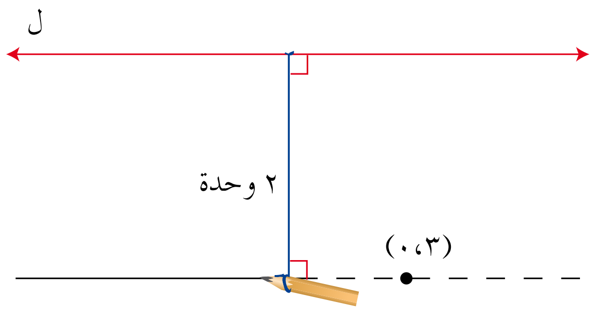
**مثال ٢**

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة هـ (س ، ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (وحدتان) عن المستقيم ل: ٤ص - ١ = ٣س ، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (٣ ، ٠).

**الحل**

لمعرفة شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة (هـ) في المستوى؛ ارسم خطًّا ثابتًا على المستوى البياني باستخدام المسطرة، ثم أحضر الخيط الذي استخدمته في مثال (١)، وثبّت الطرف الحر منه على المستقيم المرسوم، وحرِّك القلم مع الطرف الآخر من الخيط بصورة مستمرة باتجاه واحد ومن جانب واحد أيضًا ودون رفعه عن المستوى، مع بقاء الخيط مشدودًا بشرط أن يبقى الخيط عموديًّا

على المستقيم المرسوم، ما الشكل الناتج؟
لا بد أنَّك لاحظت أنَّ الشكل الناتج عن حركة القلم في المستوى هو مستقيم يوازي المستقيم ل، وأنَّه يبعد عنه بُعدًا ثابتًا مقداره طول الخيط المشدود. انظر الشكل (٥-٦).



الشكل (٥-٦)

ولإيجاد معادلة المحل الهندسي الناتج؛ اكتب معادلة المستقيم ل على الصورة العامة، ثم استخدم قانون البعد بين النقطة هـ (س، ص) والمستقيم ل: ٣س − ٤ص + ١ = ٠ ، حيث إنَّ:

$$\text{البُعد} = \left| \frac{\text{أس}_1 + \text{ب ص}_1 + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}} \right|$$

$$٢ = \left| \frac{٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١}{\sqrt{(٣)^2 + (-٤)^2}} \right|$$

$$٢ = \left| \frac{٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١}{٥} \right| \qquad \text{إذن} \quad \left|٣\text{س} - ٤\text{ص} + ١\right| = ١٠$$

وبحل المعادلة تجد أنَّ:

٣س − ٤ص + ١ = ١٠ ، ومنه ٣س − ٤ص −٩ = ٠

أو ٣س − ٤ص + ١ = −١٠ ، ومنه ٣س − ٤ص +١١ = ٠

وبما أنَّ النقطة هـ تمر أثناء حركتها بالنقطة (٣ ، ٠)، إذن معادلة المحل الهندسي هي:

٣س − ٤ص −٩ = ٠

**فكر وناقش**

لماذا يُشترط أن يبقى الخيط عموديًّا على المستقيم الثابت في مثال (٢)؟

**تدريب ٢**

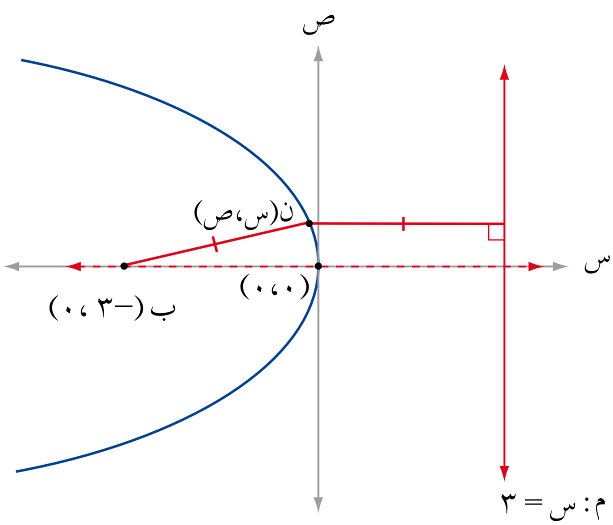
جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى جـ (س ، ص)، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره ($\sqrt{٥}$) وحدة طول عن المستقيم م: ص = −٢س ، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (−١ ، −٣).

## مثال ٣

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بُعدها عن النقطة ب (−٣ ، ٠) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم م: س = ٣ .

**الحل**

بما أن بُعد النقطة ن عن النقطة ب يساوي بُعدها عن المستقيم م، فإنَّ طول $\overline{\text{ن ب}}$ يساوي بُعد النقطة ن عند المستقيم م، أي أنَّ $\sqrt{(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢} = \left| \frac{\text{س} - ٣}{\sqrt{١ + ٠}} \right|$



الشكل (٥−٧)

و بتربيع الطرفين، ينتج أنَّ:

$(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢ = (|\text{س} - ٣|)^٢$

$(\text{س} + ٣)^٢ + (\text{ص} - ٠)^٢ = (\text{س} - ٣)^٢$

$\text{س}^٢ + ٦\text{س} + ٩ + \text{ص}^٢ = \text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٩$

ومنه $\text{ص}^٢ = -١٢\text{س}$

إذن معادلة المحل الهندسي الناتج هي:

$\text{ص}^٢ = -١٢\text{س}$

انظر الشكل (٥−٧).

### فكر وناقش

كيف يمكن أن تتحقق من شكل المحل الهندسي الناتج عن حركة النقطة أ في المستوى في مثال(٣) باستخدام الخيط وقلم الرصاص؟

### تدريب ٣

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة جـ(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بعدها عن محور الصادات مساويًا ثلاثـة أمثال بُعدها عن النقطة د(٢ ، −١).

١) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى ب (س،ص) التي تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٧) وحدات، عن النقطة الثابتة ك( −٢ ، ٦).

٢) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ع (س،ص) التي تتحرك في المستوى، بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٤) وحدات عن المستقيم الذي معادلته س= ١، وتمر أثناء حركتها بالنقطة (−٣ ، ٢)

٣) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة د(س ، ص) المتحركة في المستوى، التي يكون بُعدها عن النقطة هـ (٥ ،٣) مساويًا دائمًا لمثلَيْ بُعدها عن المستقيم الذي معادلته ص=٤ .

الفصل الثاني

# معادلات القطوع المخروطية
# Equationes of Conic Sections

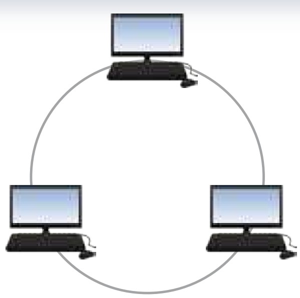
### النتاجات

- تتعرف القطوع المخروطية (الدائرة، القطع المكافئ، القطع الناقص، القطع الزائد).
- تكتب معادلة قطع مخروطي إذا عُلِمَت شروط كافية.
- تميز نوع قطع مخروطي وتحدد عناصره إذا عُلِمَت معادلته.
- تمثل قطعًا مخروطيًّا بيانيًّا.

## أولًا الدائرة The Circle

أراد أحد المهندسين توصيل ثلاثة أجهزة حاسوب مع جهاز مركزي؛ بحيث يبعد الجهاز المركزي بُعدًا متساويًا عن الأجهزة الثلاثة.

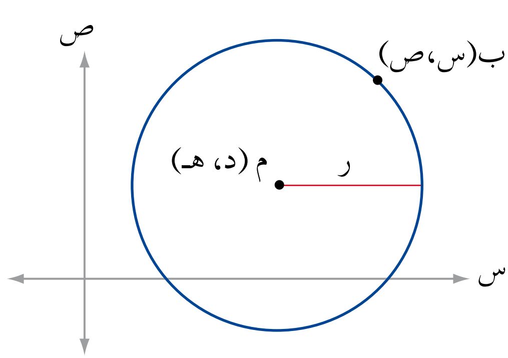
كيف يحدد المهندس موقع الجهاز المركزي؟



تعلمت سابقًا أنَّ **الدائرة** قطع مخروطي، وشكلها نتج عن المسار الذي ترسمه نقطة تتحرك في المستوى بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا عن نقطة ثابتة، حيث يمثل البُعد الثابت طول نصف القطر والنقطة الثابتة مركز الدائرة.

ولإيجاد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة م (د ، هـ) وطول نصف قطرها (ر)؛ افرض النقطة ب (س ، ص) نقطة على الدائرة، كما يوضح الشكل (٥−٨). وباستخدام قانون البُعد بين النقطتين ب، م تجد أنَّ معادلة الدائرة هي:

(س − د)$^{٢}$ + (ص − هـ)$^{٢}$ = ر$^{٢}$   (وضح ذلك)




الشكل (٥−٨)

الصورة القياسية لمعادلة الدائرة التي مركزها النقطة (د ، هـ) ، وطول نصف قطرها (ر) وحدة هي: $(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{ر}^{٢}$

## مثال ١

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٦ ، ١) وطول نصف قطرها (٤) وحدات.

**الحل**

$$(\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢} = \text{ر}^{٢}$$

$$(\text{س} + ٦)^{٢} + (\text{ص} - ١)^{٢} = ١٦$$

## مثال ٢

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٥ ، ٣) وتمر بالنقطة (١ ، ٠).

**الحل**

إحداثيا مركز الدائرة (د ، هـ) هو (٥ ، ٣)

وطول نصف قطر الدائرة: هو البعد بين المركز والنقطة التي تمر بها الدائرة

إذن: $\text{ر}^{٢} = (\text{س}_{٢} - \text{س}_{١})^{٢} + (\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١})^{٢}$

$$= (٥ - ١)^{٢} + (٣ - ٠)^{٢}$$

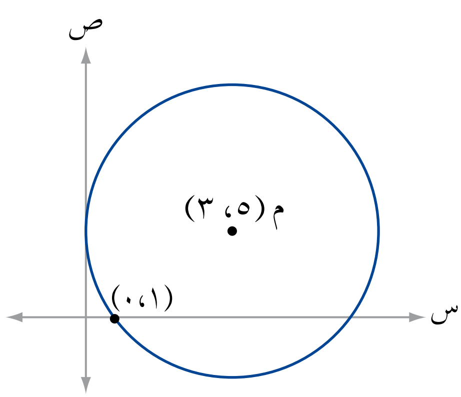
$$= ١٦ + ٩ = ٢٥$$

ومنه ر = ٥ وحدات

ومنه معادلة الدائرة هي:

$$\text{ر}^{٢} = (\text{س} - \text{د})^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}$$

$$٢٥ = (\text{س} - ٥)^{٢} + (\text{ص} - ٣)^{٢}$$ انظر الشكل (٥–٩).




الشكل (٥–٩)

### تدريب ١

١) جد معادلة الدائرة التي نهايتا قطر فيها النقطتان (٧ ، ٣)، (٥ ، −١).

٢) جد إحداثيَّيْ مركز، وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$$(\text{س} + ١)^{٢} + (\text{ص} - ٤)^{٢} = ٣٠$$

## مثال ٣

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٣ ، ٢) وتمس محور الصادات.

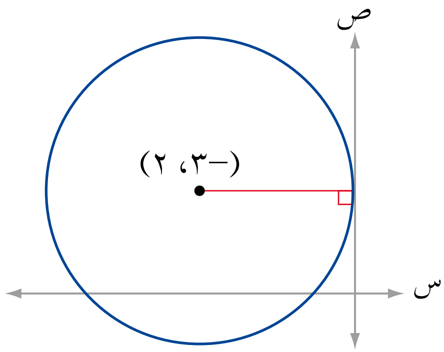
**الحل**

بما أنَّ الدائرة تمس محور الصادات ومركزها النقطة (−٣، ٢)،

فإنَّ ر = ٣ وحدات. ( لماذا؟) انظر الشكل (٥−١٠).

إذن معادلة الدائرة هي:

(س + ٣)$^{٢}$ + (ص − ٢)$^{٢}$ = ٩




الشكل (٥−١٠)

### تدريب ٢

جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (٤ ، −١) وتمس محور السينات.

ماذا تلاحظ من خلال حل كلٍّ من مثال (٢) وتدريب (٢)؟

### تدريب ٣

جد معادلة الدائرة في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) مركزها النقطة (٤ ، −١) وتمس المستقيم الذي معادلته ص = −٢

٢) تمس المحورين الإحداثيين وطول نصف قطرها يساوي (٣) وحدات (ادرس جميع الحالات الممكنة).

## الصورة العامة لمعادلة الدائرة:

لاحظ أنَّه يمكن كتابة معادلة الدائرة بصورة أخرى عن طريق فك الأقواس، وبما أنَّ

(س − د)$^{٢}$ + (ص − هـ)$^{٢}$ = ر$^{٢}$

فإن س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ − ٢ د س − ٢ هـ ص + د$^{٢}$ + هـ$^{٢}$ − ر$^{٢}$ = صفرًا

وبفرض أن (−٢ د) = أ ، (−٢ هـ) = ب ، ( د$^{٢}$ + هـ$^{٢}$ − ر$^{٢}$ ) = جـ

فتكون معادلة الدائرة هي:

س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + أ س + ب ص + جـ = صفرًا . وتسمى هذه الصيغة **الصورة العامة لمعادلة الدائرة**.

**الصورة العامة لمعادلة الدائرة**

$س^2 + ص^2 + أ س + ب ص + جـ = 0$ ، حيث إنَّ أ ، ب، جـ أعداد حقيقية، وإنَّ

$أ^2 + ب^2 - 4 جـ > 0$ لاحظ أنَّ:

١) معامل $س^2$ = معامل $ص^2 = 1$

٢) مركز الدائرة (د ، هـ)

هو (– نصف معامل س ، – نصف معامل ص) = $\left(\frac{-أ}{2} ، \frac{-ب}{2}\right)$

٣) طول نصف القطر $ر = \sqrt{د^2 + هـ^2 - جـ}$ ، حيث $د^2 + هـ^2 - جـ > 0$

## مثال ٤

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة التي معادلتها:

$2س^2 + 2ص^2 + 16 ص = 18$

**الحل**

اكتب المعادلة على الصورة العامة:

$س^2 + ص^2 + 8 ص - 9 = 0$ لماذا؟

المركز (د ، هـ) = (– نصف معامل س، – نصف معامل ص)= $(0 ، -4)$

طول نصف قطر الدائرة $ر = \sqrt{(0)^2 + (-4)^2 - (-9)}$

$= \sqrt{16 + 9} = 5$ وحدة طول.

### فكر وناقش

١) حُلَّ مثال (٤) بطريقة أخرى (استخدم الصورة القياسية).

٢) رجوعًا إلى الصورة العامة لمعادلة الدائرة، لماذا كان الشرط ( $أ^2 + ب^2 - 4 جـ > 0$ ) ؟

### تدريب ٤

جد مركز وطول نصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي:

١) $س^2 + ص^2 - 2س + 6 ص - 6 = 0$

٢) $(3س + 6)^2 + (3ص - 12)^2 = 36$

## مثال ٥

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (٣ ، −١) ، (−٢ ، ٤).

**الحل**

بما أنَّ النقط تقع على الدائرة، فإنَّها تحقق معادلتها، ومنه:

$(٠)^٢ + (٠)^٢ + أ(٠) + ب(٠) + جـ = ٠$ تعويض النقطة (٠ ، ٠)

إذن جـ = ٠

$(٣)^٢ + (−١)^٢ + ٣ أ − ب = ٠$ تعويض النقطة (٣ ، −١)

٣ أ − ب = −١٠ ......... ١

$(−٢)^٢ + (٤)^٢ − ٢ أ + ٤ ب = ٠$ تعويض النقطة (−٢ ، ٤)

−٢ أ + ٤ ب = −٢٠ ...... ٢

وبحل المعادلتين ١ ، ٢ جبريًّا ينتج أنَّ:

أ = −٦ ، ب = −٨

ومنه تكون معادلة الدائرة: $س^٢ + ص^٢ − ٦ س − ٨ ص = ٠$

### تدريب ٥

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقط (٠ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، (−١ ، ٣)، ثم جد مركزها وطول نصف قطرها.

## مثال ٦

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين (٢ ، ٣) ، (−١ ، ١) ويقع مركزها على المستقيم الذي معادلته س−٣ص−١١ =٠.

**الحل**

بما أنَّ النقط (٢ ، ٣) ، (−١، ١) تقع على الدائرة، فإنَّها تحقق معادلتها، ومنه:

$٢$ أ + $٣$ ب + جـ = $-١٣$ ..... ①

$-$ أ + ب + جـ = $-٢$ ...... ②

وبما أنَّ مركز الدائرة ( د ، هـ ) يقع على المستقيم الذي معادلته س $-٣$ص $-١١ = ٠$

إذن د $-$ $٣$هـ $-$ $١١ = ٠$

ومنه $-$ أ + $٣$ب = $٢٢$ ...... ③ لماذا؟

وبحل نظام المعادلات الخطية الناتجة جبريًّا ينتج أنَّ:

أ = $-٧$ ، ب = $٥$ ، جـ = $-١٤$

ومنه فإنَّ معادلة الدائرة هي: س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ $-$ $٧$ س + $٥$ ص $-$ $١٤$ = $٠$

**تدريب ٦**

جد معادلة الدائرة التي تمر بالنقطتين ($-١$ ، $٣$) ، ($٥$ ، $١$) ويقع مركزها على محور الصادات.

١) جد معادلة الدائرة في كلِّ حالة من الحالات الآتية:

أ ) مركزها نقطة الأصل وطول قطرها ٨ وحدات.

ب) مركزها النقطة (−٢ ، ١) وتمر بالنقطة (٥ ، ١).

جـ) مركزها النقطة (٣ ، −٧) وتمس محور السينات.

د ) نهايتا قطر فيها هما النقطتان (٦ ، −١) ، (٤ ، ٣).

هـ) طول نصف قطرها يساوي (٥) وحدات، وتمس المحورين الإحداثيين، ويقع مركزها في الربع الرابع.

و ) تمر بالنقطتين (٤ ، ٤) ، (٠ ، −٢) ويقع مركزها على محور السينات.

ز ) تمر بالنقط (−٥ ، ٠) ، (−٣ ، ٤) ، (١ ، ٢).

ح) تمر بالنقطة (١ ، ٢) وتمس محور السينات عند النقطة (٧ ، ٠).

٢) جد إحداثيي المركز، وطول نصف قطر الدائرة المعطاة معادلتها في كل مما يأتي:

أ ) س$^٢$ + ص$^٢$ = ١٤٤

ب) (س + ١١)$^٢$ = ١٣ − (ص+٤)$^٢$

جـ) س$^٢$ + (ص − ٧)$^٢$ = ٨١

د ) س$^٢$ + ص$^٢$ − ٩ = ٨س + ٦ص

هـ) ٣س$^٢$ + ٣ص$^٢$ + ٦ص − ٢٧ = ٠

و ) (٢س − ٢)$^٢$ + (٢ص + ١٠)$^٢$ = ١٠٠

ز ) (س + ٤)$^٢$ + ص$^٢$ − ١٦ = ٠

٣) جد معادلة الدائرة التي يقع مركزها على المستقيم الذي معادلته ص−٢س=٤ وتمس محور السينات عند النقطة (١ ، ٠).

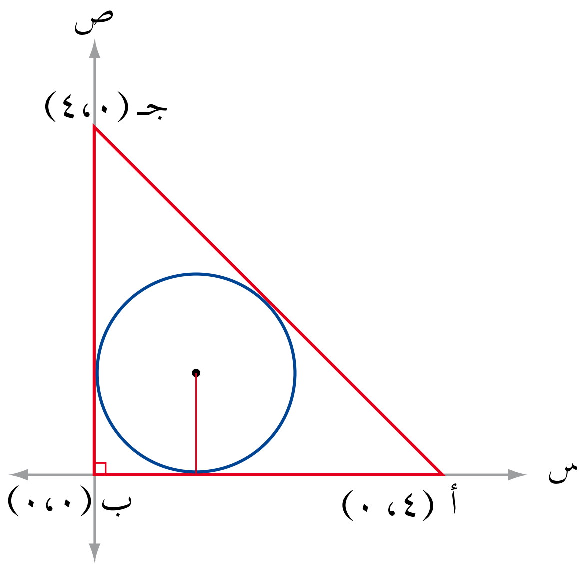
٤) جد معادلة الدائرة التي مركزها النقطة (−٢ ، −٢) وتمس المستقيم الذي معادلته ص=٣س+١٠

٥) تتحرك النقطة ل(س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س=٣+٢جاهـ ، ص=٤+٢جتاهـ حيث هـ زاوية متغيرة. جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ل، وبيِّن نوعه.

٦) جد قيم الثابت جـ التي تجعل المعادلة س$^{٢}$ + ص$^{٢}$ + ٨س − ٤ص + جـ = ٠ معادلة دائرة.

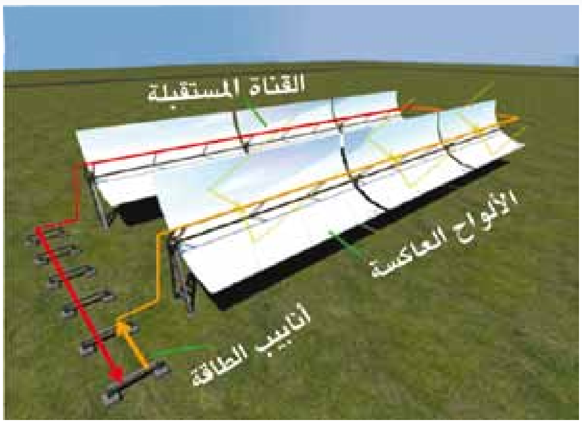
٧) جد معادلة الدائرة التي تمس كلًّا من المستقيمين س = ٠ ، ص = −٢ ، وتمر بالنقطة (٤ ، ٠) ويقع مركزها في الربع الأول، وطول نصف قطرها أكبر من وحدتين.

٨) معتمدًا الشكل (٥−١١) الذي يمثل دائرة مرسومة داخل المثلث أ ب جـ وتمس أضلاعه، جد معادلة هذه الدائرة.



الشكل (٥−١١)

## ثانيًا القطع المكافئ The Parabola



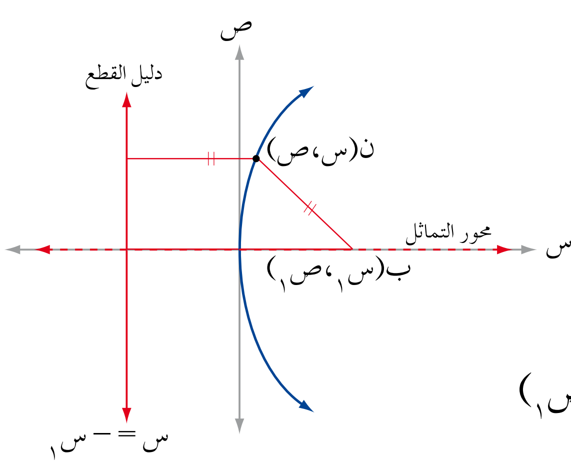

استخدمت الطاقة الشمسية لتوليد الكهرباء؛ حيث تُستعمل مرايا على شكل قطوع مكافئة، تعمل على تسخين زيت يمر خلال أنابيب مارّة ببؤر هذه القطوع.

في الحقيقة إنَّ استخدامات القطع المكافئ تجدها في العديد من التطبيقات مثل: العدسات والمرايا، أطباق البث والاستقبال، السلاسل والجسور المعلقة، وصناعة السيارات والطائرات والصواريخ والمركبات، كذلك مسارات المقذوفات الأرضية، فما القطع المكافئ؟

إذا تحركت النقطة ن(س ، ص) في المستوى الإحداثي، بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابتة ب($س_1$، $ص_1$) مساويًا دائمًا لبعدها عن المستقيم س= − $س_1$ الواقع في المستوى نفسه، فإنَّ المنحنى الناتج عن حركة هذه النقطة يُسمى قطعًا مكافئًا. انظر الشكل (٥–١٢).

ويكون رأسه النقطة (٠، $ص_1$)، **بؤرته** النقطة ($س_1$، $ص_1$)

و**معادلة محوره**: ص = $ص_1$ ، **معادلة دليله**: س = −$س_1$




الشكل (٥–١٢)

**تعريف**

**القطع المكافئ**

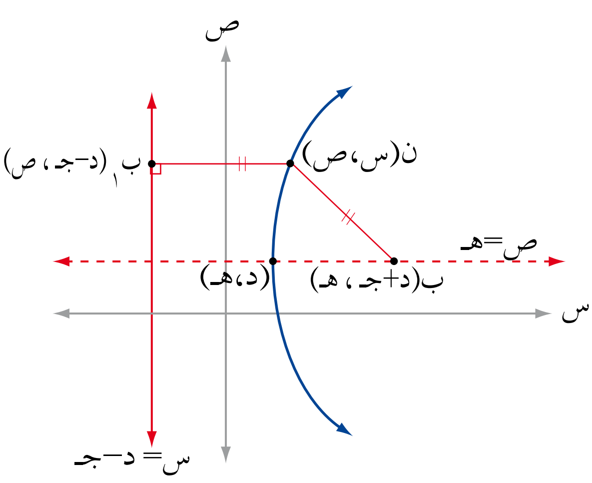
هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى البياني، بحيث يكون بُعدها عن نقطة ثابتة ب ( تُسمى بؤرة القطع المكافئ) مساويًا دائمًا لبعدها عن مستقيم معلوم ل لا يحوي النقطة ب ( يُسمى دليل القطع المكافئ).

لاحظ أنَّ القطع المكافئ متماثل حول المستقيم المار في البؤرة والعمودي على الدليل ويسمى هذا المستقيم محور التماثل أو محور القطع الكافئ وتسمّى النقطة الواقعة على محور القطع على منتصف المسافة بين البؤرة والدليل رأسَ القطع.

**الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة ( د ، هـ )، ومحور تماثله يوازي محور السينات:**

لإيجاد معادلة القطع المكافئ، الذي رأسه النقطة م ( د ، هـ )، لاحظ أن محوره يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ.

افرض أنَّ ن (س ، ص) النقطة المتحركة في المستوى حيث تقع على منحنى القطع المكافئ الذي بؤرته ب وتقع إلى اليمين من رأسه، فيكون إحداثيا البؤرة ب هما (د + جـ، هـ) حيث جـ هو بعد البؤرة عن الرأس، لاحظ أيضًا أنَّ النقطة $ب_١$ هي موقع العمود النازل من النقطة ن على الدليل ل، فيكون إحداثيا النقطة $ب_١$ هما (د− جـ ، ص). انظر الشكل (٥−١٣)



الشكل (٥−١٣)

ومن تعريف القطع المكافئ تجد أنَّ:

ن ب = ن $ب_١$

$$\sqrt{\left(س - (د+جـ)\right)^٢ + (ص - هـ)^٢} = \sqrt{\left(س - (د - جـ)\right)^٢ + (ص - ص)^٢}$$

وبتربيع الطرفين:

$$\left(س - (د + جـ)\right)^٢ + (ص - هـ)^٢ = \left(س - (د - جـ)\right)^٢ + (ص - ص)^٢$$

$$\left((س - د) - جـ\right)^٢ + (ص - هـ)^٢ = \left((س - د) + جـ\right)^٢ + ٠$$

وبفك الأقواس تجد أنَّ:

$(س - د)^٢ - ٢جـ(س - د) + جـ^٢ + (ص - هـ)^٢ = (س - د)^٢ + ٢جـ(س - د) + جـ^٢$ ومنه:

$$\boxed{(ص - هـ)^٢ = ٤جـ(س - د) \quad ، \quad جـ > ٠} \quad ........... (١)$$

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور السينات ومعادلته هي: ص= هـ.

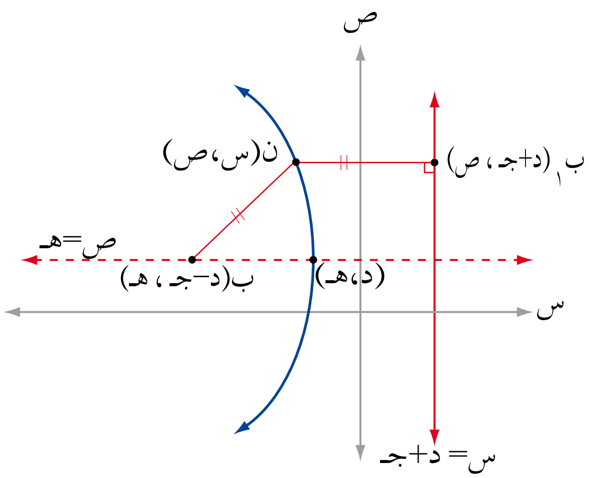
٣) بؤرته ب (د+جـ ، هـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله س= د − جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو اليمين.

أما إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور السينات ورأسه في النقطة (د ، هـ) وبؤرته ب ( د− جـ ، هـ) تقع على يسار رأسه، انظر الشكل (٥−١٤).

فإنَّ معادلته هي:




الشكل (٥−١٤)

(ص − هـ)٢ = −٤جـ (س − د) ، جـ > ٠ ......(٢)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور السينات ومعادلته هي ص= هـ.

٣) بؤرته ب (د− جـ ، هـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله س= د + جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو اليسار.

**مثال ١**

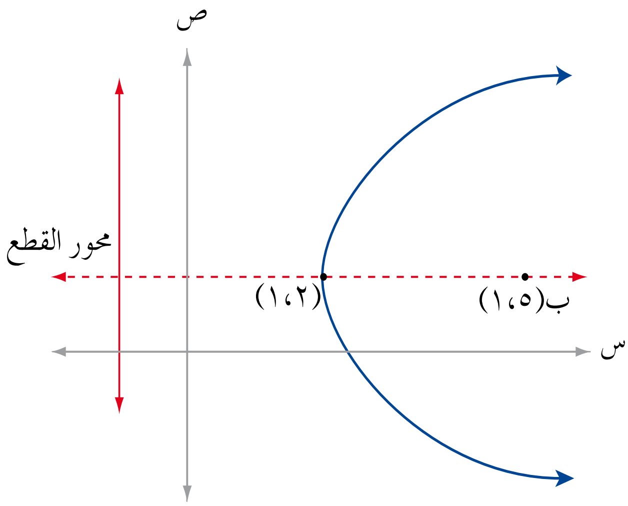
جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي:

١) رأسه النقطة (٢ ، ١) ، وبؤرته النقطة (٥ ، ١).

٢) رأسه النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س=٤ .

**الحل**

١) ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع المكافئ، وحدّد عليه العناصر كما في الشكل (٥ – ١٥).




الشكل (٥–١٥)

بما أنَّ القطع المكافئ مفتوح نحو اليمين،

إذن معادلة القطع المكافئ هي:

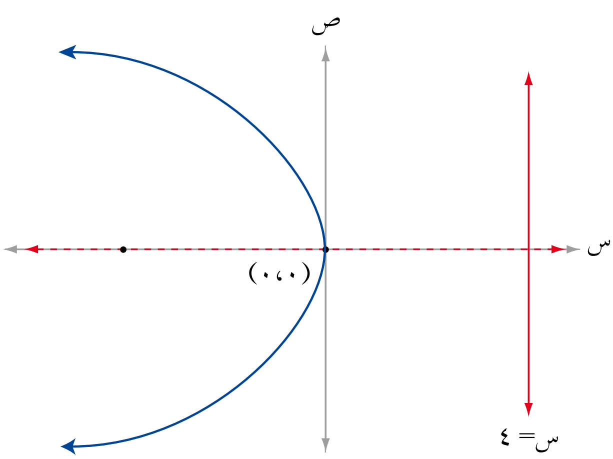
(ص – هـ)$^٢$ = ٤ جـ (س – د)

إحداثيا الرأس (د ، هـ) هما (٢ ، ١)

والبُعد بين الرأس والبؤرة جـ = ٣ (لماذا؟)

إذن المعادلة هي: (ص – ١)$^٢$ = ١٢ (س – ٢)

٢) ارسم شكلًا تقريبيًا للقطع المكافئ وحدد عليه العناصر كما في الشكل (٥ – ١٦).




الشكل (٥–١٦)

بما أنَّ منحنى القطع مفتوح نحو اليسار،

إذن الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ هي:

(ص – هـ)$^٢$ = –٤ جـ (س – د)

وبما أنَّ إحداثيي رأس القطع المكافئ (د ، هـ) هما (٠ ، ٠)

وَ بُعد الرأس عن الدليل يساوي ٤ ، إذن جـ = ٤

ومنه معادلة القطع المكافئ هي:

ص$^٢$ = –١٦ س

## تدريب ١

جد معادلة القطع المكافئ في كل مما يأتي، ثم ارسم منحناه:

١) رأسه النقطة (−١ ، ١) ، وبؤرته النقطة (−٥ ، ١) .

٢) رأسه النقطة (٢ ، −٣) ، ومعادلة دليله س = ١ .

### فكر وناقش

ما هي العناصر اللازمة لكتابة معادلة القطع المكافئ؟

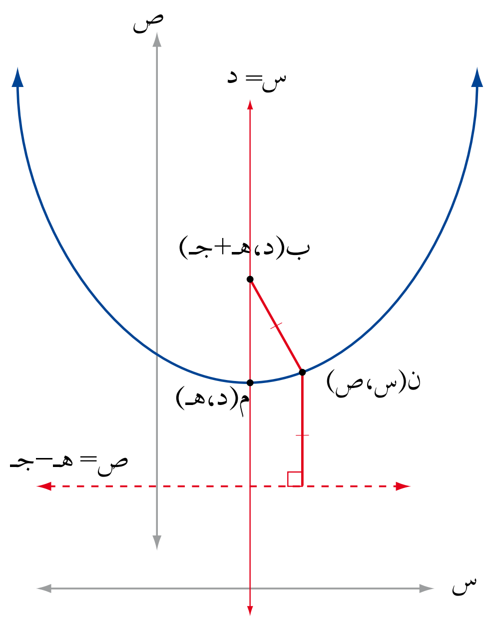
**الصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي رأسه النقطة (د ، هـ)، ومحور تماثله يوازي محور الصادات:**

إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات، ورأسه النقطة (د ، هـ) وبؤرته ب ( د ، هـ + جـ) تقع إلى الأعلى من رأسه.

انظر الشكل (٥−١٧).

فإنَّ معادلته هي:

$$\boxed{(س - د)^٢ = ٤ جـ (ص - هـ)، جـ > ٠} \quad .... (٣)$$




الشكل (٥−١٧)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

٢) محور تماثله يوازي محور الصادات، ومعادلته هي س = د.

٣) بؤرته النقطة ب (د ، هـ + جـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله ص = هـ − جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأعلى.

أما إذا كان محور القطع المكافئ يوازي محور الصادات ورأسه النقطة (د ، هـ) وبؤرته النقطة ب (د، هـ − جـ) تقع إلى الأسفل من رأسه، فإنَّ معادلة هذا القطع المكافئ هي:

(س − د)$^{٢}$ = −٤ جـ (ص − هـ)، جـ > ٠ ......(٤)

وهي إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع المكافئ الذي عناصره هي:

١) رأسه النقطة (د ، هـ).

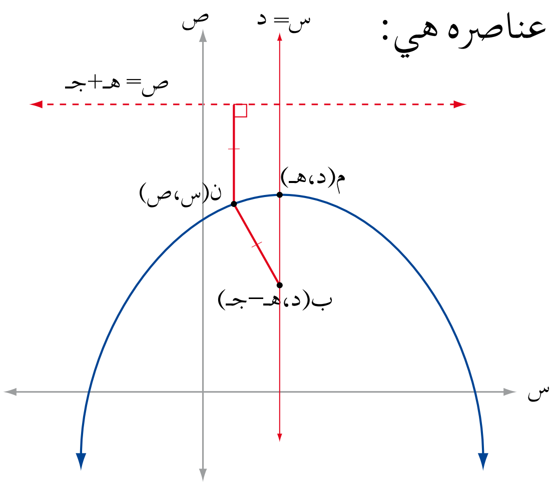
٢) محور تماثله يوازي محور الصادات، ومعادلته هي س=د.

٣) بؤرته النقطة ب (د ، هـ − جـ) ، حيث جـ هي بعد البؤرة عن الرأس.

٤) معادلة دليله ص= هـ + جـ.

ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأسفل.

انظر الشكل (٥−١٨).




الشكل (٥−١٨)

**فكر وناقش**

كيف توصلنا إلى كلٍّ من الصور القياسية (٢)، (٣)، (٤) ؟

## مثال ٢

جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

١) رأسه النقطة (٠ ، −١) ، وبؤرته النقطة (٠ ، ٢).

٢) رأسه النقطة (١ ، ١) ومعادلة دليله ص=٢.

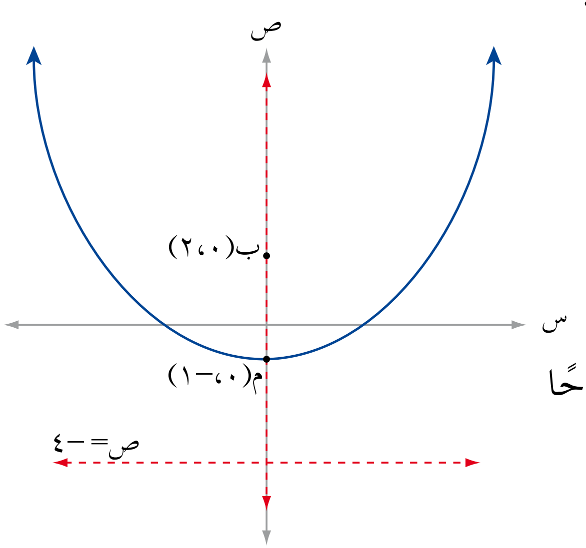
**الحل**

١) بما أنَّ الرأس هو النقطة (٠ ، −١)، وَ البؤرة هي النقطة (٠ ، ٢) ؛

إذن جـ = ٣، ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأعلى. ومنه معادلة القطع المكافئ هي:

(س− د)$^{٢}$ = ٤ جـ (ص− هـ)

س$^{٢}$ = ١٢ (ص+ ١) . والشكل (٥−١٩) يوضح ذلك.




الشكل (٥−١٩)

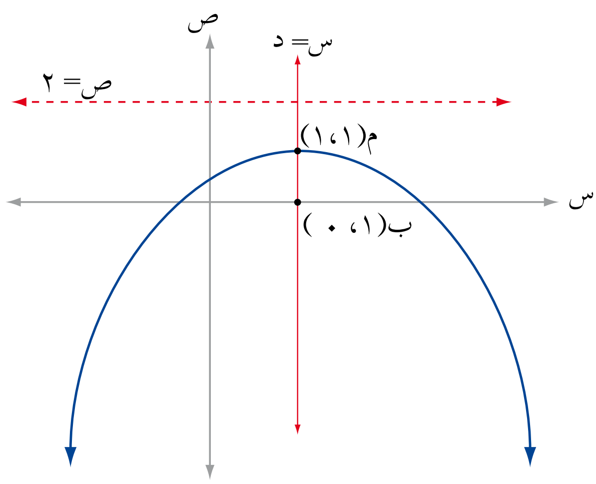
٢) بما أنَّ الرأس هو النقطة (١،١)، وَ معادلة دليله ص=٢ إذن جـ=١ ، ويكون منحنى القطع المكافئ مفتوحًا نحو الأسفل.

وَ تكون معادلة القطع على الصورة:

(س − د)$^{٢}$ = −٤ جـ (ص − هـ)

(س − ١)$^{٢}$ = − ٤ (ص − ١)

والشكل (٥−٢٠) يوضح التمثيل البياني التقريبي للقطع المكافئ.




الشكل (٥−٢٠)

## تدريب ٢

جد معادلة القطع المكافئ في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

١) رأسه النقطة (١ ، ١) ، وبؤرته النقطة (١ ، −٤).

٢) رأسه النقطة (٠ ، ٣) ومعادلة دليله ص + ٢ =٠

٣) بؤرته النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س = −٦

## مثال ٣

قطع مكافئ معادلته ص$^{٢}$ = ٨(س + ٤) ، جد عناصره ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الحل**

معادلة القطع هي ص$^{٢}$ = ٨(س + ٤)

وعند مقارنتها بالصورة القياسية لمعادلة القطع المكافئ (ص − هـ)$^{٢}$ = ٤ جـ (س − د)

نجد أنَّ:

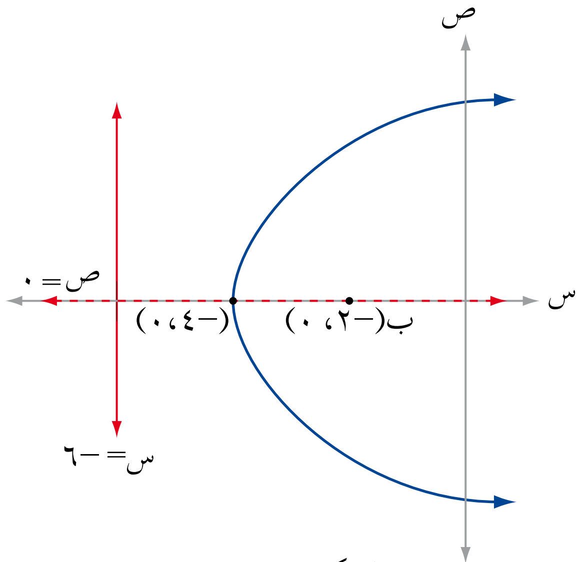
منحنى القطع مفتوح نحو اليمين. وإحداثيي الرأس (د ، هـ) هما (−٤، ٠) وَ جـ =٢ ، لماذا؟

ومنه فإنَّ البؤرة هي النقطة (−٢ ، ٠)

ومعادلة الدليـــل هي س = −٦

ومعادلة المحور هي ص = ٠

وَ الشكل (٥−٢١) يمثل منحنى القطع بيانيًا بشكل تقريبي.




الشكل (٥−٢١)

## تدريب ٣

جد إحداثيي الرأس والبؤرة، ومعادلة المحور والدليل، للقطع المكافئ الذي معادلته

$(س - ١)^٢ = - ص - ٣$ ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

بالرجـوع إلى مثال (٢) فرع (٢)، لاحظ أنَّه عند فك الأقواس في معادلة القطع المكافئ

$(س - ١)^٢ = -٤(ص - ١)$ ستجد أنَّ:

$س^٢ - ٢س + ١ = - ٤ ص + ٤$

أي أنَّ $س^٢ - ٢س + ٤ ص - ٣ = ٠$

وأنه يمكن كتابتها على الصورة $ص = أس^٢ + ب س + جـ$.

كذلك في مثال(٣)، عند فك الأقواس في المعادلة $ص^٢ = ٨(س + ٤)$ ، ستجد أنَّ:

$ص^٢ - ٨س - ٣٢ = ٠$

وأنَّه يمكن كتابتها على الصورة $س = أ ص^٢ + ب ص + جـ$.

- الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات هي:

  $س = أ ص^٢ + ب ص + جـ$ ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية. أ $\neq$ ٠

- الصورة العامة لمعادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات هي:

  $ص = أ س^٢ + ب س + جـ$ ، أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية. أ $\neq$ ٠

## مثال ٤

قطع مكافئ معادلته $ص^٢ + ٢ص + ٤س - ٧ = ٠$ ، جد عناصره:

**الحل**

اكتب معادلة القطع على الشكل الآتي:

$ص^٢ + ٢ص = -٤س + ٧$

وبإكمال المقدار $(ص^٢ + ٢ص)$ إلى مربع كامل، تجد أنَّ:

$ص^٢ + ٢ص + ١ = -٤س + ٧ + ١$ لماذا؟

أي أنَّ معادلة القطع المكافئ هي:

$(ص + ١)^٢ = -٤ (س - ٢)$ وهو قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات، ومنحناه مفتوح نحو اليسار.

فيكون رأس القطع هو النقطة $(٢ ، -١)$

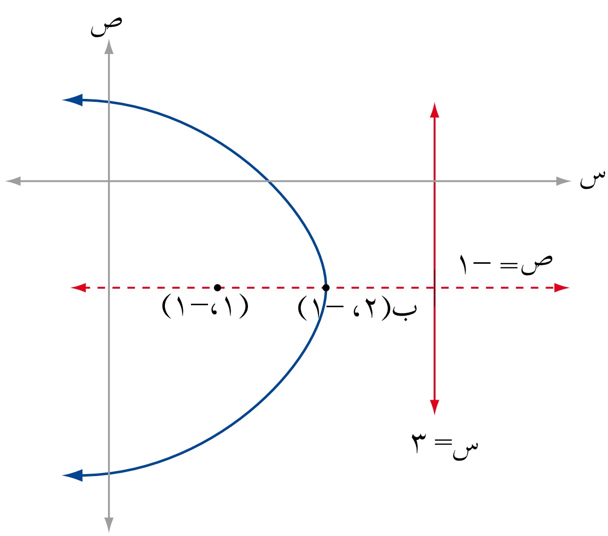
وبما أنَّ $-٤جـ = -٤$ فإن $جـ = ١$

وتكون بؤرته النقطة $(٢- جـ ، -١)$ وتساوي $(١ ، -١)$

ومعادلة دليله $س = ٢ + جـ$ ، ومنه $س = ٣$

ومعادلة محوره $ص = هـ$ ، ومنه $ص = -١$

انظر الشكل (٥-٢٢).



الشكل (٥-٢٢)

**تذكر:**

لإكمال مربع في س نضيف $(\frac{١}{٢}$ معامل $س)^٢$ إلى طرفي المعادلة، أو نضيفه ونطرحه في الطرف الواحد من المعادلة، بشرط أن يكون معامل $س^٢$ يساوي ١.

## تدريب ٤

جد عناصر القطع المكافئ الذي معادلته $س^٢ - ٤ص + ٤ = ٠$

## مثال ٥

جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات، وبؤرته النقطة (−٣ ، ٤) ويمر بالنقطة (٠ ، ٠) ، ويقع رأسه إلى يمين بؤرته. ثم ارسم منحناه.

**الحل**

بما أنَّ محوره يوازي محور السينات، ويقع رأسه إلى يمين بؤرته، فإنَّ منحناه مفتوح نحو اليسار ومعادلته على الصورة:

$(ص - هـ)^٢ = -٤جـ(س - د)$

بؤرة القطع (د − جـ ، هـ) هي النقطة (−٣ ، ٤)

إذن $\boxed{هـ = ٤}$

د − جـ = −٣ ← د = جـ −٣ .......... (١)

بما أنَّ القطع يمر بالنقطة (٠ ، ٠) فإنّها تحقق معادلته.

إذن $(٠ - ٤)^٢ = -٤جـ(٠ - جـ + ٣)$

ومنه $جـ^٢ - ٣جـ - ٤ = ٠$ لماذا؟

أي أنَّ (جـ −٤) (جـ +١) = ٠

ومنه جـ = ٤ أو جـ = −١ تهمل لماذا؟

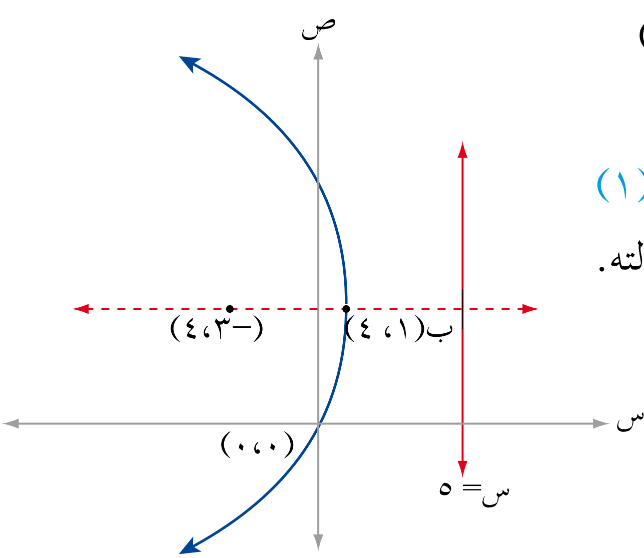
إذن $\boxed{جـ = ٤}$ ، $\boxed{د = ١}$

ومنه فإنَّ إحداثيي رأس القطع (د ، هـ) هما (١، ٤)

وتكون معادلة القطع المكافئ هي:

$(ص - ٤)^٢ = -١٦(س - ١)$

انظر الشكل (٥−٢٣).




الشكل (٥−٢٣)

## تدريب ٥

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٠ ، ٠) ، (١ ، ٣) ومحوره المستقيم الذي معادلته $س = -٢$ .

### فكر وناقش

ادعت ليلى أنَّ القطع المكافئ الذي معادلته $ص^{٢} - ٤ص - ٨س + ١ = ٠$ مفتوح لليمين، وأنَّ القطع الذي معادلته $س^{٢} + ٨س + ٣ص + ١ = ٠$ مفتوح للأسفل.

حاول أن تتنبأ كيف توصلت ليلى إلى إجابتها.

١) جد معادلة القطع المكافئ في كل حالة مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ ) رأسه النقطة (−١ ، ٠) وبؤرته النقطة (−٥ ، ٠)

ب) رأسه النقطة (−١ ، ٠) وبؤرته النقطة (٣ ، ٠)

جـ) رأسه النقطة (٢، ٣) وبؤرته النقطة (٢ ، ٨)

د ) رأسه النقطة (٢ ، ٣) وبؤرته النقطة (٢ ، −٢)

هـ) بؤرته النقطة (١ ، ٠) ومعادلة دليله ص = −٣

و ) بؤرته النقطة (٠ ، ٠) ومعادلة دليله س = ٥

ز ) بؤرته النقطة (٢ ، −٥) ومعادلة دليله س = ١,٢٥

ح ) رأسه النقطة (٢ ، −٣) ومعادلة دليله س = −١

ط) رأسه النقطة (−١ ، ٢) ومعادلة دليله ص = ٥

٢) جد كلًّا من إحداثيي الرأس، وإحداثيي البؤرة، ومعادلة الدليل، ومعادلة المحور، لكلٍّ من القطوع المكافئة المعطاة معادلتها في كلٍّ مما يأتي:

أ ) (ص − ٣)$^{٢}$ = ١٢(س + ١)

ب) (س + ٥)$^{٢}$ = ص − ٢

جـ) س = ص$^{٢}$

د ) ٢ص$^{٢}$ − ١٢ص − ١٦س = ١٤ .

هـ ) ٣س$^{٢}$ − ٤ = ٨ص + ١٢

و ) ٤س − ٣ص$^{٢}$ + ٩ص + ١٢ = ٠

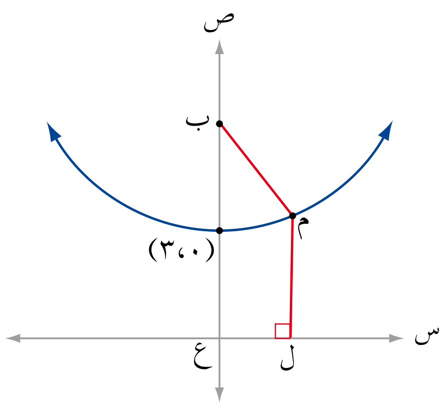
٣) جد معادلة القطع المكافئ الذي معادلة محوره س = ٢، ومعادلة دليله ص = ٥، وتبعد بؤرته ٨ وحدات عن دليله، ومفتوح نحو الأسفل.

٤) جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (٨ ، ٦) ، (٤ ، −٢)، ومحور تماثله المستقيم الذي معادلته س = ٢.

٥) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور الصادات، وبؤرته النقطة (١،٢) ويمر بالنقطة (٥ ، −١) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

٦) جد معادلة القطع المكافئ الذي محوره يوازي محور السينات، ويمرمنحناه بالنقط (٢ ، ٠)، (٥ ، ٢)، (٢ ، −٤) ويقع رأسه أسفل بؤرته.

٧) في الشكل (٥−٢٤) قطع مكافئ رأسه النقطة (٠ ، ٣) وبؤرته النقطة ب ودليله محور السينات، والنقطة م (٢، $\frac{١٠}{٣}$) تقع على منحناه. جد محيط الشكل الرباعي ل م ب ع.

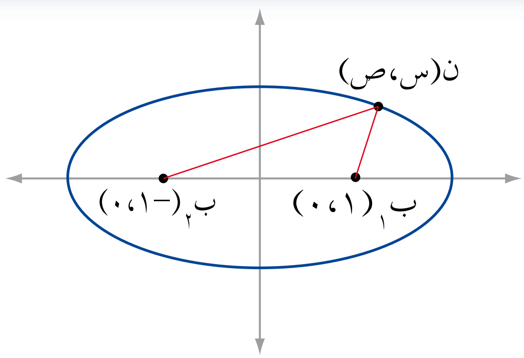


الشكل (٥−٢٤)

٨) قاعدة قوس على شكل قطع مكافئ تقع على أرض مستوية، طولها ١٢ مترًا، ورأس القوس يرتفع ٩ أمتار فوق سطح الأرض. اكتب المعادلة الممثلة لهذا القوس، علمًا أنَّه متماثل حول محور الصادات.

# ثالثًا القطع الناقص The Ellipse

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون مجموع بُعديها عن النقطتين الثابتتين ب$_١$(١ ، ٠) ، ب$_٢$ (−١ ، ٠) يساوي دائمًا ٦ وحدات.




الشكل (٥−٢٥)

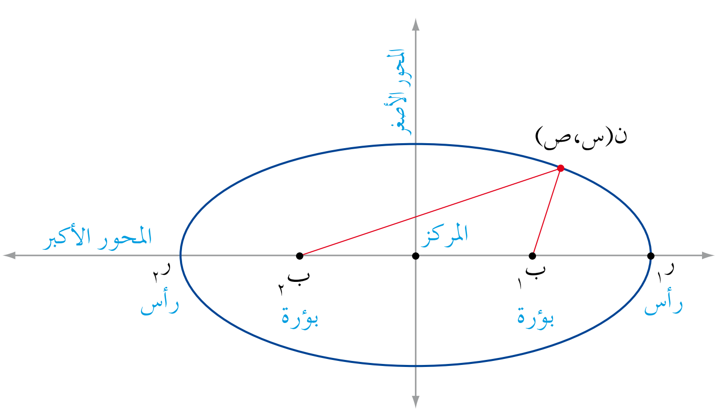
تعلمت سابقًا بعض أنواع القطوع المخروطية، والآن ستتعرف نوعًا آخر يسمى **القطع الناقص**.

**تعريف**

**القطع الناقص**

هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى الإحداثي، بحيث يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين ب$_١$ ، ب$_٢$ (تسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

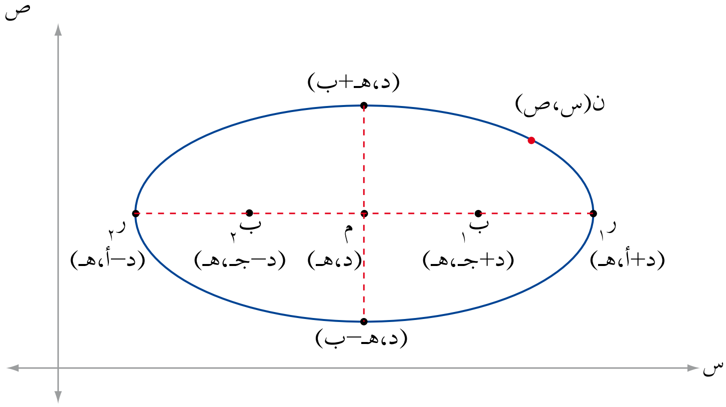
يمثل الشكل (٥−٢٦) منحنى قطع ناقص، له محوران للتماثل هما المستقيم المارّ بالبؤرتين ب$_١$، ب$_٢$ والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{ب_١ ب_٢}$، تسمى نقطة تقاطع المحورين **مركز القطع الناقص**، وتسمى المسافة بين البؤرتين **البعد البؤري**، أما المستقيم المار بالبؤرتين فيقطع منحنى القطع الناقص في النقطتين ر$_١$، ر$_٢$ وتُسميان **رأسَي القطع**، والقطعة المستقيمة $\overline{ر_١ ر_٢}$ تسمى **المحور الأكبر** **(المحور البؤري)**، بينما يتقاطع منحنى القطع مع المحور العمودي على المحور الأكبر في نقطتين، تشكل المسافة بينهما **طول المحور الأصغر** للقطع الناقص.




الشكل (٥−٢٦)

**الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة ( د ، هـ)، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات:**

اعتمادًا على الشكل (٥–٢٧)، لاحظ أنَّ مركز القطع الناقص هو النقطة م( د، هـ)، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات، وبفرض أنَّ البعد البؤري يساوي (٢جـ) ، والمقدار الثابت (٢أ) يساوي مجموع بعدي النقطة المتحركة ن عن بؤرتي القطع، حيث ٢أ > ٢جـ ، أ ، جـ أعداد حقيقة موجبة وبذلك فإنَّ إحداثيي




الشكل (٥–٢٧)

بؤرتي القطع الناقص هما: $ب_{١}$ ( د+جـ ، هـ) ، $ب_{٢}$ ( د– جـ ، هـ)

ومن تعريف القطع الناقص تجد أنَّ:

$ن ب_{١} + ن ب_{٢} = ٢أ$ ومنه

$$\sqrt{(س-(د+جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} + \sqrt{(س-(د-جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} = ٢أ$$

$$\sqrt{(س-(د+جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} = ٢أ - \sqrt{(س-(د-جـ))^{٢}+(ص-هـ)^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين ينتج أنَّ:

$$((س-د)-جـ)^{٢}+(ص-هـ)^{٢} =$$

$$٤أ^{٢} - ٤أ\sqrt{((س-د)+جـ)^{٢}+(ص-هـ)^{٢}} + ((س-د)+جـ)^{٢}+(ص-هـ)^{٢}$$

وبفك الأقواس وتبسيط المعادلة تجد أنَّ:

$$أ^{٢} + جـ(س-د) = أ\sqrt{((س-د)+جـ)^{٢}+(ص-هـ)^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين وإخراج حدود كعوامل مشتركة تجد أنَّ:

$$(أ^{٢}-جـ^{٢})(س-د)^{٢} + أ^{٢}(ص-هـ)^{٢} = أ^{٢}(أ^{٢}-جـ^{٢})$$

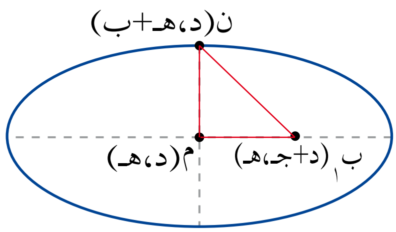
وبقسمة طرفي المعادلة على $أ^{٢}(أ^{٢}-جـ^{٢})$ ينتج أنَّ:

$$\frac{(س-د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص-هـ)^{٢}}{(أ^{٢}-جـ^{٢})} = ١$$

وبما أنَّ أ > جـ من تعريف القطع الناقص، وكلًّا من العددين أ ، جـ موجب فإنَّ

$أ^2 > جـ^2$ ومنه $أ^2 - جـ^2 > 0$

وإذا انطبقت النقطة ن على المحور الأصغر الموجب كما في الشكل (٥-٢٨)



الشكل (٥-٢٨)

سينتج المثلث ن م $ب_1$ قائم الزاوية في م. لماذا؟

فيه ن م = ب ، $ب_1$ م = جـ ، ن $ب_1$ = أ لماذا؟

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ن م $ب_1$ تجد أنَّ:

$أ^2 = ب^2 + جـ^2$ ومنه $ب^2 = أ^2 - جـ^2$ (فسِّر هذه النتيجة).

وبتعويض $ب^2$ في المعادلة ينتج أنَّ:

$$\frac{(س - د)^2}{أ^2} + \frac{(ص - هـ)^2}{ب^2} = 1 \quad ..........(1)$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص، وفي ما يأتي عناصره:

١) المركز النقطة (د ، هـ).

٢) البؤرتان النقطتان $ب_1$(د+جـ ، هـ) ، $ب_2$(د− جـ ، هـ) حيث جـ هي بُعد البؤرة عن المركز.

٣) الرأسان هما النقطتان $ر_1$(د+ أ ، هـ) ، $ر_2$(د− أ ، هـ)

٤) معادلة المحور الأكبر ص = هـ ، وطوله يساوي ٢أ

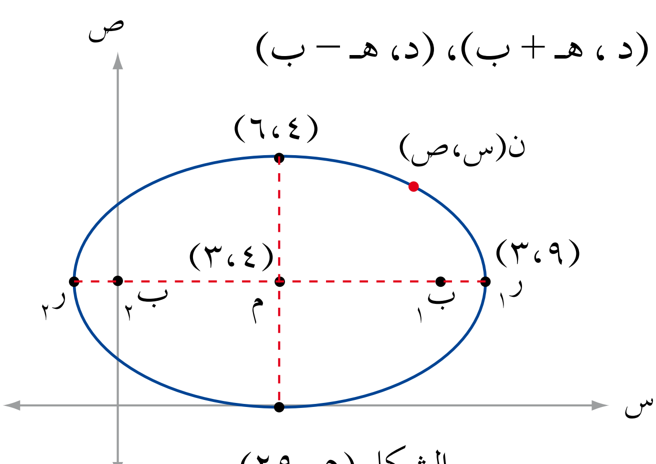
٥) معادلة المحور الأصغر س = د ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ البُعد البؤري يساوي ٢ جـ. (حيث $جـ^2 = أ^2 - ب^2$)

وأن إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (د ، هـ + ب)، (د، هـ − ب)

**مثال ١**

جد معادلة القطع الناقص الممثل منحناه في الشكل (٥-٢٩).



الشكل (٥-٢٩)

**الحل**

إحداثيا مركز القطع النقطة (٤ ، ٣)

ومن تعريف القطع الناقص تجد أنَّ:

نصف طول المحور الأصغر ب = ٣ وحدات. لماذا؟

نصف طول المحور الأكبر أ = ٥ وحدات. لماذا؟

وبما أنَّ المحور الأكبر موازٍ لمحور السينات، إذن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(س - ٤)^٢}{٢٥} + \frac{(ص - ٣)^٢}{٩} = ١$$

**تدريب ١**

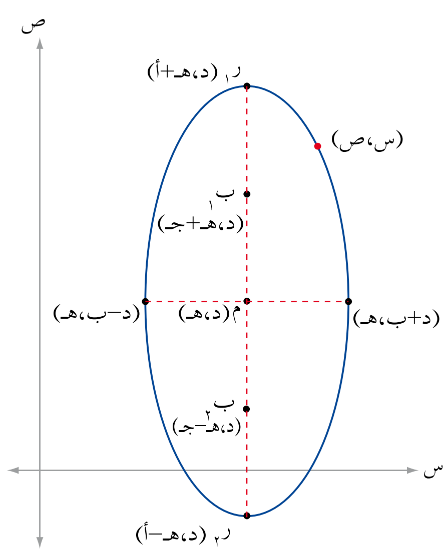
جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأصغر يوازي محور الصادات وطوله يساوي ٤ وحدات، وإحدى بؤرتيه النقطة (−٣ ، ٠). ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الصورة القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره الأكبر يوازي محور الصادات:**

إذا كان المحور الأكبر للقطع الناقص يوازي محور الصادات،

فإنَّ بؤرتي القطع الناقص هما النقطتان:

$ب_١$ (د ، هـ+جـ) ، $ب_٢$ (د، هـ − جـ) كما يوضح الشكل (٥−٣٠).




الشكل (٥−٣٠)

وبإجراء الخطوات السابقة تجد أنَّ معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} = ١$$ ..........(٢) لماذا؟

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الناقص الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه هما النقطتان $ب_١$(د ، هـ + جـ) ، $ب_٢$(د ، هـ − جـ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما النقطتان $ر_١$(د، هـ + أ) ، $ر_٢$(د، هـ − أ)

٤) المحور الأكبر يوازي محور الصادات ومعادلته س = د ، وطوله يساوي ٢أ

٥) المحور الأصغر يوازي محور السينات ومعادلته ص = هـ ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ البعد البؤري يساوي ٢جـ. (حيث $جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢$)

وأن إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (د + ب ، هـ)، (د − ب، هـ)

## الاختلاف المركزي للقطع الناقص

لاحظ من تعريف القطع الناقص أنَّ جـ < أ ، وأنَّ كلًّا من القيمتين أ ، جـ موجبتان، ومنه $\frac{جـ}{أ} < ١$ (لماذا؟)

تسمى النسبة ($\frac{جـ}{أ}$) **الاختلاف المركزي للقطع الناقص**، وستلاحظ أنَّ قيمة الاختلاف المركزي < ١، ولذلك سُمِّي القطع ناقصًا؛ لأنَّ اختلافه المركزي نقص عن واحد.

**تعريف**

**الاختلاف المركزي للقطع الناقص:**

هو النسبة بين نصف البُعد البؤري إلى نصف طول المحور القاطع (الأكبر) = جـ : أ

**مثال ٢**

جد معادلة القطع الناقص في كلٍّ مما يأتي:

١) مركزه النقطة (٢ ، ٣)، وإحدى بؤرتيه النقطة (٢ ، −١)، وطول محوره الأصغر يساوي (٦) وحدات.

٢) بؤرتاه النقطتان (٤ ، ١) ، (٠ ، ١) ويتقاطع منحناه مع المحور الأكبر عند س = ٢ + $\sqrt{٥}$

**الحل**

١) لاحظ أنَّ المركز والبؤرة يقعان على مستقيم يوازي محور الصادات، أي أنَّ المحور الأكبر يوازي محور الصادات.

إذن معادلة القطع الناقص هي: $\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} = ١$

وبما أنَّ المركز(٢ ، ٣) والبؤرة (٢، −١)، فإنَّ نصف البُعد البؤري جـ = ٤ وحدات.

وطول المحور الأصغر = ٦ وحدات، أي أنَّ ب = ٣ وحدات.

لإيجاد أ استخدم المعادلة:

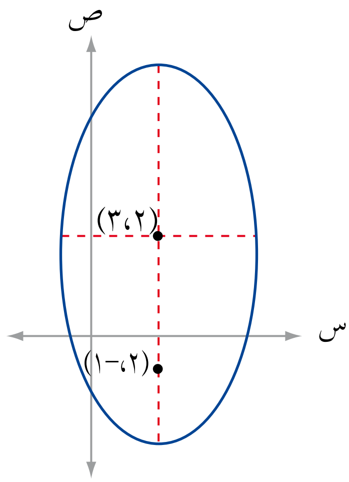
أ$^{٢}$ = ب$^{٢}$ + جـ$^{٢}$

ومنه أ$^{٢}$ = ٩ + ١٦ = ٢٥

إذن معادلة القطع الناقص هي:

$$\frac{(س - ٢)^{٢}}{٩} + \frac{(ص - ٣)^{٢}}{٢٥} = ١$$

انظر الشكل(٥–٣١).




الشكل (٥–٣١)

٢) بما أنَّ البؤرتين تقعان على مستقيم يوازي محور السينات، فإنَّ المحور الأكبر للقطع يوازي محور السينات، وتكون معادلة القطع هي:

$$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

والبؤرتان (٤ ، ١)، (٠ ، ١) ومنه جـ =٢.

إحداثيا مركز القطع الناقص النقطة (٢ ، ١) لماذا؟

وبما أنَّ منحنى القطع يتقاطع مع المحور الأكبر في الرأسين ؛ فإن إحداثيي أحد رؤوس القطع هو النقطة (٢+$\sqrt{٥}$ ، ١)، وبذلك فإنَّ أ = $\sqrt{٥}$ . لماذا؟

ولإيجاد قيمة ب، استخدم المعادلة:

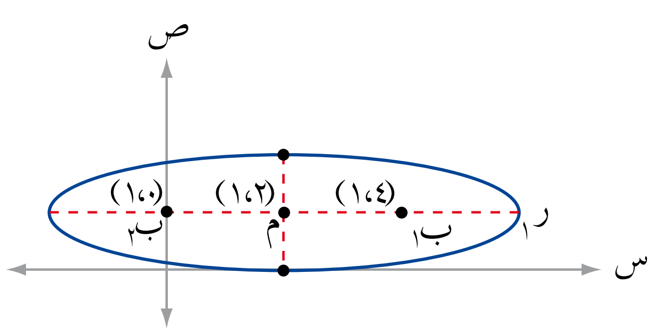
ب$^{٢}$ = أ$^{٢}$ − جـ$^{٢}$

= ٥ − ٤ =١

إذن معادلة القطع هي:

$$\frac{(س- ٢)^{٢}}{٥} + \frac{(ص- ١)^{٢}}{١} = ١$$

انظر الشكل (٥–٣٢).




الشكل (٥–٣٢)

## تدريب ٢

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه النقطتان $ب_١$(−٢ ، ٣) ، $ب_٢$(−٢ ، ٩) ، وطول محوره الأكبر ١٢ وحدة.

## مثال ٣

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(س + ١)^٢}{١٦} + \frac{(ص − ٢)^٢}{٢٥} = ١$ ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الحل**

بما أنَّ $أ^٢ = ٢٥$ ، $ب^٢ = ١٦$ فإنَّ المحور الأكبر يوازي محور الصادات وتكون معادلة القطع الناقص على الصورة:

$$\frac{(س - د)^٢}{ب^٢} + \frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} = ١$$

$أ^٢ = ٢٥$ ، ومنه أ $= \mp ٥$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

$ب^٢ = ١٦$، ومنه ب $= \mp ٤$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

$جـ^٢ = أ^٢ - ب^٢ = ٩$ ومنه جـ $= \mp ٣$ تهمل القيمة السالبة، لماذا؟

عناصر القطع الناقص هي:

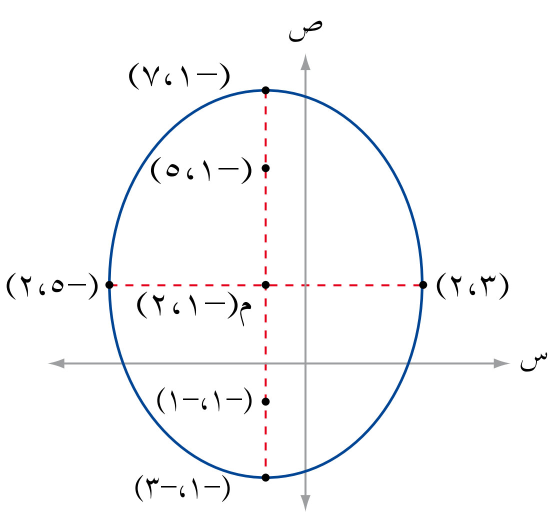
١) مركزه: (د ، هـ) هو النقطة (−١ ، ٢).

٢) بؤرتاه: $ب_١$ (د ، هـ + جـ) = (−١ ، ٥) ،
$ب_٢$ (د ، هـ − جـ) = (−١ ، −١)

٣) رأساه: $ر_١$ (د ، هـ + أ) = (−١ ، ٧) ،
$ر_٢$ (د ، هـ − أ) = (−١ ، −٣)

٤) محوره الأكبر يوازي محور الصادات
ومعادلته س = −١، وطوله = ٢أ = ١٠ وحدات

٥) محوره الأصغر يوازي محور السينات
ومعادلته ص = ٢، وطوله = ٢ب = ٨ وحدات



الشكل (٥−٣٣)

والشكل (٥−٣٣) يمثل شكلًا تقريبيًّا لمنحنى القطع.

لاحظ أنَّ إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (٣ ، ٢) ، (−٥، ٢)

**تدريب ٣**

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$ ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**مثال ٤**

جد عناصر ومعادلة القطع الناقص الذي رأساه هما النقطتان (٥ ، ٠)، (−٥ ، ٠) واختلافه المركزي ٠,٨.

**الحل**

لاحظ أنَّ محور القطع الأكبر يوازي محور السينات، فتكون معادلة القطع الناقص:

$$\frac{(س - د)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص - هـ)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$$

٢أ = ١٠، ومنه أ = ٥ لماذا؟

وبما أنَّ الاختلاف المركزي = $\frac{جـ}{أ} = \frac{٨}{١٠}$

إذن جـ = ٤

$ب^{٢} = أ^{٢} - جـ^{٢}$

= ٢٥ − ١٦

= ٩ ، ومنه ب = ٣

وبذلك فإنَّ عناصر هذا القطع الناقص هي:

١) مركزه (د ، هـ) هو النقطة (٠ ، ٠)

٢) بؤرتاه (د ∓ جـ ، هـ) = (∓ ٤ ، ٠)

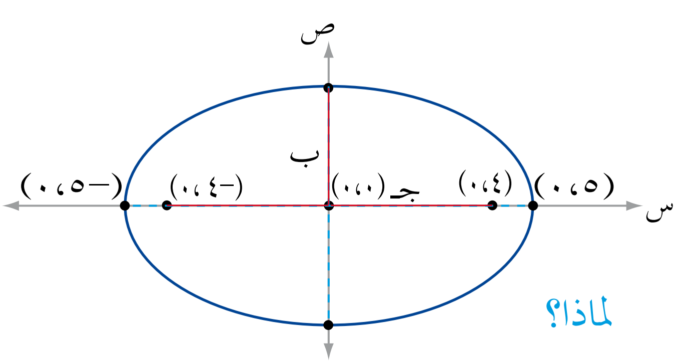
٣) رأساه (∓ ٥، ٠)

٤) محوره الأكبر ينطبق على محور السينات ومعادلته ص=٠، وطوله ٢أ = ١٠ وحدات.

٥) محوره الأصغر ينطبق على محور الصادات ومعادلته س=٠، وطوله ٢ب = ٦ وحدات.

ومعادلته هي: $\frac{س^{٢}}{٢٥} + \frac{ص^{٢}}{٩} = ١$

انظر الشكل (٥−٣٤).




الشكل (٥−٣٤)

لاحظ أنَّ إحداثيي طرفي محوره الأصغر هما النقطتان (٠، ٣) ، (٠، −٣).

## تدريب ٤

جد معادلة القطع الناقص الذي أحد رؤوسه النقطة (٤ ، ١)، والبؤرة القريبة من هذا الرأس هي النقطة (٢ ، ١) واختلافه المركزي ٠,٥

اعتمادًا على مثال(٣) معادلة القطع الناقص هي :

$$\frac{(س+١)^٢}{١٦} + \frac{(ص-٢)^٢}{٢٥} = ١$$

وبفك حدود المعادلة لتحويلها إلى الصورة العامة، تجد ما يلي:

$$٢٥(س + ١)^٢ + ١٦(ص - ٢)^٢ = ٤٠٠$$

$$٢٥(س^٢ + ٢س + ١) + ١٦(ص^٢ - ٤ص + ٤) - ٤٠٠ = ٠$$

$$٢٥س^٢ + ٥٠س + ٢٠ + ١٦ص^٢ - ٦٤ص + ٦٤ - ٤٠٠ = ٠$$

$$٢٥س^٢ + ١٦ص^٢ + ٥٠س - ٦٤ص - ٣١١ = ٠$$

لاحظ أنَّ المعادلة هي على الصورة:

$$أس^٢ + ب ص^٢ + جـ س + د ص + هـ = ٠$$

**الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص هي:**

$أس^٢ + ب ص^٢ + جـ س + د ص + هـ = ٠$ ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية

$أ \times ب > ٠$، $أ \neq ب$

## تدريب ٥

جد معادلة القطع الناقص الذي يمس كلًّا من المستقيمات:

$س = ٨$ ، $س = -٢$ ، $ص = ٩$ ، $ص = ١$. حل السؤال بطريقتين مختلفتين.

### فكر وناقش

بالرجوع إلى الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص، ناقش ما يأتي:

١) لماذا وُضِع الشرط $أ \neq ب$ ؟

٢) ما الشكل الهندسي الذي تمثله المعادلة إذا كانت $أ \times ب = ٠$ ؟ (ناقش جميع الحالات)

**تحدث**

ما المعطيات اللازمة لإيجاد معادلة قطع ناقص؟

## مثال ٥

جد عناصر القطع الناقص الذي معادلته:

$س^٢ + ١٠ص^٢ - ٦س - ٤٠ص - ١١ = ٠$

**الحل**

أعد ترتيب المعادلة مع تجميع الحدود تجد أنَّ:

$(س^٢ - ٦س) + ١٠(ص^٢ - ٤ص) = ١١$

وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربعين كاملين تجد أنَّ:

$\left(س^٢ - ٦س + (-٣)^٢ - (-٣)^٢\right) + ١٠\left(ص^٢ - ٤ص + (-٢)^٢ - (-٢)^٢\right) = ١١$

$(س-٣)^٢ - ٩ + ١٠(ص-٢)^٢ - ٤٠ = ١١$

$(س-٣)^٢ + ١٠(ص-٢)^٢ = ٦٠$

أي أنَّ $\frac{(س-٣)^٢}{٦٠} + \frac{(ص-٢)^٢}{٦} = ١$ لماذا؟

أكمل الحل لإيجاد عناصر القطع الناقص.

### تدريب ٦

قطع ناقص معادلته $٤س^٢ + ٣ص^٢ + ١٦س = ١٧٦$، جد كلًّا مما يأتي:

١) إحداثيي مركزه.

٢) إحداثيي الرأسين.

٣) إحداثيي البؤرتين.

٤) الاختلاف المركزي.

**فكر وناقش**

كتب خالد وعمر المعادلة ($س^2 + 10 ص^2 - 6 س - 40 ص - 11 = 0$) على الصورة القياسية بالشكل الآتي، وعلى الترتيب:

خالد: $\frac{(س-3)^2}{1} + \frac{(ص-2)^2}{100} = 1$

عمر: $\frac{(س-3)^2}{100} + \frac{(ص-2)^2}{1} = 1$

اكتشف الخطأ في حل كلٍّ منهما، واكتب الصواب.

**فكر وناقش**

هل تختلف عناصر القطع الناقص الذي معادلته $س^2 + 4 ص^2 + 6 س - 8 ص + 9 = 0$

عن عناصر القطع الناقص الذي معادلته $2 س^2 + 8 ص^2 + 12 س - 16 ص + 18 = 0$ ؟

برِّر إجابتك.

تُعطى مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{أ^2} + \frac{ص^2}{ب^2} = 1$ بالمقدار ( أ ب $\pi$)

**مثال ٦**

جد مساحة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{س^2}{121} + \frac{ص^2}{9} = 1$

**الحل**

مساحة القطع الناقص = أ ب $\pi$

$= 11 \times 3 \times \pi = 33 \pi$ وحدة مساحة لماذا؟

١) جد معادلة القطع الناقص في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ ) رأساه النقطتان (٤ ، ١)، (−٢ ، ١) وطول محوره الأصغر ٤ وحدات.

ب) بؤرتاه النقطتان ( ٠ ، ∓ ٢) ، ورأساه النقطتان ( ٠ ، ∓ ٥).

جـ) مركزه نقطة الأصل، وبؤرتاه تقعان على محور السينات، وبعده البؤري ٦ وحدات، والفرق بين طولَيْ محورَيْهِ يساوي ٢ وحدة.

د ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره الأكبر يوازي محور السينات، ويمر منحناه بالنقطة (١ ، ٣)، واختلافه المركزي ٠,٥

هـ) يمر بالنقطة (−٨ ، ٣)، ويقع مركزه على المستقيم س=٢، وبؤرتاه تقعان على المستقيم الذي معادلته ص= ٣ واختلافه المركزي ٠,٦.

و ) رأساه النقطتان (٢ ، ٠)، (−٨ ، ٠)، وطول محوره الأصغر يساوي أربعة أمثال المسافة بين أحد رأسيه والبؤرة القريبة من ذلك الرأس.

ز ) نهايتا محوره الأصغر النقطتان ( ∓ ٣ ، ٠) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣).

٢) جد عناصر القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٤٤} + \frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} = ١$

ب) $\frac{(\text{س}-٤)^{٢}}{٢٥} + \frac{(\text{ص}+١)^{٢}}{٨١} = ١$

جـ) $\text{س}^{٢} + ٤\text{ص}^{٢} = ١٠٠$

د ) $\text{س}^{٢} + ٢\text{ص}^{٢} + ٤\text{ص} = ٦\text{س} - ٧$

هـ ) $(٢\text{ص}+٤)^{٢} + (٣ - \text{س})^{٢} = ٦٤$

و ) $٤\text{س}^{٢} + ٣\text{ص}^{٢} = \frac{٤}{٣}$

٣) جد معادلة القطع الناقص الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها $(٢\text{س} - ٦)^{٢} + (٢\text{ص} - ٤)^{٢} = ٣٦$ ، وطول محوره الأصغر يساوي طول قطر هذه الدائرة، ومعادلة محوره الأصغر هي س= −١.

٤) جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه النقطة (١ ، ١)، وإحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $(ص-١)^{٢} - ١٢س = ٠$ ، وطول محوره الأصغر يساوي (١٠)وحدات.

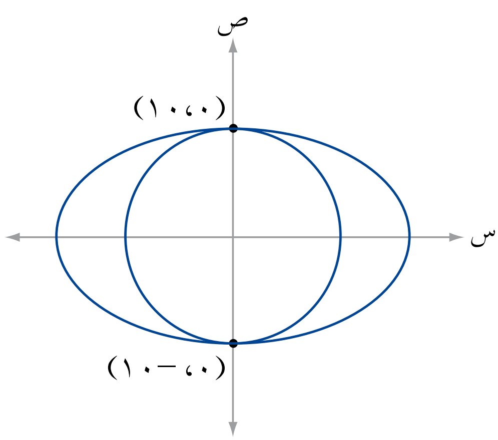
٥) قطع ناقص بؤرتاه النقطتان $ب_{١}(٤ ، ٠)$ ، $ب_{٢}(-٤ ، ٠)$ والنقطة ن(س ، ص) تقع على منحنى القطع حيث إنَّ محيط المثلث ن $ب_{١}$ $ب_{٢}$ يساوي ٢٤سم، جد معادلته.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) حيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س= ٥+ ٣جاهـ ، ص= ٢+٢جتاهـ ، حيث هـ زاوية متغيرة، بيِّن أنَّ النقطة (و) تتحرك على منحنى قطع ناقص، ثم جد بعده البؤري.

٧) قطع ناقص مساحته(٤٠ π) وحدة مربعة، ورأساه النقطتان ( ∓ ٨ ، ٠) ، جد معادلته.

٨) جد طول نصف قطر الدائرة التي مساحتها تساوي مساحة القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{س^{٢}}{٨١} + \frac{ص^{٢}}{١٦} = ١$$



الشكل (٥–٣٥)

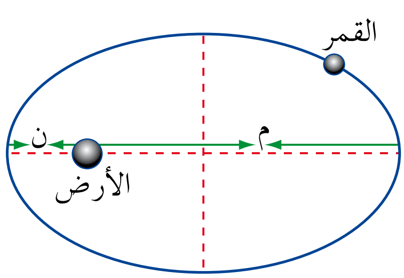
٩) يمثل الشكل (٥–٣٥) دائرة وقطع ناقص مشتركين في المركز (٠ ، ٠)، إذا كانت مساحة القطع الناقص تساوي مثلَيْ مساحة الدائرة المرسومة داخله، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

ب) معادلة القطع الناقص.

١٠) لمعادلة القطع الناقص $\frac{(س-ل)^{٢}}{أ^{٢}} + \frac{(ص-ك)^{٢}}{ب^{٢}} = ١$

أثبت أنَّ $ب^{٢} = أ^{٢}(١ - هـ^{٢})$ حيث هـ: الاختلاف المركزي للقطع الناقص.

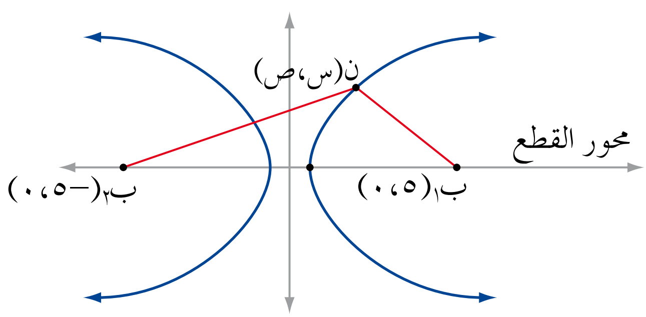


الشكل (٥–٣٦)

١١) يدور القمر حول الأرض في مدار على شكل قطع ناقص ، حيث تقع الأرض في إحدى بؤرتي المدار، فإذا كانت أطول مسافة بين الأرض والقمر تساوي (م) كم، وأقصر مسافة بينهما تساوي (ن) كم، كما في الشكل (٥–٣٦)، فأثبت أنَّ الاختلاف المركزي لهذا القطع الناقص يساوي $\frac{م-ن}{م+ن}$

## رابعًا القطع الزائد
The Hyperbolic

جد معادلة المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى بحيث يكون الفرق المطلق بين بُعدَيْها عن النقطتين الثابتتَيْن $ب_{١}$(٥ ، ٠) ، $ب_{٢}$(-٥ ، ٠) يساوي دائما ٨ وحدات.



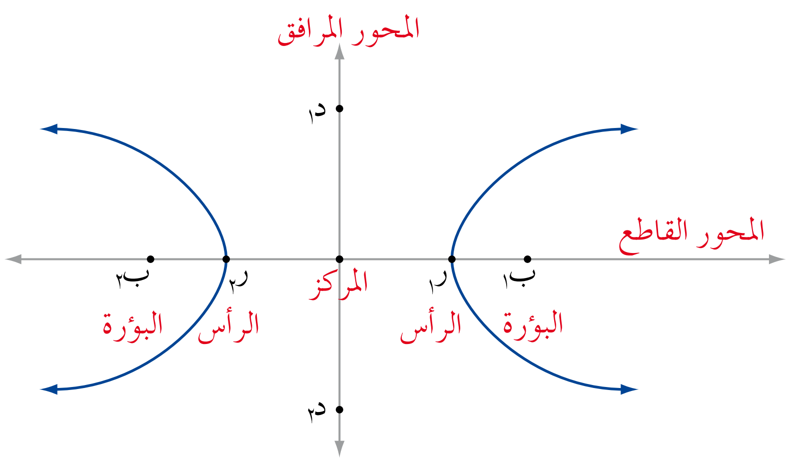

الشكل (٥-٣٧)

تعلمت سابقًا بعض أنواع القطوع المخروطية، والآن ستتعرف نوعا آخر يسمى **القطع الزائد**.

**تعريف**

**القطع الزائد**

هو المحل الهندسي للنقطة ن(س ، ص) التي تتحرك في المستوى الإحداثي، بحيث يكون الفرق المطلق بين بُعْدَيها عن نقطتين ثابتتين $ب_{١}$ ، $ب_{٢}$ (تُسميان البؤرتين) يساوي مقدارًا ثابتًا.

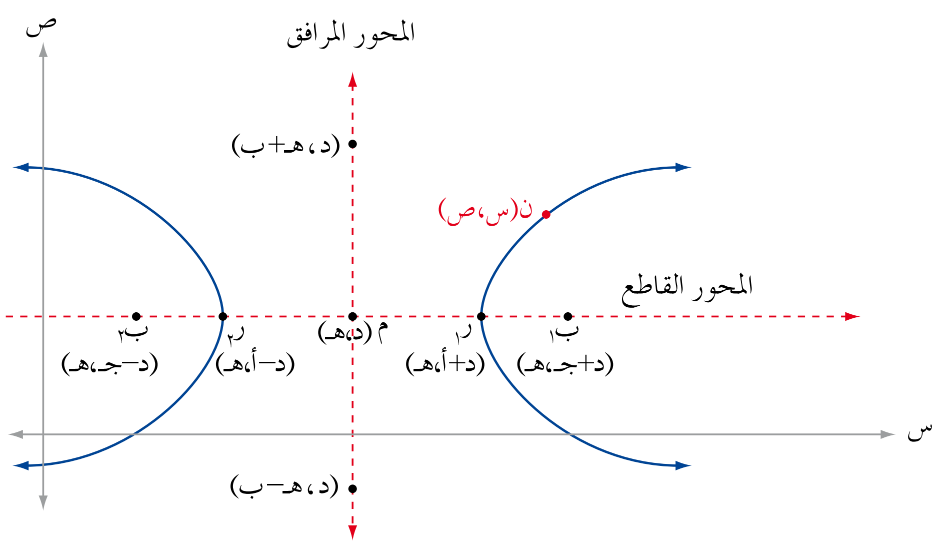



الشكل (٥-٣٨)

يمثل الشكل (٥-٣٨) منحنى قطع زائد، له محوران للتماثل هما المستقيم المارّ بالبؤرتين $\text{ب}_{١}$، $\text{ب}_{٢}$ والمستقيم العمودي عليه والمنصف للقطعة المستقيمة $\overline{\text{ب}_{١}\text{ب}_{٢}}$، تُسمى نقطة تقاطع المحورين **مركز القطع الزائد**، وتسمى المسافة بين البؤرتين **البعد البؤري**، أما المستقيم المار بالبؤرتين فيقطع منحنى القطع الزائد في النقطتين $\text{ر}_{١}$، $\text{ر}_{٢}$ وتسميان **رأسي القطع**، والقطعة المستقيمة $\overline{\text{ر}_{١}\text{ر}_{٢}}$ تُسمى **المحور القاطع** (المحور البؤري)، بينما تسمى القطعة المستقيمة التي طرفيها النقطتان $\text{د}_{١}$، $\text{د}_{٢}$ **المحور المرافق** للقطع الزائد.

**الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة ( د ، هـ )، ومحوره القاطع يوازي محور السينات:**

اعتمادًا على الشكل (٥-٣٩)، لاحظ أنَّ مركز القطع الزائد هو النقطة م( د، هـ)، ومحوره القاطع يوازي محورالسينات، وبفرض أنَّ البعد البؤري يساوي (٢جـ) ، والمقدار الثابت (٢أ) يساوي الفرق المطلق بين بُعدَي النقطة المتحركة ن عن بؤرَتَيْ القطع، حيث ٢أ < ٢جـ ، أ، جـ أعداد حقيقية موجبة وبذلك فإنَّ إحداثيَيْ بؤرتَيْ القطع الزائد هما: $\text{ب}_{١}$( د+جـ ، هـ)، $\text{ب}_{٢}$( د- جـ ، هـ)




الشكل (٥-٣٩)

ومن تعريف القطع الزائد تجد أنَّ:

$$|\text{ن ب}_{١} - \text{ن ب}_{٢}| = ٢\text{أ} \quad \text{ومنه}$$

$$\sqrt{(\text{س} - (\text{د}+\text{جـ}))^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}} - \sqrt{(\text{س} - (\text{د} - \text{جـ}))^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}} = \mp ٢\text{أ}$$

$$\sqrt{(\text{س} - (\text{د}+\text{جـ}))^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}} = \mp ٢\text{أ} + \sqrt{(\text{س} - (\text{د} - \text{جـ}))^{٢} + (\text{ص} - \text{هـ})^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين:

$$((\text{س}-\text{د})-\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=$$

$$٤\text{أ}^{٢} \pm ٤\text{أ}\sqrt{((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}} + ((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}$$

وبفك الأقواس وتبسيط المعادلة تجد أنَّ:

$$\text{أ}^{٢}+\text{جـ}(\text{س}-\text{د}) = \pm\,\text{أ}\sqrt{((\text{س}-\text{د})+\text{جـ})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}$$

وبتربيع الطرفين وإخراج حدود كعوامل مشتركة تجد أنَّ:

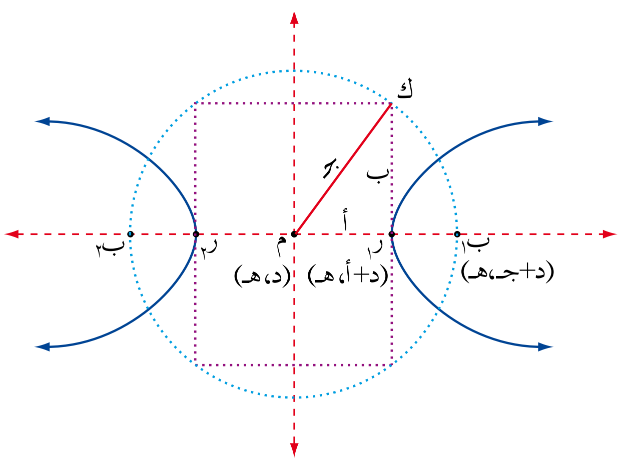
$$(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})(\text{س}-\text{د})^{٢}+\text{أ}^{٢}(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{أ}^{٢}(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})$$

وبقسمة طرفي المعادلة على أ² ( أ² − جـ²) ينتج أنَّ:

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}+\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{(\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢})}=١$$

من تعريف القطع الزائد تجد أنَّ أ < جـ، وبما أنَّ كلًّا من العددين أ ، جـ موجب فإنّ

$$\text{أ}^{٢} < \text{جـ}^{٢} \quad \text{ومنه} \quad \text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢} < ٠$$




الشكل (٥−٤٠)

وإذا رُسِمت دائرة مركزها (م)، وطول نصف قطرها (جـ) وبداخلها مستطيل أبعاده (٢أ) ، (٢ب) كما في الشكل (٥−٤٠) تجد أنَّ جميع رؤوس المستطيل تمس الدائرة وسينتج المثلث ك م ر١ قائم الزاوية في ر١.

وبتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث ك م ر١ ستجد أن:

$$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢} \quad \text{ومنه} \quad -\text{ب}^{٢}=\text{أ}^{٢}-\text{جـ}^{٢}$$

وبتعويض المقدار (− ب²) في المعادلة ينتج أنَّ:

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}-\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١ \quad \ldots\ldots\ldots(١)$$

وهي تمثل إحدى الصور القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه هما النقطتان $ب_١$ (د+جـ ، هـ) ، $ب_٢$(د−جـ ، هـ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما $ر_١$(د+ أ ، هـ) ، $ر_٢$(د − أ ، هـ)

٤) محوره القاطع يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ ، وطوله يساوي ٢أ.

٥) محوره المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س= د ، وطوله يساوي ٢ب.

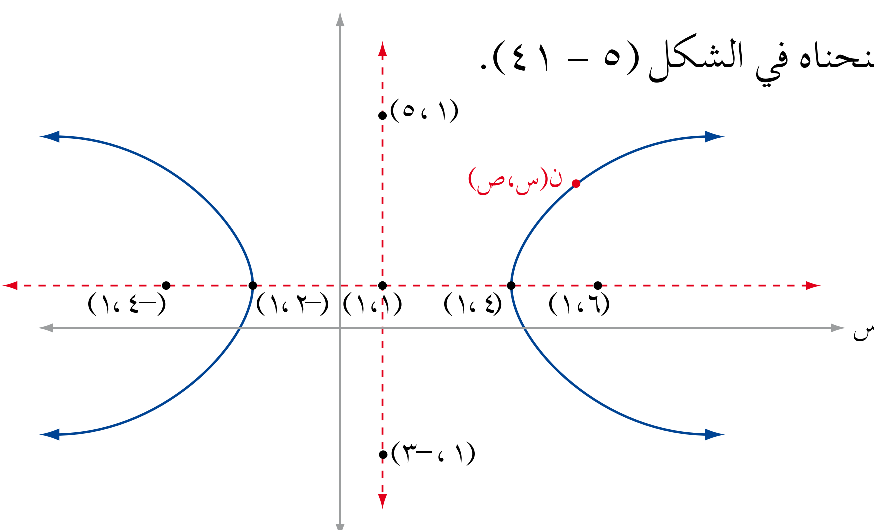
لاحظ أنَّ بعده البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢جـ. (حيث $جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢$)

واختلافه المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ .

و إحداثيي طرفي محوره المرافق هما النقطتان (د ، هـ+ب) (د ، هـ − ب)

## مثال ١

جد معادلة القطع الزائد الممثل منحناه في الشكل (٥ – ٤١).




الشكل (٥− ٤١)

### الحل

إحداثيا مركز القطع (١ ، ١)

من تعريف القطع الزائد نجد أنَّ:

نصف طول المحور المرافق ب = ٤ وحدات. لماذا؟

المسافة بين رأس القطع ومركزه أ = ٣ وحدات. لماذا؟

وبما أنَّ المحور القاطع يوازي محور السينات، إذن معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(س-١)^٢}{٩} - \frac{(ص-١)^٢}{١٦} = ١$$

### تدريب ١

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، ومحوره المرافق يوازي محور الصادات وطوله يساوي ١٢ وحدة، وإحدى بؤرتيه النقطة (١٠ ، ٠)، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

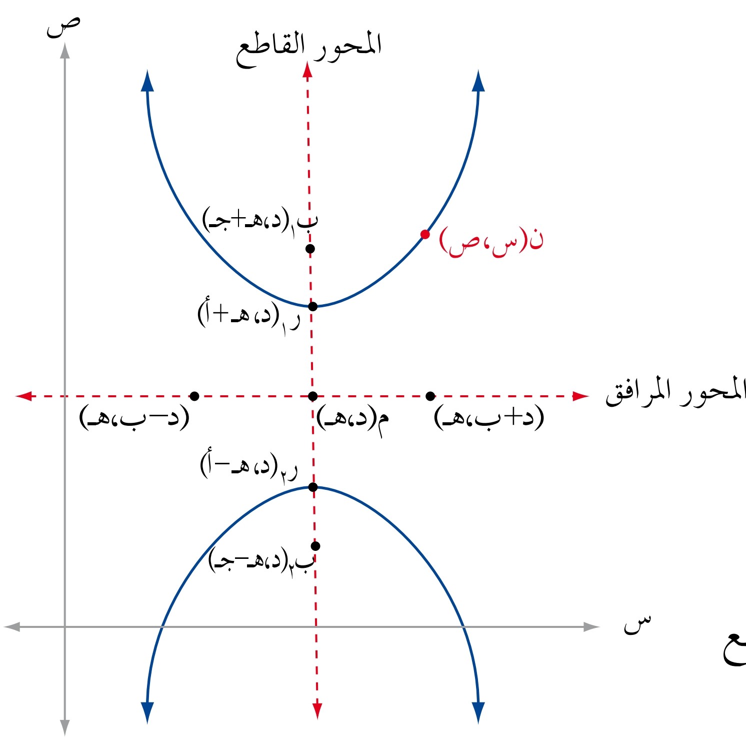
**الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (د ، هـ)، ومحوره القاطع يوازي محور الصادات:**

إذا كان المحور القاطع للقطع الزائد يوازي محور الصادات، فإنَّ بؤرتي القطع الزائد هما النقطتان:

ب$_1$( د ، هـ+جـ)، ب$_2$( د، هـ − جـ) كما يوضح الشكل (٥−٤٢).

وبإجراء الخطوات السابقة تجد أنَّ معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١ \quad ..........(٢) \quad لماذا؟$$



الشكل (٥−٤٢)

وهي تمثل إحدى الصور القياسية للقطع الزائد الذي عناصره هي:

١) مركزه النقطة (د ، هـ).

٢) بؤرتاه النقطتان ب$_1$(د ، هـ + جـ) ، ب$_2$(د ، هـ − جـ ) حيث جـ هي بعد البؤرة عن المركز.

٣) إحداثيا الرأسين هما ر$_1$(د، هـ + أ ) ، ر$_2$(د، هـ − أ)

٤) محوره القاطع يوازي محور الصادات ومعادلته س= د ، وطوله يساوي ٢أ

٥) محوره المرافق يوازي محور السينات ومعادلته ص= هـ ، وطوله يساوي ٢ب.

لاحظ أنَّ بعده البؤري (المسافة بين البؤرتين) يساوي ٢جـ. (حيث جـ$^٢$ = أ$^٢$ + ب$^٢$)

واختلافه المركزي = $\frac{جـ}{أ}$ .

و إحداثيي طرفي محوره المرافق هما النقطتان (د + ب، هـ) (د − ب، هـ)

لاحظ من تعريف القطع الزائد أنَّ جـ > أ، وأنَّ كلًّا من القيمتين أ، جـ موجبتان، ومنه $\frac{جـ}{أ} > ١$ (لماذا؟)
ولذلك سمي القطع زائدًا، لأنَّ اختلافه المركزي زاد عن واحد.

## مثال ٢

جد معادلة القطع الزائد في كل مما يأتي:

١) مركزه النقطة (٤ ، −١)، وأحد رؤوسه النقطة (٤ ، ٢)، وطول محوره المرافق(٨) وحدات.

٢) بؤرتاه النقطتان (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٠) ويقطع منحناه محور السينات عند س=٥.

**الحل**

١) لاحظ أنَّ المركز والرأس يقعان على مستقيم يوازي محور الصادات، أي أنَّ المحور القاطع يوازي محور الصادات.

إذن معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(ص - هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س - د)^٢}{ب^٢} = ١$$

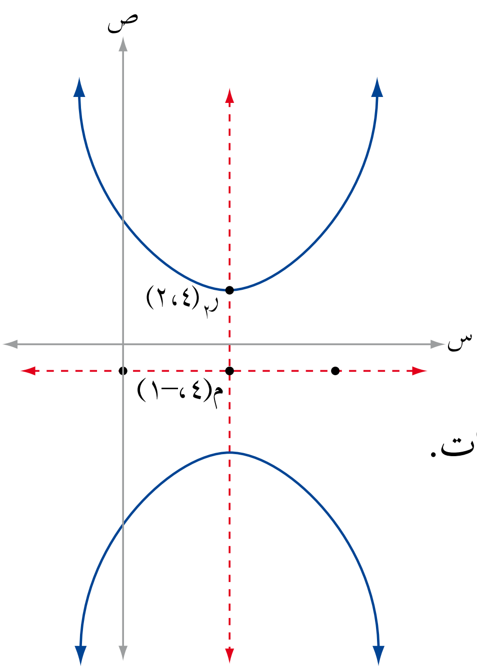
بما أنَّ م(٤ ، −١) ، ر(٤ ، ٢)، فإنَّ أ = ٣ لماذا؟

وحيث أنَّ طول المحور المرافق=٨ وحدات، إذن ب=٤ وحدات.

ومنه فإن معادلة القطع هي:

$$\frac{(ص + ١)^٢}{٩} - \frac{(س - ٤)^٢}{١٦} = ١$$

انظر الشكل(٥−٤٣).



الشكل (٥−٤٣)

٢) بما أنَّ البؤرتين تقعان على محور السينات ، فإنَّ المحور القاطع يقع على محور السينات أيضا،
وتكون معادلة القطع الزائد هي:

$$\frac{(س - د)^٢}{أ^٢} - \frac{(ص - هـ)^٢}{ب^٢} = ١$$

البؤرتان (٦ ، ٠)، (٠ ، ٠) ومنه جـ = ٣.

مركز القطع الزائد هو النقطة (٣ ، ٠)

إحداثيا أحد رؤوس القطع النقطة ( ٥ ، ٠)، ومنه أ = ٢

ومن العلاقة بين عناصر القطع الزائد، تجد أنَّ:

$ب^٢ = جـ^٢ - أ^٢$

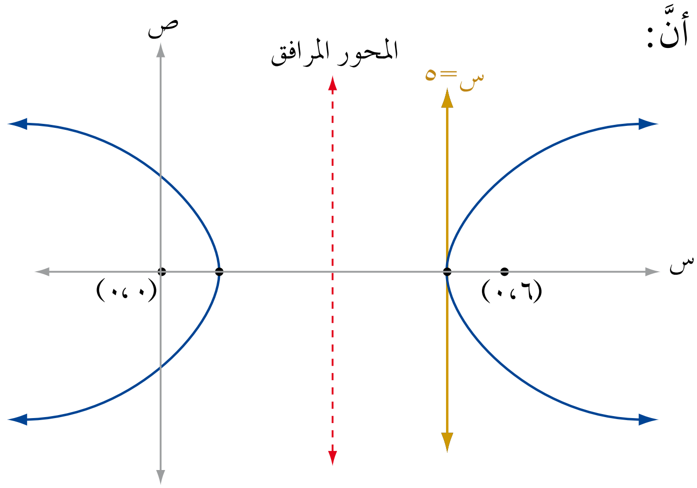
$= ٩ - ٤$

$= ٥$

إذن معادلة القطع هي:

$$\frac{(س-٣)^٢}{٤} - \frac{ص^٢}{٥} = ١$$

انظر الشكل (٥-٤٤)



الشكل (٥-٤٤)

**تدريب ٢**

جد معادلة القطع الزائد الذي نهايتا محوره المرافق النقطتان ( ∓٢ ، ٠) ويمر بالنقطة (١ ، ٣).

**مثال ٣**

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته $\frac{(س-١)^٢}{١٦} - \frac{(ص+٢)^٢}{٩} = ١$

ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الحل**

من المعادلة تجد أنَّ المحور القاطع للقطع موازٍ لمحور السينات.

$أ^٢ = ١٦$ ، ومنه أ = ٤

$ب^٢ = ٩$ ، ومنه ب = ٣

وبذلك فإنَّ جـ = ٥

وبذلك تجد أنَّ عناصر القطع الزائد هي:

١) مركزه هو النقطة ( ١ ، -٢).

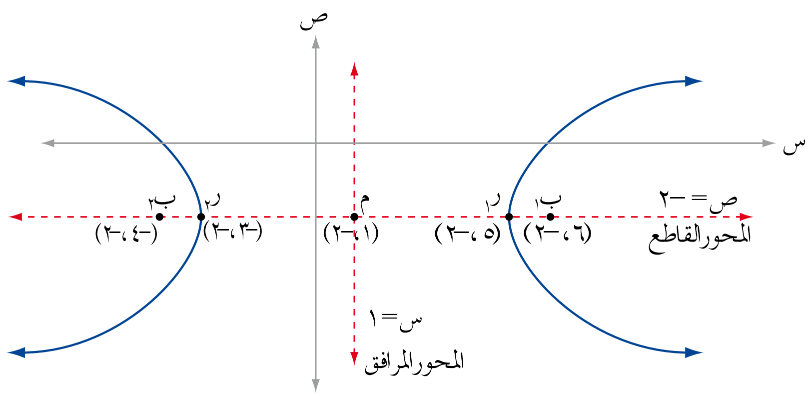
٢) بؤرتاه: $ب_١$ (د+ جـ ، هـ) = (٦ ، -٢) ، $ب_٢$ (د- جـ ، هـ) = (-٤ ، -٢)

٣) رأساه: $ر_١$ (د + أ ، هـ) = (٥ ، −٢) ، $ر_٢$ (د − أ ، هـ) = (−٣ ، −٢)

٤) معادلة محوره القاطع ص= −٢، وطوله = ٢أ = ٨ وحدات.

٥) محوره المرافق يوازي محور الصادات ومعادلته س=١، وطوله= ٢ب = ٦ وحدات.

والشكل (٥−٤٥) يمثل منحنى القطع.




الشكل (٥−٤٥)

## تدريب ٣

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته $\frac{ص^٢}{٢٥} - \frac{(س-١)^٢}{١٤٤} = ١$ ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

## مثال ٤

جد عناصر ومعادلة القطع الزائد الذي رأساه النقطتان (١ ، ∓ ٤) ، واختلافه المركزي $\frac{٥}{٢}$ ، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي.

**الحل**

معادلة القطع الزائد على الصورة : $\frac{(ص-هـ)^٢}{أ^٢} - \frac{(س-د)^٢}{ب^٢} = ١$ لماذا؟

٢أ = ٨، ومنه أ = ٤

بما أنَّ $\frac{جـ}{أ} = \frac{٥}{٢}$

إذن جـ = ١٠ ، ومنه ب = $٢\sqrt{٢١}$

وبذلك فإنَّ عناصر هذا القطع هي:

١) مركزه النقطة (١ ، ٠) لماذا؟

٢) بؤرتاه النقطتان ( ١ ، ∓ ١٠).

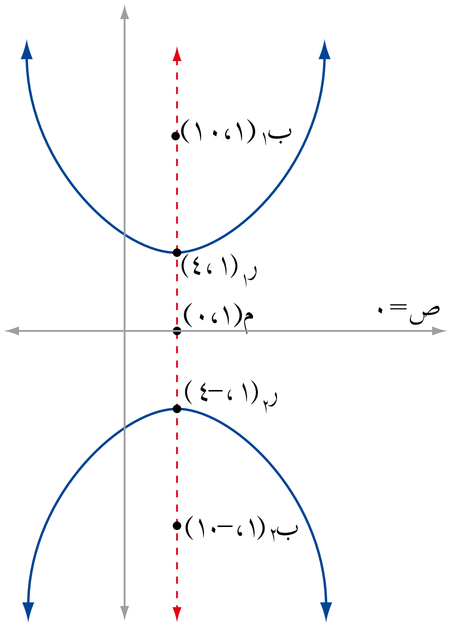
٣) رأساه النقطتان (١ ، ∓ ٤)

٤) المحور القاطع يوازي محور الصادات ومعادلته س=١، وطوله ٨ وحدات.

٥) المحور المرافق ينطبق على محور السينات ومعادلته ص=٠، وطوله ٤ $\sqrt{٢١}$ وحدة.

٦) معادلة القطع الزائد هي: $\frac{ص^{٢}}{١٦} - \frac{(س-١)^{٢}}{٨٤} = ١$

والشكل (٥-٤٦) يمثل منحنى القطع.



الشكل (٥-٤٦)

**تدريب ٤**

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل، وإحدى بؤرتيه النقطة (−٥، ٠) واختلافه المركزي $\frac{٥}{٣}$.

اعتمادًا على مثال(٣) تجد أنَّ معادلة القطع الزائد وهي :

$$\frac{(س-١)^{٢}}{١٦} - \frac{(ص+٢)^{٢}}{٩} = ١$$

وبفك حدود المعادلة لتحويلها إلى الصورة العامة تجد ما يلي:

$$٩(س - ١)^{٢} - ١٦(ص + ٢)^{٢} = ١٤٤$$

$$٩(س^{٢} - ٢س + ١) - ١٦(ص^{٢} + ٤ص + ٤) - ١٤٤ = ٠$$

$$٩س^{٢} - ١٨س + ٩ - ١٦ص^{٢} - ٦٤ص - ٦٤ - ١٤٤ = ٠$$

$$٩س^{٢} - ١٦ص^{٢} - ١٨س - ٦٤ص - ١٩٩ = ٠$$

لاحظ أنَّ المعادلة هي على الصورة: $أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠$

**الصورة العامة لمعادلة القطع الزائد وهي :**

$أس^{٢} + ب ص^{٢} + جـ س + د ص + هـ = ٠$ ، حيث أ ، ب ، جـ ، د ، هـ أعداد حقيقية $أ \times ب < ٠$

### تحدث إلى زملائك

ما المعطيات اللازمة لإيجاد معادلة قطع زائد؟

### مثال ٥

جد عناصر القطع الزائد الذي معادلته:

$$١٢س^{٢} - ٤ص^{٢} + ٢٤س + ١٦ص - ٥٢ = ٠$$

**الحل**

$$١٢(س^{٢} + ٢س) - ٤(ص^{٢} - ٤ص) = ٥٢$$

وبإكمال المقدارين داخل الأقواس إلى مربعين كاملين تجد أنَّ:

$$١٢(س^{٢} + ٢س + (١)^{٢} - (١)^{٢}) - ٤(ص^{٢} - ٤ص + (-٢)^{٢} - (-٢)^{٢}) = ٥٢$$

$$١٢(س+١)^{٢} - ١٢ - ٤(ص-٢)^{٢} + ١٦ = ٥٢$$

$$١٢(س+١)^{٢} - ٤(ص-٢)^{٢} = ٤٨$$

$$\frac{(س+١)^{٢}}{٤} - \frac{(ص-٢)^{٢}}{١٢} = ١$$

أكمل الحل لإيجاد عناصر القطع الزائد.

### تدريب ٥

جد عناصر القطع الزائد إذا علمت معادلته في كل مما يلي:

١) $٢س^{٢} - ٤س = ٥ص^{٢} + ٣٠ص + ٥٣$

٢) $٩س^{٢} - ٤ص^{٢} = ٣٦$

### تحدث إلى زملائك

١) كيف تستطيع أن تحدد نوع القطع المخروطي من الصورة العامة لمعادلته؟

٢) كيف تستطيع أن تحدد نوع القطع المخروطي من الصورة القياسية لمعادلته؟

٣) كيف تحدد نوع القطع المخروطي ( مكافئًا، أو ناقصًا، أو زائدًا ) إذا عُلِمَ اختلافه المركزي؟

١) جد معادلة القطع الزائد في كلٍّ مما يأتي، ثم ارسم منحناه بشكل تقريبي:

أ ) رأساه النقطتان ( $\mp$ ٣ ، ٠)، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

ب) بؤرتاه النقطتان ( ٠ ، $\mp$ ١٣) ، ورأساه النقطتان ( ٠ ، $\mp$ ٥).

جـ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور الصادات وطوله ١٢ وحدة، واختلافه المركزي $\frac{٣}{٢}$

د ) رأساه النقطتان (−٣ ، ١)، (١ ، ١) ويمر بالنقطة (٢ ، ٣).

هـ) مركزه نقطة الأصل، ومحوره القاطع منطبق على محور السينات، وطوله ٨ وحدات، وطول محوره المرافق ٤ وحدات.

و ) مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تقعان على محور الصادات، وطول محوره المرافق $٢\sqrt{٢}$ وحدة، واختلافه المركزي ٣.

٢) جد عناصر كلِّ قطع زائد إذا علمت معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ ) $\frac{س^٢}{١٤٤} - \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$

ب) $\frac{(ص - ٢)^٢}{٣٦} - \frac{(س + ١)^٢}{١٦} = ١$

جـ) $ص^٢ = ٤س^٢ - ١٦$

د ) $٤س^٢ - ص^٢ - ١٠ص = ١٦س + ١٧$

هـ) $٩س^٢ - ٤ص^٢ = ٣٦$

و ) $٤س^٢ - ٣ص^٢ = \frac{٤}{٣}$

ز ) $(س + ٢)^٢ - (ص - ٣)^٢ = ١$

٣) جد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه مركز الدائرة التي معادلتها

(٢س – ٦)$^{٢}$ + (٢ص – ٤)$^{٢}$ =٣٦ ، وطول محوره المرافق يساوي طول قطر هذه الدائرة، ومعادلة محوره المرافق هي س= –١.

٤) جد معادلة القطع الزائد الذي أحد رأسيه مركز الدائرة التي معادلتها

(٢س – ٨)$^{٢}$ + (٢ص – ٦)$^{٢}$ = ١٦ وطول محوره المرافق يساوي قطر هذه الدائرة، ومركزه يقع على المستقيم الذي معادلته س= –١.

٥) قطع زائد مركزه نقطة الأصل ومعادلته ل س$^{٢}$– ك ص$^{٢}$ =٩٠، وطول محوره القاطع (٦$\sqrt{٢}$) وحدة، وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتَيْ القطع الناقص الذي معادلته ٩س$^{٢}$+١٦ص$^{٢}$ =٥٧٦، جد قيمة كل من ل ، ك حيث ل ، ك أعداد حقيقية.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) حيث يتحدد موقعها بالمعادلتين س= ٥قاهـ –٤ ، ص= ٢ –٣ظاهـ ، هـ زاوية متغيرة، جد معادلة مسار النقطة (و) ، ثم بيِّن نوعه.

١) جد عناصر كلِّ قطع إذا عُلِمَت معادلته في كلٍّ مما يأتي:

أ ) $س^٢ = ٣ ص + ٢$

ب) $س^٢ = ٣ص + ٢ص^٢$

جـ) $ص^٢ = ١٥ - ٢س^٢$

د ) $٢س^٢ + ٢ص^٢ - ٤س + ١٢ص - ١٢ = ٠$

هـ ) $٩س^٢ + ٨ص - ٤ = ٤ص^٢ + ٣٦$

و ) $٣(س+٢)^٢ - (ص + \frac{٣}{٢})^٢ = \frac{٣٩}{٤}$

٢) جد معادلة القطع المخروطي في كلٍّ من الحالات الآتية:

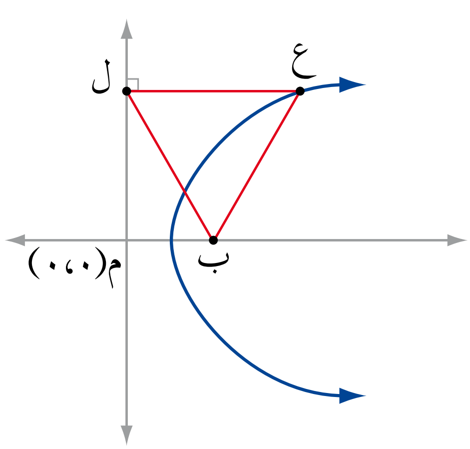
أ ) قطع مكافئ محوره يوازي محور السينات، ويمر بالنقاط (٣ ، ٣)، (٦ ، ٠) ، (٠ ، ٢).

ب) قطع ناقص مركزه النقطة (٣ ، ٢)، وبؤرتاه النقطتان (١ ، ٢)، (٥ ، ٢) وطول محوره الأكبر يساوي ٦ أمثال البعد البؤري.

جـ) قطع زائد بؤرتاه النقطتان (٣ ، −٢)، (٣ ، ٤)، ورأساه النقطتان (٣ ، −١)، (٣ ، ٣).

٣) جد معادلة المحل الهندسي لنقطة تتحرك في المستوى الإحداثي؛ بحيث تبعد بعدًا متساويًا عن المحورين الإحداثيين، وتمر أثناء حركتها في الربعين الثاني والرابع.

٤) الشكل (٥-٤٧) يمثل منحنى قطع مكافئ بؤرته النقطة ب، إذا علمت أنَّ المثلث ب ع ل متطابق الأضلاع، طول ضلعه (٤٠) وحدة، فجد معادلة القطع المكافئ.



الشكل (٥-٤٧)

٥) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى الإحداثي ن(س ، ص) التي يكون بُعدها عن المستقيم س= ٧ يساوي مثلَيْ بُعدها عن النقطة ك(١ ، ٠)، وبيِّن نوعه.

٦) تتحرك النقطة و(س ، ص) في المستوى الإحداثي حيث يتحدد موقعها في اللحظة ن ≤ ٠ بالمعادلتين س= جتا٢ن ، ص= ٣جان، جد معادلة مسار النقطة و ، ثم بيِّن نوعه.

٧) جد معادلة المحل الهندسي للنقطة م (س ، ص) المتحركة في المستوى بحيث تبعد بُعدًا ثابتًا مقداره (٣) وحدات عن المستقيم الذي معادلته ٣س + ٤ص= ٥ ، وتمر أثناء حركتها بمركز الدائرة التي معادلتها $(س - ٤)^{٢} + (ص - ٢)^{٢} = ٩$

٨) قطع مخروطي اختلافه المركزي < ١، وبؤرتاه (−٢ ، −١)، (٢ ، −١) ويمر بنقطة الأصل، جد عناصر هذا القطع.

٩) إذا كانت المعادلة: $ك\,س^{٢} + ٣ص^{٢} = ١١$ تمثل معادلة قطع ناقص محوره الأكبر مواز لمحور السينات، أثبت أنَّ $ك = \frac{١١}{ب^{٢} + جـ^{٢}}$

١٠) إذا كان $هـ_{١}$ ، $هـ_{٢}$ يمثلان الاختلافين المركزيين للقطعين المخروطيين اللَّذين معادلتاهما:

$$\frac{س^{٢}}{ل^{٢}} - \frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} = ١$$

$$\frac{ص^{٢}}{ك^{٢}} - \frac{س^{٢}}{ل^{٢}} = ١$$

فأثبت أنَّ: $\frac{١}{هـ_{١}^{٢}} + \frac{١}{هـ_{٢}^{٢}} = ١$

١١) يتكون هذا السؤال من ١٣ فقرة من نوع الاختيار من متعدد، لكل منها ٤ بدائل واحد منها فقط صحيح، ضع دائرة حول رمز البديل الصحيح:

(١) طول نصف قطر الدائرة التي معادلتها $(٢س+٤)^{٢} + (٢ص - ١٠)^{٢} = ٣٦$ يساوي:

أ) ٣ وحدات    ب) ٦ وحدات    جـ) ٧ وحدات    د) ٩ وحدات

(٢) معادلة دليل القطع المكافئ الذي معادلته $ص^٢ + ٤س - ٨ = ٠$ هي:

أ ) $س=١$ ب) $س= ٣$ جـ) $ص= ١$ د) $ص= ٣$

(٣) نوع القطع المخروطي الذي معادلته $ص^٢= ٣س+ ٢س^٢$ هو:

أ ) دائرة ب) مكافئ جـ) ناقص د) زائد

(٤) إذا كانت بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(ص+١)^٢ = -٨(س + د)$ هي النقطة

(٣ ، -١) ، فإن د تساوي:

أ ) -٥ ب) -٣ جـ) ٣ د ) ٥

(٥) إحداثيا نهايتي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $(س+٢)^٢ - (ص-٣)^٢ = ١$ هي:

أ ) $(-٢ \mp ١، ٣)$ ب) $(-٢، ٣ \mp ١)$

جـ) $(٢ \mp ١، -٣)$ د ) $(٢، -٣ \mp ١)$

(٦) طول المحور الأصغر للقطع الناقص الذي يمس كلًّا من المستقيمات س=١، س=٩ ،

ص= -١ ، ص = ٥ ، يساوي:

أ) ٣ وحدات ب) ٤ وحدات جـ) ٦ وحدات د ) ٨ وحدات.

(٧) تتحرك النقطة ن(س ، ص) في المستوى بحيث يتحدد موقعها بالمعادلة

$$\frac{س^٢}{ل} + \frac{ص^٢}{ل^٢ - ١٦} = ١$$

حيث ل عدد ثابت، إذا كانت ٠ < ل < ١٦ ، فإنَّ المحل الهندسي لحركة النقطة ن يمثل:

أ ) قطعًا مكافئًا ب) قطعًا ناقصًا جـ) قطعًا زائدًا د) دائرة

(٨) تتحرك النقطة ن(س ، ص) في الربعين الأول والثالث من المستوى الإحداثي، حيث تبقى على بُعدينِ متساويينِ من المحورين الإحداثيين. إنَّ معادلة المحل الهندسي للنقطة ن هي:

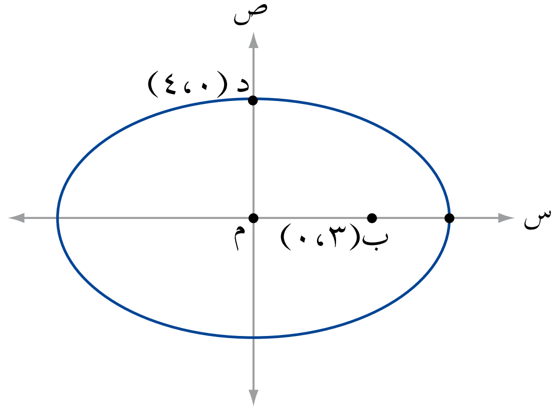
أ ) $ص = س^٣$ ب) $س = ص^٣$ جـ) $ص = - س$ د) $ص = س$

(٩) قطع مخروطي معادلته $٩(س+١)^٢ - ١٦(ص-٢)^٢ = -١٤٤$ ، فإنَّ اختلافه المركزي يساوي:

أ) $\frac{٣}{٥}$ ب) $\frac{٥}{٣}$ جـ) $\frac{٤}{٥}$ د) $\frac{٥}{٤}$

(١٠) الشكل (٥-٤٨) يمثل منحنى قطع ناقص مركزه نقطة الأصل، وإحدى بؤرتيه النقطة ب(٣ ، ٠)، وإحدى نهايتي محوره الأصغر النقطة د(٠ ، ٤). فإنَّ طول محوره الأكبر يساوي:

أ) ١٢ ب) ١٠ جـ) ٧ د) ٥



الشكل (٥-٤٨)

(١١) مساحة القطع الناقص الذي معادلته $٤س^٢ + ٩ص^٢ = ٣٦$ بالوحدات المربعة يساوي:

أ) ٥ π ب) ٦ π جـ) ١٣ π د) ٣٦ π

(١٢) قطع مكافئ يقع رأسه على مركز القطع الزائد الذي معادلته $\frac{٩}{٢}(س-١)^٢ - ٨(ص-٢)^٢ = ٧٢$ ، وبؤرته (١ ، ٣)، فإنَّ معادلة محور تماثل القطع المكافئ هي:

أ) س=١ ب) س=-١ جـ) ص=٢ د) ص=-٢

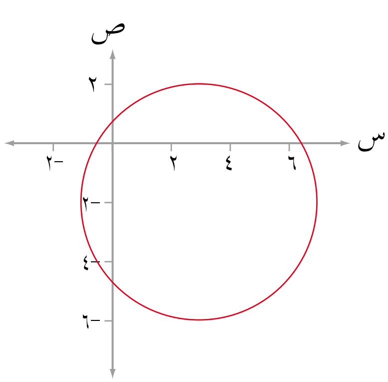
* (١٣) معادلة الدائرة الممثلة بالشكل (٥-٤٩) هي:

أ) $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ٩ = ٠$.

ب) $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص + ٩ = ٠$.

جـ) $س^٢ + ص^٢ - ٦س - ٤ص - ٣ = ٠$.

د) $س^٢ + ص^٢ - ٦س + ٤ص - ٣ = ٠$.



الشكل (٥-٤٩)

(*) السؤال من أسئلة الاختبارات الدولية

الوحدة السادسة

٦

# الإحصاء والاحتمالات

## Statistic and Probabilities

في هذه الوحدة ستتعرّف جزءًا من علم الإحصاء، وهو الجزء الذي يعبر عن العلم الذي يقوم على جمع المعلومات وتصنيفها وعرضها وتحليلها؛ ليتم بعد ذلك استخلاص النتائج والتوصيات المفيدة في المجالات الصناعية والاجتماعية والاقتصادية والزراعية والبحث العلمي وغيرها.

أما الاحتمالات فتهتم بحساب فرصة وقوع حادث ما في التجارب العشوائية، ويُستفاد منها في التنبؤ بقضايا مستقبلية.

**يتوقع من الطالب بعد نهاية هذه الوحدة أن يكون قادرًا على:**

- تحديد طبيعة الارتباط بين متغيرين من خلال شكل الانتشار.
- حساب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- تفسير دلالة معامل ارتباط (بيرسون) بالنسبة إلى شكل الانتشار.
- تحديد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).
- إيجاد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبيق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين.
- تعرف المتغير العشوائي المنفصل وحَلّ مسائل عملية عليه.
- تعرف توزيع ذي الحدين و حساب احتمالات خاصة بها.
- تعرف العلامة المعيارية وحسابها وتفسيرها.
- تعرف المتغير العشوائي المتصل واستقصاء خصائص منحنيات التوزيع الطبيعي.
- استخدام خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مشكلات عملية.

# الفصل الأول

# الإحصاء

# Statistic

**النتاجات**

- تحدد طبيعة الارتباط بين متغيرين من خلال شكل الانتشار.
- تحسب معامل ارتباط (بيرسون) بين متغيرين.
- تفسر دلالة معامل ارتباط (بيرسون) بالنسبة إلى شكل الانتشار.
- تجد أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط (بيرسون).
- تجد معادلة خط الانحدار للارتباط بين متغيرين.
- تطبق معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم أحد المتغيرين، وتجد الخطأ في التنبؤ.

## أولًا الارتباط Correlation

في محاضرة حول الأمراض المزمنة التي يتعرض لها الإنسان، قام الطبيب المحاضر بتوجيه الأسئلة الآتية لطلبته:

١) هل هناك علاقة بين وزن الإنسان وضغط دمه؟

٢) ما نوع هذه العلاقة؟


كثيراً ما تواجهنا مسائل عملية أو مواقف حياتية تتضمن متغيرين، ويكون الهدف منها معرفة في ما إذا كان هناك علاقة بينهما، وما نوعها؟ وما قوة هذه العلاقة؟

ففي المسألة الواردة بداية الدرس لاحظ أنَّ هناك متغيرين هما وزن الإنسان وضغط دمه.

فإذا كان لدينا المتغيران س، ص، وكان حجم العينة (ن)، فيمكن كتابة البيانات على صورة أزواج مرتبة: (س$_{١}$، ص$_{١}$)، (س$_{٢}$، ص$_{٢}$)، (س$_{٣}$، ص$_{٣}$)، ........، (س$_{ن}$، ص$_{ن}$)، حيث يمكن تمثيل الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي بمجموعة من النقط. ويسمى الشكل الناتج **شكل الانتشار**.

ومن شكل الانتشار يمكننا معرفة نوع العلاقة بين المتغيرين س، ص، وقوتها.

وهذا يقودنا إلى تعريف الارتباط على النحو الآتي:

**تعريف**

**الارتباط الخطي**: هو علاقة بين متغيرين بحيث إنَّ التغير في أحدهما يؤدي إلى التغير في الآخر زيادةً أو نقصانًا، فإذا كان المتغيران يزيدان معًا، أو ينقصان معًا فإنَّ العلاقة بينهما طردية، أما إذا كان أحدهما ينقص والآخر يزداد، فإنَّ العلاقة بينهما عكسية.

**مثال ١**

يبين الجدول الآتي علامات ستة طلاب (ص) وعدد ساعات الدراسة اليومي (س) لكلٍّ منهم:

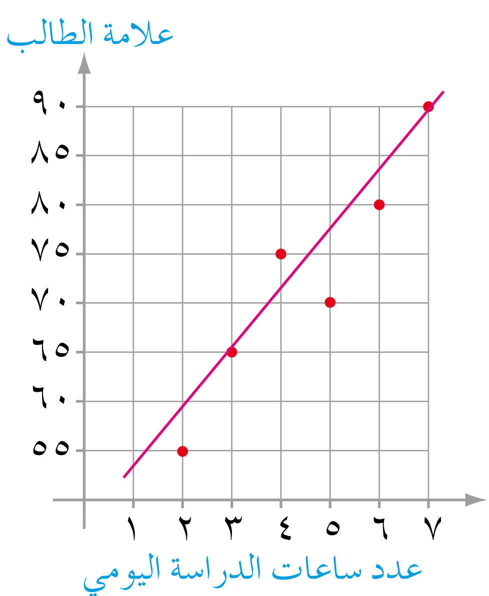
| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد ساعات الدراسة (س) | ٢ | ٣ | ٥ | ٦ | ٤ | ٧ |
| علامة الطالب (ص) | ٥٥ | ٦٥ | ٧٠ | ٨٠ | ٧٥ | ٩٠ |

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبين نوع الارتباط بين عدد ساعات الدراسة اليومي، وعلامة الطالب.

**الحل**

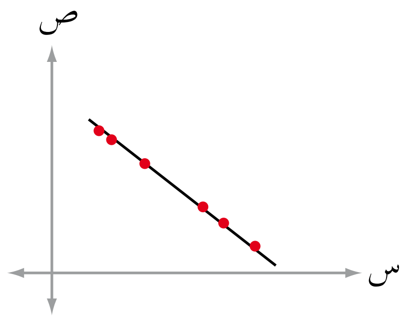
لاحظ من الشكل (٦-١) الذي يمثل شكل الانتشار أنَّ هناك ارتباطًا بين عدد ساعات الدراسة اليومي، وعلامة الطالب؛ إذ تزداد علامة الطالب (ص) بازدياد عدد ساعات الدراسة اليومي (س).

يُسمى مثل هذا النوع من الارتباط **ارتباطًا طرديًا** إيجابيًّا.



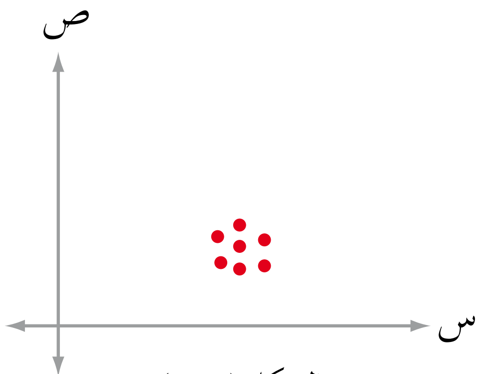

الشكل (٦-١)

والآن سندرس حالات أخرى؛ ففي الشكل (٦–٢) نلاحظ أنَّه كلما ازدادت قيم المتغير (س) فإنَّ قيم المتغير (ص) تتناقص. ويسمى مثل هذا النوع من الارتباط **ارتباطًا عكسيًّا** سلبيًّا.



الشكل (٦–٢)

وهناك بعض الحالات لا يوجد ما يشير إلى أي نوع من الارتباط بين المتغيرين (س)، (ص)، حيث تتجمع النقاط على شكل دائرة أو بشكل عشوائي؛ مما يدل على عدم وجود ارتباط خطي كما في الشكل(٦–٣)



الشكل (٦–٣)

في الشكل (٦–١)، والشكل (٦–٢) لاحظ أنَّ النقط تتجمع حول خط مستقيم أو تقع على خط مستقيم؛ لذلك يسمَّى هذا الارتباط **ارتباطًا خطيًّا**

وبالتالي فإنَّ الارتباط في الشكل(٦–١) **ارتباطًا خطيًّا طرديًّا** ، ويسمَّى الارتباط في الشكل(٦–٢) **ارتباطًا خطيًّا عكسيًّا**.

**فكر وناقش**

في أي أشكال الانتشار السابقة يكون الارتباط قويًّا، ومتى يكون ضعيفًا؟ برِّر إجابتك.

## تدريب ١

يبين الجدول الآتي درجات الحرارة (س) و عدد عبوات الماء المبيعة (ص)، في أحد المحلات التجارية خلال خمسة أيام من شهر آب في إحدى السنوات:

| درجة الحرارة (س) | ٣٢ | ٣٤ | ٣٦ | ٣٨ | ٤٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد العبوات المبيعة (ص) | ١١ | ١٤ | ١٥ | ١٨ | ٢٠ |

ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبيِّن نوع الارتباط بينهما.

**نشاط(١)**

المعادلات الآتية تمثل علاقات ارتباطية بين المتغيرين س، ص. ارسم شكل الانتشار لكلٍّ منها، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

١) ص = ٢س + ٥ ٢) ص = ٣س − ٧ ٣) ص = ٥س + ٢

أ ) ما إشارة معامل س في كلِّ معادلة؟

ب) ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كلِّ معادلة ؟

جـ) ماذا تلاحظ؟

**نشاط(٢)**

المعادلات الآتية تمثل علاقات ارتباطية بين المتغيرين س، ص. ارسم شكل الانتشار لكلٍّ منها، ثم أجب عن الأسئلة التي تليها:

١) ص = ٤ − س ٢) ص = −٣ − ٢س ٣) ص = −٥س + ١

أ ) ما إشارة معامل س في كلِّ معادلة؟

ب) ما نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كلِّ معادلة ؟

جـ) ماذا تلاحظ؟

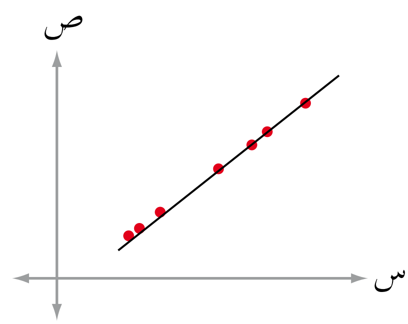
**تدريب ٢**

بيِّن نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص، في العلاقة ص = ١−٣س. برِّر إجابتك.

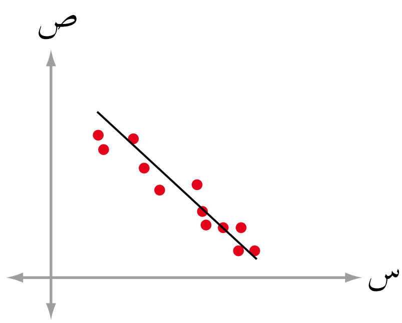
١) الجدول الآتي يمثل علامات ستة طلاب في مبحثي العلوم (س) والرياضيات (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، ارسم شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، وبيِّن نوع الارتباط بينهما.

| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مبحث العلوم (س) | ٦ | ٤ | ٨ | ٧ | ٢ | ٣ |
| مبحث الرياضيات (ص) | ٩ | ٨ | ١٠ | ٨ | ٥ | ٢ |

٢) أ ) حدد نوع الارتباط بين المتغيرين س، ص في كل من الشكلين (٦–٤)، (٦–٥):



الشكل (٦–٤)



الشكل (٦–٥)

ب) قال أحمد: إنَّ شكل الانتشار الموضح في الشكل (٦–٥) يمكن أن يُعبَّر عنه بشكل تقريبي بالمعادلة: ص = ٦ +٣س. هل توافق أحمد بما قال؟ برر إجابتك.

٣) أعط أمثلة حياتية لمتغيرين يكون الارتباط بينهما:

أ ) طرديًّا. ب) عكسيًّا.

٤) هل تستطيع تحديد نوع العلاقة بين متغيرين إذا أُعطيت علاقة الارتباط فقط؟ أم أنك تحتاج لشكل الانتشار؟

٥) أ ) اكتب جدولاً لقيم متغيرين يكون الارتباط بينهما طرديًّا.

ب) اكتب جدولاً لقيم متغيرين يكون الارتباط بينهما عكسيًّا.

جـ) ناقش إجابتك مع زميلك.

٦) إذا كانت ص = ٣س – ٢. فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ ) ما نوع هذا الارتباط بين المتغيرين س، ص؟

ب) ما قوة هذا الارتباط؟ (برِّر إجابتك).

## ثانيًا معامل ارتباط بيرسون الخطي
## Pearson Linear Correlation Coefficient

تعلمت سابقًا كيفية تحديد نوع الارتباط وقوته بيانيًا بالاستعانة بشكل الانتشار. وفي هذا الدرس ستتعرف مقياسًا كميًّا يستخدم لتحديد قوة العلاقة بين متغيرين ونوعها وهو **معامل ارتباط بيرسون الخطي**.

إذا كانت $(س_1، ص_1)$، $(س_2، ص_2)$، $(س_3، ص_3)$، ........، $(س_ن، ص_ن)$، أزواجًا مرتبةً للمتغيرين س، ص، فإنَّ معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين (يُرمز له بالرمز ر)، يُعرف بالعلاقة:

$$ر = \frac{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \bar{س})(ص_ك - \bar{ص})}{\sqrt{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \bar{س})^2 \times \sum_{ك=1}^{ن} (ص_ك - \bar{ص})^2}}$$

وترمز $س_ك$ لقيم المتغير س، وترمز $ص_ك$ لقيم المتغير ص، بينما $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ هما المتوسطان الحسابيان لقيم س، ص على الترتيب، ك = ١، ٢، ٣، .....، ن .

### مثال ١

الجدول الآتي يبين علامات ستة طلاب في مبحثي العلوم (س) والرياضيات (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، جد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص.

| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| علامة العلوم (س) | ٦ | ٤ | ٨ | ٧ | ٢ | ٣ |
| علامة الرياضيات (ص) | ٩ | ٨ | ١٠ | ٨ | ٥ | ٢ |

**الحل**

جد المتوسط الحسابي لكلٍّ من المتغيرين س، ص:

$$\overline{س} = \frac{\sum_{ك=1}^{ن} س_ك}{ن} = \frac{٦+٤+٨+٧+٢+٣}{٦} = ٥$$

$$\overline{ص} = \frac{٤٢}{٦} = ٧ \quad \text{لماذا؟}$$

كوّن الجدول الآتي:

| س | ص | (س $-\overline{س}$) | (ص $-\overline{ص}$) | (س $-\overline{س}$) (ص $-\overline{ص}$) | (س $-\overline{س}$)$^٢$ | (ص $-\overline{ص}$)$^٢$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ٦ | ٩ | ١ | ٢ | ٢ | ١ | ٤ |
| ٤ | ٨ | ١− | ١ | ١− | ١ | ١ |
| ٨ | ١٠ | ٣ | ٣ | ٩ | ٩ | ٩ |
| ٧ | ٨ | ٢ | ١ | ٢ | ٤ | ١ |
| ٢ | ٥ | ٣− | ٢− | ٦ | ٩ | ٤ |
| ٣ | ٢ | ٢− | ٥− | ١٠ | ٤ | ٢٥ |
| المجموع | | ٠ | ٠ | ٢٨ | ٢٨ | ٤٤ |

وبالتعويض في قانون معامل ارتباط بيرسون تجد أنَّ:

$$ر = \frac{٢٨}{\sqrt{٢٨ \times ٤٤}} = ٠{,}٧٩$$

**تدريب ١**

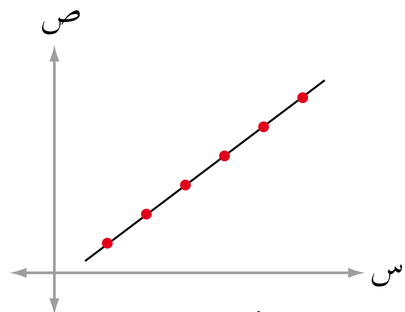
يبين الجدول الآتي معدل عدد ساعات الدراسة اليومي، ومعدلات خمسة طلاب في الصف العاشر، ارسم شكل الانتشار، ثم احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص:

| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| معدل عدد ساعات الدراسة اليومي (س) | ٢ | ٣ | ٥ | ٧ | ٨ |
| المعدل (ص) | ٦٥ | ٧٠ | ٩٠ | ٩٠ | ٨٥ |

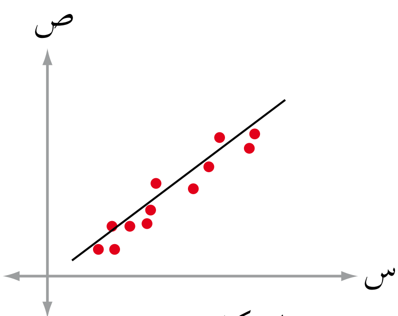
وعند تقدير معامل الارتباط (ر)، من شكل الانتشار نجد ما يأتي:

١) $-١ \leq ر \leq ١$

٢) إذا كان هناك ارتباط خطي طردي بين س، ص فإنَّ: ٠ < ر ≤ ١
كما في الشكلين (٦–٦)، (٦–٧)

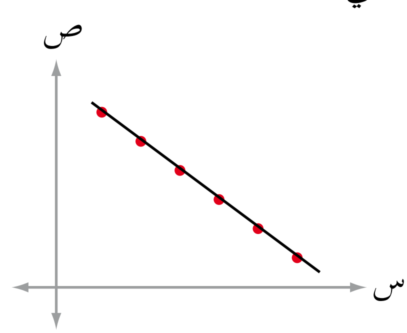


الشكل (٦–٦)

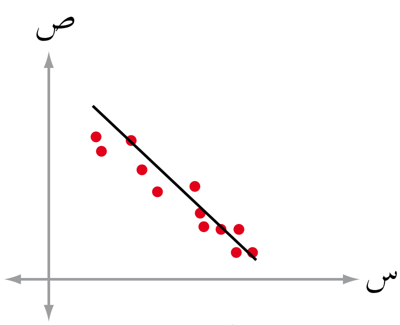


الشكل (٦–٧)

٣) إذا كان هناك ارتباط خطي عكسي بين س، ص فإنَّ: −١ ≤ ر < ٠
كما في الشكلين (٦–٨)، (٦–٩)



الشكل (٦–٨)



الشكل (٦–٩)

٤) تزداد القيمة المطلقة لمعامل الارتباط (تزداد قوة الارتباط)؛ كلما اقتربت النقط في شكل الانتشار من الخط المستقيم.

٥) إذا وقعت جميع النقط في شكل الانتشار على خط مستقيم فإنَّ: |ر| = ١، ويكون **الارتباط تامًّا**. كما في الشكلين (٦–٦)، (٦–٨)

**تدريب ٢**

أكمل الفراغ في الجمل الآتية للحصول على عبارات صحيحة:

١) يكون الارتباط طرديًّا تامًّا إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ......

٢) يكون الارتباط عكسيًّا تامًّا إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ......

٣) كلما كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط قريبة من الصفر يكون الارتباط ......

## أثر التعديلات الخطية في قيمة معامل ارتباط بيرسون

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (ر)، وعُدِّلت قيم كلٍّ من س، ص حسب العلاقة:

س$^*$ = أ س + ب ، ص$^*$ = جـ ص + د ، حيث أ، ب، جـ، د أعداد حقيقية أ $\neq$ ٠، جـ $\neq$ ٠

فإن معامل الارتباط بين س$^*$، ص$^*$ يكون:

١) (ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ متشابهتين.

٢) (− ر) إذا كانت إشارتا أ، جـ مختلفتين.

**فكر وناقش**

تحقّق من صحة العبارة (١)، والعبارة (٢) أعلاه.

**مثال ٢**

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (−٠,٧٥)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س$^*$، ص$^*$ في كلٍّ مما يأتي:

١) س$^*$ = ٧ س − ٦ ، ص$^*$ = ١ − ٤ ص

٢) س$^*$ = ٣ س +١ ، ص$^*$ = −٥ + ص

**الحل**

١) بما أنَّ معاملي س، ص مختلفان في الإشارة فإنَّ معامل ارتباط بيرسون بين س$^*$، ص$^*$ يساوي (٠,٧٥).

٢) معامل ارتباط بيرسون بين س$^*$، ص$^*$ يساوي (−٠,٧٥).

**تدريب ٣**

إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٨٩)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س$^*$، ص$^*$ في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) س$^*$ = −٢س − ٦ ، ص$^*$ = ١ − ٤ ص

٢) س$^*$ = ٣ + س ، ص$^*$ = −٥ + ٢ ص

١) أكمل الفراغ في كلٍّ مما يأتي للحصول على عبارات صحيحة:

أ ) كلما كانت القيمة المطلقة لمعامل الارتباط الخطي قريبة من العدد (١) يكون الارتباط ......

ب) لا يوجد ارتباط خطي إذا كانت قيمة معامل الارتباط تساوي ........

جـ ) يستخدم معامل ارتباط بيرسون لتحديد........... الارتباط بين متغيرين.

٢) يبين الجدول الآتي أطوال خمسة طلاب بالسنتيمترات وكتلهم بالكيلوغرامات، احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص:

| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| الطول (س) | ١٥٠ | ١٥٦ | ١٦٣ | ١٦٤ | ١٦٧ |
| الكتلة (ص) | ٥٤ | ٥٦ | ٦٨ | ٧٠ | ٧٢ |

٣) إذا كان س، ص متغيرين، عدد قيم كلٍّ منهما (٥) وكان $\sum_{ر=١}^{٥}$ (سر − $\overline{س}$) (صر − $\overline{ص}$) = −١،

$\sum_{ر=١}^{٥}$ (سر − $\overline{س}$)$^٢$ = ١٠، $\sum_{ر=١}^{٥}$ (صر − $\overline{ص}$)$^٢$ = ١٠، فاحسب قيمة معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص.

٤) ما دلالة كلٍّ من الإشارة الموجبة والإشارة السالبة لمعامل الارتباط؟

٥) إذا كان معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,٨)، وكان معامل الارتباط بين المتغيرين م، ن يساوي (−٠,٩)، أيُّ الارتباطين أقوى؟ برر إجابتك.

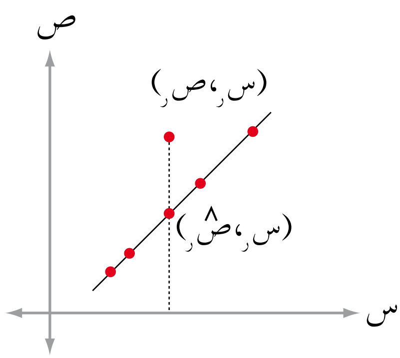
٦) إذا كان معامل ارتباط بيرسون الخطي بين المتغيرين س، ص يساوي (٠,١٣)، فجد معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س*، ص* في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ ) س* = −٢س +١ ، ص* = ١ + ٤ ص

ب) س* = ٣ − س ، ص* = ٧ − ٢ ص

## ثالثًا معادلة خط الانحدار
**Regression Line Equation**

تعرفنا سابقًا إلى نوع الارتباط وقوته بيانيًّا عن طريق شكل الانتشار، وحسابيًّا باستخدام معامل ارتباط بيرسون الخطي، وفي هذا الدرس ستجد علاقة رياضية تربط بين المتغيرين، وذلك لاستخدامها في تقدير (التنبؤ) بقيمة أحد المتغيرين؛ إذا علمت قيمة المتغير الآخر، فإذا عُلِمَ أنَّ هناك ارتباطًا بين معدل الطالب وعدد ساعات الدراسة، فإنَّه يمكن تقدير (التنبؤ) بمعدل الطالب إذا عُلِمَ عدد ساعات الدراسة لديه من خلال معادلة خط الانحدار التي تربط معدل الطالب وعدد ساعات دراسته.




بما أنَّ العلاقة بين المتغيرين خطية، فإنَّه يمكن تمثيلها بمعادلة خط مستقيم هي:

$\hat{ص} = أس + ب$، أ $\neq$ ٠، يُسمى **خط انحدار ص على س**، وتُسمى معادلته **معادلة خط الانحدار**، حيث $\hat{ص}$ القيمة المتنبأ بها للقيمة الحقيقية $ص_ر$.

وللحد من تأثير انحرافات النقاط عن الخط المستقيم نختار قيمتي أ، ب كما يأتي:

$$أ = \frac{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sum_{ك=1}^{ن} (س_ك - \overline{س})^٢} \quad ، \quad ب = \overline{ص} - أ\,\overline{س}$$

وعند رسم شكل الانتشار بين المتغيرين فإنَّ النقط التي لا تقع على الخط المستقيم الذي يمثل معادلة خط الانحدار تسبب خطأ في التنبؤ يعبر عنه كالآتي:

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها.

وبالرموز: الخطأ في التنبؤ = $ص_ر - \hat{ص}_ر$ ، حيث $ص_ر$: القيمة الحقيقية، $\hat{ص}_ر$: القيمة المتنبأ بها.

**فكر وناقش**

متى يكون الخطأ في التنبؤ موجبًا، ومتى يكون سالبًا؟ وضح ذلك جبريًّا وبيانيًّا.

## مثال ١

لاحظ صاحب أحد المحلات التجارية زيادة عدد شكاوى الزبائن من طريقة تعامل العاملين في المحل، فأخضع العاملين لبرنامج تدريبي يوضح كيفية التعامل مع الزبائن، والجدول الآتي يبين رقم الأسبوع (س) وعدد شكاوى الزبائن (ص) خلال الأسابيع الخمسة التي تلي التدريب، استعِنْ بالجدول في الإجابة عما يأتي:

| رقم الأسبوع (س) | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد الشكاوى (ص) | ٢٠ | ١٧ | ١٣ | ٩ | ٦ |

١) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص.

٢) قدِّر عدد الشكاوى المتوقعة في الأسبوع السادس.

٣) جد الخطأ في التنبؤ في الأسبوع الثالث. فسِّر النتيجة بيانيًّا.

**الحل**

١) $\overline{س} = ٣$، $\overline{ص} = ١٣$ تحقق من ذلك.

كون الجدول الآتي:

| س | ص | $(س - \overline{س})$ | $(ص - \overline{ص})$ | $(س - \overline{س})(ص - \overline{ص})$ | $(س - \overline{س})^٢$ |
|---|---|---|---|---|---|
| ١ | ٢٠ | ٢− | ٧ | ١٤− | ٤ |
| ٢ | ١٧ | ١− | ٤ | ٤− | ١ |
| ٣ | ١٣ | ٠ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ٤ | ٩ | ١ | ٤− | ٤− | ١ |
| ٥ | ٦ | ٢ | ٧− | ١٤− | ٤ |
| المجموع | | ٠ | ٠ | ٣٦− | ١٠ |

احسب قيمة كلٍّ من أ، ب على النحو الآتي:

$$أ = \frac{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \overline{س})(ص_ك - \overline{ص})}{\sum_{ك=١}^{ن} (س_ك - \overline{س})^٢} = \frac{-٣٦}{١٠} = -٣{,}٦$$

ب = $\overline{ص}$ – أ $\overline{س}$

= ١٣ – (–٣,٦)×٣

= ٢٣,٨

إذن معادلة خط الانحدار هي:

$\hat{ص}$ = أس + ب= –٣,٦س + ٢٣,٨

٢) لتقدير عدد الشكاوى المتوقعة في الأسبوع السادس، عوِّض بمعادلة خط الانحدار

$\hat{ص}_ر$ = –٣,٦س + ٢٣,٨ بقيمة س = ٦

$\hat{ص}_ر$ = –٣,٦س×٦ + ٢٣,٨ = ٢

يتوقع أن يكون عدد الشكاوى في الأسبوع السادس اثنتين تقريبًا. لماذا؟

٣) لإيجاد الخطأ في التنبؤ في الأسبوع الثالث.

احسب القيمة المتنبأ بها عندما س = ٣

$\hat{ص}_ر$ = –٣,٦س + ٢٣,٨ = ١٣

الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها = ١٣ – ١٣ = صفر، (فسّر هذه النتيجة)

ارسم شكل الانتشار لتفسير النتيجة بيانيًا.

## تدريب ١

يبين الجدول الآتي عدد سنوات الخبرة (س) و الأجر اليومي (ص) بالدينار، لخمسة عمال في إحدى الشركات:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| عدد سنوات الخبرة (س) | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ |
| الأجر اليومي (ص) | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ١٩ |

١) خمِّن شكل معادلة خط الانحدار من خلال الجدول.

٢) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا علمت قيم س.

٣) قدِّر الأجر اليومي لعامل خبرته ١٠ سنوات.

٤) جد الخطأ في التنبؤ عندما س = ٦.

١) يبين الجدول الآتي الأجر اليومي بالدينار الأردني (ص) و عدد ساعات العمل (س)، لخمسة موظفين في إحدى الشركات:

| عدد ساعات العمل (س) | ٦ | ٧ | ٨ | ٩ | ١٠ |
|---|---|---|---|---|---|
| الأجر اليومي بالدينار (ص) | ١٥ | ١٦ | ١٧ | ١٨ | ٢٤ |

أ ) جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص.

ب) قدِّر الأجر المتوقع لموظف يعمل سبع ساعات يوميًّا.

جـ) احسب الخطأ في التنبؤ لعامل عمل ٦ ساعات في أحد الأيام.

٢) يبين الجدول الآتي ست قيم للمتغيرين س، ص.

| معامل الذكاء (س) | ٢ | ٤ | ٣ | ٥ | ٧ | ٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| علامة الفيزياء (ص) | ٧ | ١٣ | ١٠ | ١٦ | ٢٢ | ٢٨ |

جد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم (ص) إذا عُلِمَت قيم (س).

٣) إذا علمت أنَّ معادلة خط الانحدار الخطي للعلاقة بين ساعات العمل (س)، وعدد الأخطاء التي يرتكبها موظف في اليوم الواحد (ص) هي: ص = ٠,٥ س + ١، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ ) جد قيم أ، ب من المعادلة.

ب) قدِّر عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل (٨) ساعات في اليوم.

جـ) إذا كان عدد الأخطاء التي يرتكبها موظف يعمل ست ساعات في اليوم هي أربعة أخطاء، فجد الخطأ في التنبؤ.

٤) على ماذا تدل إشارة ( أ ) في معادلة خط الانحدار؟

٥) إذا كان س، ص متغيرين عدد قيم كلٍّ منهما (٦) وكان $\overline{س}$ = ٤ ، $\overline{ص}$ = ٦ ،

$$\sum_{ر=١}^{٦} (س_ر - \overline{س})(ص_ر - \overline{ص}) = ٧ ، \sum_{ر=١}^{٦} (س_ر - \overline{س})^٢ = ١٠$$

فَجد معادلة خط الانحدار للتنبؤ بقيم ص إذا عُلِمَت قيم س.

٦) إذا كانت معادلة خط الانحدار هي: $\hat{ص}_ر$ = ٢س+١ ، وكانت (٣، ٩) نقطة من نقط شكل الانتشار للمتغيرين س، ص، فجد الخطأ في التنبؤ عندما س = ٣.

٧) اكتب جدولًا يكون فيه الارتباط بين المتغيرين س، ص عكسيًّا تامًّا.

الفصل الثاني

# الاحتمالات

# Probabilities

## النتاجات

- تتعرّف المتغير العشوائي المنفصل والمتصل.
- تكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل.
- تحسب الاحتمال باستخدام توزيع ذي الحدين.
- تتعرف العلامة المعيارية وعلاقتها بالعلامة الخام.
- تحسب العلامة المعيارية وتفسرها.
- تتعرف منحنى التوزيع الطبيعي وخصائصه.
- تستخدم خصائص التوزيع الطبيعي وجدول المساحات الخاص به في حل مسائل عملية.

## أولاً المتغير العشوائي Random Variable

في كثير من التجارب العشوائية يكون الاهتمام بربط نتائجها بأعداد حقيقية أكثر من النتائج نفسها؛ فمثلًا عندما يخوض منتخبنا الوطني لكرة القدم خمس مباريات تجريبية فإنَّ المدرب غالباً ما يهتم بعدد المرات التي يفوز بها المنتخب.

لاحظ أنَّ عدد مرات الفوز هي: {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥}.

وهذا يقودنا للتعريف الآتي:

**تعريف**

**المتغير العشوائي**: اقتران مجاله الفضاء العيني $\Omega$، ومداه مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية، ويُرْمزُ له بأحد الرموز: ق، ع للدلالة عليه.

**المتغير العشوائي**

المنفصل ← أهم توزيعاته (التوزيع ذو الحدين)

المتصل ← أهم توزيعاته (التوزيع الطبيعي)

**أنواع المتغيرات العشوائية**

يتم تصنيف المتغيرات العشوائية إلى نوعين هما:

١) متغير عشوائي منفصل (Discrete Random Variable)، وتكون مجموعة مداه قابلة للعد مثل: عدد العمليات الجراحية الناجحة من بين (١٠) عمليات أُجْرِيَتْ، أو عدد الزائرين لأحد المتاجر في يوم ما.

٢) متغير عشوائي متصل (Continuous Random Variable)، وتكون مجموعة مداه فترة أو اتحاد فترتين أو أكثر مثل: أوزان الأطفال حديثي الولادة في إحدى المستشفيات. وسيتم التطرق له لاحقًا في هذه الوحدة.

**مثال ١**

حدد نوع المتغير العشوائي في كل من الحالات الآتية:

١) قياس أطوال طلاب الصف الثاني عشر في مدرسة ما.

٢) في تجربة سحب كرتين على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي (٣) كرات حمراء، و(٥) كرات بيضاء، ودَلَّ المتغير العشوائي على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

٣) كمية الأمطار في شهر كانون الثاني لعام ٢٠١٧م.

٤) عدد الأخطاء الطباعية في كتاب في طبعته الأولى.

**الحل**

١) متصل؛ لأن الأطوال تمثل فترة بدايتها طول أقصر طالبٍ ونهايتها طول أطول طالب.

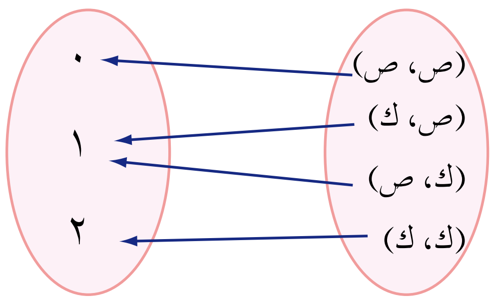
٢) منفصل؛ لأن عدد الكرات البيضاء المسحوبة = ٠، ١، ٢ وهي قيم قابلة للعدّ.

٣) متصل. لماذا؟

٤) منفصل. لماذا؟

**مثال ٢**

إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور الكتابة عند إلقاء قطعة نقد مرتين وتسجيل الوجه الظاهر في كل مرة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.



الشكل(٦-١)

**الحل**

الفضاء العيني $\Omega$ = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

حيث (ص): تدل على صورة، و (ك): تدل على كتابة.

ق(ص، ص) = ٠ ، لأنَّ عدد مرات ظهور الكتابة = ٠

ق(ص، ك) = ق(ك، ص) = ١ لماذا؟

ق(ك، ك) = ٢ لماذا؟

إذن؛ مدى المتغير العشوائي ق هو: س = ٠، ١، ٢، كما هو موضح في الشكل(٦-١).

**تدريب ١**

اكتب مدى المتغير العشوائي في كل من الحالات الآتية وناقش إجابتك مع زملائك:

١) في تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين، إذا دل المتغير العشوائي ق على مجموع النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين.

٢) في تجربة إلقاء قطعة نقد أربع مرات وتسجيل الوجه الظاهر في كل مرة، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور الصورة.

٣) في تجربة سحب خمس كرات على التوالي دون إرجاع من صندوق يحتوي ٤ كرات بيضاء، و٧ كرات زرقاء، إذا دل المتغير العشوائي ع على عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

**مثال ٣**

يحتوي صندوق على ٤٠ بطاقة، منها: ١٠ بطاقات مكتوب عليها الرقم (١)، و ١٥ بطاقة مكتوب عليها الرقم (٣)، وبقية البطاقات مكتوب عليها الرقم (٥)، إذا سحبت بطاقة واحدة عشوائيًّا ودلَّ

المتغير العشوائي ع على الرقم المكتوب على البطاقة المسحوبة، فجد مدى المتغير العشوائي ع، وجد احتمال كلٍّ قيمة من قيم مدى المتغير العشوائي ع.

**الحل**

قيم المدى للمتغير العشوائي المنفصل ع هي: س = ١، ٣، ٥ لماذا؟

وبما أنَّ المتغير العشوائي المنفصل يأخذ قيمًا معدودة، فيمكن إيجاد احتمال كلٍّ من تلك القيم،

ل(س = ١) = $\frac{١٠}{٤٠}$ لماذا؟

ل(س =٣ ) = $\frac{١٥}{٤٠}$

ل(س = ٥) = $\frac{١٥}{٤٠}$ لماذا؟

تحقق من الإجابة

**تعريف**

**التوزيع الاحتمالي**: هو الاقتران الذي يربط مدى المتغير العشوائي ق مع الاحتمالات المقابلة وقد يكتب على صورة جدول أو مجموعة أزواج مرتبة.

ففي مثال(٣) يمكن كتابة جدول التوزيع الاحتمالي كما في الجدول الآتي:

| س | ١ | ٣ | ٥ |
|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{١٠}{٤٠}$ | $\frac{١٥}{٤٠}$ | $\frac{١٥}{٤٠}$ |

ويمكن كتابة التوزيع الاحتمالي كما يلي: { (١، $\frac{١٠}{٤٠}$)، (٣، $\frac{١٥}{٤٠}$)، (٥، $\frac{١٥}{٤٠}$) }.

**تدريب ٢**

اكتب جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق الوارد في تدريب (١).

**مثال ٤**

يحتوي صندوق على ٥ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، سحبت من الصندوق ثلاث كرات. إذا دَلَّ المتغير العشوائي ق على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فكوِّنْ جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) إذا كان سحب الكرات على التوالي دون إرجاع.

٢) إذا كان سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع.

٣) إذا سُحِبَتْ الكرات الثلاث معًا.

**الحل**

قيم المدى للمتغير العشوائي المنفصل ق هي: س = ٠، ١، ٢، ٣ لماذا؟

١) إذا كان سحب الكرات على التوالي دون إرجاع.

$$ل(س = ٠) = ل(ب\ ب\ ب) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{١}{٦} = \frac{١}{٥٦}$$

ل(س = ١) = ل(ح ب ب، ب ح ب ، ب ب ح)

$$= \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٧} \times \frac{٢}{٦} + \frac{٣}{٨} \times \frac{٢}{٧} \times \frac{٥}{٦} = \frac{١٥}{٥٦}$$

$ل(س = ٢) = \frac{٣٠}{٥٦}$ ، $ل(س = ٣) = \frac{١٠}{٥٦}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ق:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{١}{٥٦}$ | $\frac{١٥}{٥٦}$ | $\frac{٣٠}{٥٦}$ | $\frac{١٠}{٥٦}$ |

٢) إذا كان سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع:

$$ل(س = ٠) = ل(ب\ ب\ ب) = \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} = \frac{٢٧}{٥١٢}$$

ل(س = ١) = ل(ح ب ب، ب ح ب ، ب ب ح)

$$= (\frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨}) + (\frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٨} \times \frac{٣}{٨}) + (\frac{٣}{٨} \times \frac{٣}{٨} \times \frac{٥}{٨}) = \frac{١٣٥}{٥١٢}$$

$ل(س= ٢) = \frac{٢٢٥}{٥١٢}$ تحقق من ذلك.

$ل(س= ٣) = \frac{١٢٥}{٥١٢}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{٢٧}{٥١٢}$ | $\frac{١٣٥}{٥١٢}$ | $\frac{٢٢٥}{٥١٢}$ | $\frac{١٢٥}{٥١٢}$ |

٣) إذا سُحِبَتْ الكرات الثلاث معًا:

$$ل(س = ٠) = \frac{\binom{٥}{٠} \times \binom{٣}{٣}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{١}{٥٦} \quad ، \quad ل(س = ١) = \frac{\binom{٥}{١} \times \binom{٣}{٢}}{\binom{٨}{٣}} = \frac{١٥}{٥٦}$$

$ل(س = ٢) = \frac{٣٠}{٥٦}$ ، $ل(س = ٣) = \frac{١٠}{٥٦}$ تحقق من ذلك.

إذن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير ق:

| س | ٠ | ١ | ٢ | ٣ |
|---|---|---|---|---|
| ل(س) | $\frac{١}{٥٦}$ | $\frac{١٥}{٥٦}$ | $\frac{٣٠}{٥٦}$ | $\frac{١٠}{٥٦}$ |

وسيمر معك لاحقًا أنَّ سحب الكرات على التوالي مع الإرجاع يتبع لتوزيع يسمى توزيعًا ذا الحدين.

**فكر وناقش**

في مثال(٤) ما مدى المتغير العشوائي ق، إذا كان عدد الكرات الحمراء ٥ كرات، وعدد الكرات البيضاء اثنان فقط؟

**تعريف**

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا مداه $س_١ ، س_٢ ، \ldots ، س_ن$ ، فإنَّ الاقتران ل الذي يحقق الشرطين:

١) $ل(س_ر) \geq ٠$ ، ر = ١، ٢، ٣، ......، ن حيث $٠ \leq ل(س) \leq ١$

٢) $\sum_{ر=١}^{ن} ل(س_ر) = ١$

**يسمى اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل.**

## مثال ٥

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا منفصلًا مداه ٠، ١، ٢، وكان ل(س)= $\frac{\text{س}+٢}{٩}$ . تحقق من أنَّ ل(س) هو اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل ق.

**الحل**

ل(س = ٠) = $\frac{٢}{٩}$

ل(س = ١) = $\frac{٣}{٩}$

ل(س = ٢) = $\frac{٤}{٩}$

إذن، ل(س) ≥ ٠ لكل س = ٠، ١، ٢

(٢) ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢) = $\frac{٢}{٩} + \frac{٣}{٩} + \frac{٤}{٩} = ١$

إذن، $\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}}$ ل (س$_\text{ر}$) = ١

من (١) و (٢) تجد أنَّ ل(س) يحقق شروط اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق.

### تدريب ٣

إذا كان التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع معطى بالمجموعة:

{(−٢،٢ك)، (٢، ٠,٣)، (٤، ٠,٤٥)، (٣، ٣ك)}، فجد قيمة الثابت ك.

### فكر وناقش وقدم تبريرًا

صندوق يحتوي ١٠ بطاقات مرقمة من ١ إلى ١٠، سُحِبَتْ ثلاث بطاقات دفعة واحدة، إذا دل المتغير العشوائي ق على الرقم الأكبر في البطاقات الثلاث المسحوبة، فاكتب القيم الممكنة للمتغير العشوائي ق.

١) إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الأطفال الذكور في تجربة اختيار عشوائي لعائلة لديها ثلاثة أطفال، وتسجيل النتائج حسب الجنس وتسلسل الولادة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.

٢) في تجربة اختيار أربع لعب من إنتاج مصنع ألعاب، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد اللعب التالفة، فجد مدى المتغير العشوائي ق.

٣) إذا دل المتغير العشوائي ع على الفرق المطلق بين عدد النقاط الظاهرة على الوجهين العلويين عند إلقاء حجرَي نرد منتظمين، فكوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ع.

٤) يحتوي صندوق على ٦ كرات بيضاء، وكرتين حمراوين، سُحِبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي دون إرجاع. إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الكرات البيضاء المسحوبة، فكوِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

٥) إذا كان ل يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل ق

$$\text{وكان ل(س)} = \begin{cases} \text{٤ب س}^{٢} & \text{، س = ١} \\ \text{ب س} & \text{، س = ٢} \\ \text{ب( س + ١)} & \text{، س = ٣} \end{cases}$$

فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ ) جد قيمة الثابت ب.

ب) كوِّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المنفصل ق.

جـ) جد ل( ١ < س ≤ ٣)

٦) إذا كان س = −٢، ٣، ٤ يمثل مدى المتغير العشوائي المنفصل ق، وكان

ل(س) =ك س$^{٢}$ يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق، فجد قيمة الثابت ك.

٧) في تجربة سحب كرة (دون إرجاع) من صندوق يحتوي على ٣ كرات بيضاء، وكرتين حمراوين، إذا دل المتغير العشوائي ق على رقم السحب الذي تظهر فيه أول كرة حمراء، فَكوِّن التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

## ثانيًا توزيع ذي الحدين
## Binomial Distribution

في اختبار من نوع اختيار من متعدد مكون من ٧ فقرات، لكلِّ فقرة أربعة بدائل مختلفة واحد منها فقط صحيح، إذا أجاب أحمد بطريقة عشوائية على جميع فقرات هذا الاختبار، فما احتمال:

١) أن يجيب أحمد على فقرة واحدة بشكل صحيح؟

٢) أن يجيب أحمد على فقرتين على الأقل بشكل صحيح؟

٣) أن يجيب أحمد على فقرة واحدة على الأكثر بشكل صحيح ؟

من التجربة السابقة نلاحظ ما يأتي:

- التجربة تكونت من (٧) محاولات.
- كل محاولة مستقلة ومتماثلة.
- كل محاولة لها ناتجان إما نجاح (وهي الإجابة الصحيحة)، أو فشل (وهي الإجابة الخطأ).
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة ويساوي $\frac{١}{٤}$

إنّ مثل هذه التجارب العشوائية تُسمى **تجربة ذات الحدين** ، ولها الخصائص الآتية:

- التجربة تكونت من (ن) محاولات.
- كل محاولة مستقلة ومتماثلة.
- كل محاولة لها ناتجان إما نجاح (وهي وقوع الحادث قيد الاهتمام)، أو فشل (وهي عدم وقوع الحادث قيد الاهتمام).
- احتمال النجاح ثابت في كل محاولة ويساوي ( أ ) وبصورة عامة:

إذا أُجريت تجربة ذات الحدين (ن) من المرات، وكان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين معاملاه: ن، أ ، ودل ق على عدد مرات النجاح في (ر) من المحاولات، **فإنَّ**:

$$\text{ل}(\text{س}=\text{ر}) = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} (\text{أ})^{\text{ر}} (١-\text{أ})^{\text{ن}-\text{ر}}$$

ويمثل توزيع ذو الحدين أهم توزيعات المتغير العشوائي المنفصل.

**تحدث**

أعط أمثلة على تجارب ذات الحدين وحدد قيم كلٍّ من: ن، أ.

## مثال ١

إذا كان ق متغيراً عشوائيًّا ذا الحدين، معاملاه: ن = ٦، أ = ٠,٦، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل(س=٢) ٢) ل(س<١) ٣) ل(س≤٥) ٤) ل(س≥١)

**الحل**

بما أنَّ: ن = ٦، أ = ٠,٦، فإنَّ:

١) $ل(س=٢) = \binom{٦}{٢}(٠,٦)^{٢}(٠,٤)^{٤} = ١٥ \times ٠,٣٦ \times ٠,٠٢٥٦ = ٠,١٣٨٢٤$

٢) $ل(س<١) = ل(س=٠) = \binom{٦}{٠}(٠,٦)^{٠}(٠,٤)^{٦} = (٠,٤)^{٦} = ٠,٠٠٤٠$

٣) ل(س≤٥) = ل(س=٥) + ل(س = ٦) .......... جد الناتج.

٤) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س = ٢) +....... + ل(س=٥) + ل(س = ٦)

= ١ − ل(س = ٠) لماذا؟ برِّر إجابتك.

= ..................

### تدريب ١

إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين، معاملاه: ن = ٣، أ = ٠,٤، فجد كلًّا مما يأتي:

١) ل(س=٣) ٢) ل(س<١) ٣) ل(س≤٢) ٤) ل(س≥١)

## مثال ٢

إذا كان احتمال أن يحرز لاعب كرة قدم هدفاً في كل ضربة جزاء ينفذها على المرمى ٠,٩، فإذا نفَّذ ٣ ضربات جزاء على المرمى، فما احتمال:

١) إحراز هدف في كل ضربة جزاء؟

٢) عدم إحراز أي هدف؟

٣) إحراز هدفين على الأكثر؟

٤) إحراز هدف واحد على الأقل؟

٥) عبَّرَ معاذ عن احتمال إحراز هدفين على الأقل بالآتي: ل(س>٢)، ناقش ما عبّر عنه معاذ.

**الحل**

ن = ٣، أ = ٠,٩        برِّر ذلك؟

١) احتمال إحراز هدف في كل ضربة جزاء ل(س=٣) $= \binom{٣}{٣}(٠,٩)^{٣}(٠,١)^{٠}$

$= (٠,٩)^{٣} = ٠,٧٢٩$

٢) احتمال عدم إحراز أي هدف = ل(س=٠)= $\binom{٣}{٠}(٠,٩)^{٠}(٠,١)^{٣} = ٠,٠٠١$

٣) احتمال إحراز هدفين على الأكثر = ل(س≥٢) = ل(س=٢)+ ل(س=١)+ ل(س=٠)

= ١ – ل(س=٣)

= ١ – ٠,٧٢٩ = ٠,٢٧١

٤) احتمال إحراز هدف واحد على الأقل = ل(س≤١) =ل(س=١)+ل(س=٢)+ل(س=٣)

= ١ – ل(س=٠) = ١ – ٠,٠٠١ = ٠,٩٩٩

٥) تعبير معاذ خاطئ. لماذا؟

**تدريب ٢**

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

**مثال ٣**

في تجربة إلقاء حجر نرد مكتوب على أوجهه الأرقام: ١، ١، ١، ٢، ٣، ٣، إذا أُلْقِيَ الحجر أربع مرات، فما احتمال ظهور الرقم (١) على الوجه العلوي في ثلاث مرات على الأقل؟

**الحل**

ن = ٤، أ = ٠,٥    تحقق من ذلك.

احتمال ظهور الرقم (١) في ثلاث مرات على الأقل

ل(س≤٣) = ل(س=٣) + ل(س=٤)

$= \binom{٤}{٣}(٠,٥)^{٣}(٠,٥)^{١} + \binom{٤}{٤}(٠,٥)^{٤}(٠,٥)^{٠}$

$= ٤ \times ٠,١٢٥ \times ٠,٥ + (٠,٥)^{٤}$

= ٠,٢٥٠٠ + ٠,٠٦٢٥ = ٠,٣١٢٥

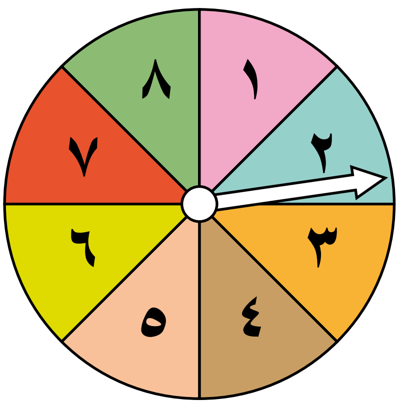
## تدريب ٣

أظهرت دراسة أن ٠,٧٥ ممن يقودون السيارات يستعملون حزام الأمان أثناء القيادة، إذا اختير ٢٠ شخصًا عشوائيًا، فما احتمال:

١) أن يكون ربعهم يستعملون حزام الأمان أثناء القيادة؟

٢) ألّا يستعمل أيٌّ منهم حزام الأمان أثناء القيادة؟

## مثال ٤



الشكل (٦–٢٠)

في الشكل (٦–٢٠) إذا أُديرَ المؤشر عشوائيًا في القرص الدائري خمس مرات، فما احتمال:

١) وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على ٢ ثلاث مرات؟

٢) وقوف المؤشر عند رقم يقبل القسمة على ٥ مرة واحدة؟

**الحل**

١) ن = ٥

الرقم الذي يقبل القسمة على ٢ ∋ {٢، ٤، ٦، ٨ }

ومنه، أ = ٠,٥ برِّر ذلك.

$$ل(س = ٣) = \binom{٥}{٣}(٠,٥)^{٣}(٠,٥)^{٢} = ١٠ \times (٠,٥)^{٥} = ٠,٣١٢٥$$

٢) ن = ٥، الرقم الذي يقبل القسمة على ٥ هو: الرقم ٥ فقط

ومنه، أ = $\frac{١}{٨}$ برِّر ذلك.

$$ل(س = ١) = \binom{٥}{١}\left(\frac{١}{٨}\right)^{١}\left(\frac{٧}{٨}\right)^{٤}$$

**فكر وناقش**

في فرعَي مثال (٤)، لماذا تغيرت قيمة أ؟

١) إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية ٠,٧٠ ، إذا أُجْرِيَتْ خمس عمليات فما احتمال نجاح ثلاث منها على الأقل؟

٢) في تجربة إلقاء قطعة نقد منتظمة ثماني مرات، جد كلًّا مما يأتي:

أ ) احتمال ظهور الكتابة ٤ مرات.

ب) احتمال ظهور الكتابة ٣ مرات على الأقل.

٣) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم (٨) مرات وتسجيل عدد النقاط الظاهرة على الوجه العلوي، إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد مرات ظهور عدد يقبل القسمة على (٣)، فجد احتمال ظهور عدد يقبل القسمة على (٣) مرتين على الأقل.

٤) يحتوي صندوق على ٥ كرات حمراء، ٣ كرات بيضاء، سحبت من الصندوق ثلاث كرات على التوالي مع الإرجاع. إذا دل المتغير العشوائي ق على عدد الكرات الحمراء المسحوبة، فكوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي ق.

٥) إذا كان ق متغيرًا عشوائيًّا ذا الحدين حيث ن = ٣، ل(س≤١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$ ، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) قيم س (مدى ق)  ب) قيمة أ  جـ) ل(س = ٣)

## ثالثًا العلامة المعيارية
## Standard Score

إذا كانت علامة جنى في مبحث الرياضيات (٩٠)، وعلامتها في الفيزياء (٨٠)، وكان المتوسط الحسابي لعلامات الرياضيات (٨٨)، والانحراف المعياري لها (٦)، أما المتوسط الحسابي لعلامات الفيزياء (٦٥)، والانحراف المعياري لها (١٠)، ففي أيِّ المبحثين كان مستوى تحصيل جنى أفضل بالمقارنة مع طالبات صفها؟ ولماذا؟

على الرغم من أن ظاهر علامتي جنى يشير إلى أنَّ تحصيلها في الرياضيات أفضل من تحصيلها في الفيزياء، إلا أنَّ ذلك ليس مؤكدًا؛ فقد يكون موقع علامتها في الفيزياء بالنسبة إلى علامات طالبات صفها أفضل منه في الرياضيات، تُرى كيف يمكننا المفاضلة بين العلامتين بطريقة علمية؟ لنتمكن من المفاضلة بين العلامتين لابد أن نأخذ المتوسط الحسابي والانحراف المعياري لكلِّ علامة بعين الاعتبار، وذلك بإيجاد الانحرافات المعيارية لكلِّ علامة عن متوسطها في كلِّ مبحث، وبذلك نكون قد حوَّلنا كل علامة من العلامات الأصلية إلى علامة جديدة تسمى: **العلامة المعيارية**، ومن ثم نقارن بين العلامتين الأصليتين بناءً على العلامة المعيارية لكلٍّ من العلامتين الأصليتين.

**تعريف**

إذا كان المتوسط الحسابي لعينة عشوائية ($\bar{س}$)، وكان الانحراف المعياري لها (ع)، وكانت (س) مشاهدة في هذه العينة فإنَّ:

العلامة المعيارية للمشاهدة س: هي نسبة انحراف المشاهدة (س) عن المتوسط الحسابي ($\bar{س}$)، إلى الانحراف المعياري (ع)، ويرمز لها بالرمز (ز)، أي أنَّ:

$$ز = \frac{س - \bar{س}}{ع} \text{ ، } ع \neq ٠$$

## مثال ١

إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف الرابع في اللغة العربية (٨٠)، والانحراف المعياري لها (٥)، وكانت علامات هاشم، يوسف، حمزة في اللغة العربية (٩٠)، (٨٠)، (٧٥)، على الترتيب. فجد العلامة المعيارية لعلامة كلٍّ منهم.

**الحل**

لنفرض أنَّ العلامات المعيارية لكلٍّ من هاشم، يوسف، حمزة هي: $ز_{٩٠}$، $ز_{٨٠}$، $ز_{٧٥}$ على الترتيب.

$$ز_{٩٠} = \frac{٩٠ - ٨٠}{٥} = ٢$$

$$ز_{٨٠} = \frac{٨٠ - ٨٠}{٥} = ٠$$

$$ز_{٧٥} = \frac{٧٥ - ٨٠}{٥} = -١$$

**لاحظ أن:**

- علامة هاشم (٩٠) أكبر من المتوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (١٠) علامات وهذا يعادل انحرافين معياريين؛ لأنَّ الانحراف المعياري (٥)، وهذا يعني أنَّ العلامة (٩٠) تنحرف فوق المتوسط الحسابي انحرافين معياريين؛ فكانت $ز_{٩٠} = ٢$ (فوق المتوسط الحسابي).
- علامة يوسف (٨٠) تساوي المتوسط الحسابي نفسه، وانحرافها عنه بمقدار صفر فكانت $ز_{٨٠} = ٠$
- علامة حمزة (٧٥) أقل من المتوسط الحسابي وتنحرف عنه بمقدار (−٥)، وهو سالب وهذا يعادل انحرافًا معياريًّا واحدًا، وهذا يعني أنَّ العلامة (٧٥) تنحرف تحت المتوسط الحسابي انحرافًا معياريًّا واحدًا، فكانت $ز_{٧٥} = -١$ (تحت المتوسط الحسابي).

وبصورة عامة:

تكون $|ز|$ مساوية لعدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها المشاهدة (س) عن المتوسط الحسابي للتوزيع، أما إشارة ز فتدل على موقع المشاهدة (س) فوق المتوسط أو تحته.

**تدريب ١**

إذا كان المتوسط الحسابي لمجموعة من القيم (٤٠)، والانحراف المعياري (٣)، فجد كلًّا مما يأتي:

١) العلامة المعيارية للقيمة ٤٦

٢) القيمة التي علامتها المعيارية تساوي (١,٥).

٣) القيمة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق المتوسط الحسابي.

٤) القيمة التي تنحرف انحرافًا معياريًّا واحدًا تحت المتوسط الحسابي.

**مثال ٢**

إذا كانت علامتا بشار في مبحثي التربية الإسلامية، والعلوم هما على الترتيب: (٧١)، (٦٣)، وكان المتوسط الحسابي لعلامات صفه في المبحثين (٨٥)، (٨٠) والانحراف المعياري لهما (٧)، (١٠)، على الترتيب، ففي أي المبحثين كان مستوى تحصيل بشار أفضل؟ ولماذا؟

**الحل**

العلامة المعيارية لعلامة بشار في التربية الإسلامية هي: $ز_{٧١} = \frac{٧١-٨٥}{٧} = -٢$

العلامة المعيارية لعلامة بشار في العلوم هي: $ز_{٦٣} = \frac{٦٣-٨٠}{٧} = -١,٧$

وبما أن $ز_{٦٣} > ز_{٧١}$ ؛ فإنَّ تحصيل بشار في العلوم أفضل من تحصيله في التربية الإسلامية بالمقارنة مع طلاب صفه.

**تدريب ٢**

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

**مثال ٣**

إذا كانت علامات ثلاثة طلاب في أحد الصفوف: ٨٢، ٧٥، ٦١، وكانت علاماتهم المعيارية: ٢، ١، ز، على الترتيب. فما قيمة ز؟

**الحل**

$٢ = \frac{٨٢ - \bar{س}}{ع}$ ، ومنه، $٢ع = ٨٢ - \bar{س}$ ......(١)

$١ = \frac{٧٥ - \bar{س}}{ع}$ ، ومنه، $ع = ٧٥ - \bar{س}$ ......(٢)

$٢ع = ٨٢ - \bar{س}$ ......(١)

$ع = ٧٥ - \bar{س}$ ......(٢)

بالطرح ينتج: $ع = ٧$

وبالتعويض عن قيمة $ع = ٧$ في المعادلة (٢) ينتج أنَّ:

$٧ = ٧٥ - \bar{س}$ ومنه، $\bar{س} = ٦٨$

والآن $ز = \frac{٦١ - ٦٨}{٧} = -١$

### تدريب ٣

إذا كانت علامات الطالبات رغد، شهد، زينب: ٦٥، ٧٧، س، وكانت علاماتهن المعيارية: −٢، ١، ٣، على الترتيب. فجد كلًّا مما يأتي:

١) الانحراف المعياري لعلامات طالبات الصف.

٢) المتوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف.

٣) علامة الطالبة زينب.

٤) تحدث لزميلك كيف أوجدت علامة زينب.

### فكر وناقش وقدم تبريرًا

إذا كان المتوسط الحسابي لعينة عشوائية ($\bar{س}$)، وكان الانحراف المعياري لها (ع)، وكانت (س) مشاهدة في هذه العينة وعدلت المشاهدة (س) حسب العلاقة: ص = أس + ب، فإنَّ العلامة المعيارية الجديدة للمشاهدة (س) بعد التعديل تبقى نفسها قبل التعديل.

١) إذا كانت علامتا طالبين من الصف نفسه في أحد الاختبارات (٥٣)، (٦٣)، والعلامتان المعياريتان المناظرتان لهما (−١)، (١) على الترتيب، فجد المتوسط الحسابي لعلامات طلاب الصف في هذا الاختبار.

٢) إذا كان المتوسط الحسابي لعلامات طالبات الصف السابع في اللغة الإنجليزية (٦٠)، والانحراف المعياري (٤)، وكانت علامة رفيف (٨٠)، فأجب عما يأتي:

أ ) ما العلامة المعيارية لعلامة رفيف؟

ب) إذا عُدِّلَت علامات الصف حسب العلاقة ص = ١,١ س − ٥، حيث س هي العلامة قبل التعديل، ص هي العلامة بعد التعديل، فما العلامة المعيارية لعلامة رفيف بعد التعديل؟ ماذا تلاحظ؟

٣) إذا كانت العلامات المعيارية للطلاب مؤمن، سالم، مهند كما يلي: ٣، ١، ٠,٧٥ على الترتيب، والمتوسط الحسابي لعلامات جميع طلبة الصف (٦٨)، والفرق بين علامتي مؤمن ومهند هو (٩)، فجد كلًّا مما يأتي:

أ ) الانحراف المعياري لعلامات طلبة الصف.

ب) العلامات الفعلية لمؤمن، وسالم، ومهند.

جـ) علامة الطالب التي تنحرف انحرافًا معياريًّا واحدًا تحت المتوسط الحسابي.

٤) إذا كان الفرق بين علامتي أحمد وسفيان في الصف الثاني عشر في أحد الاختبارات يساوي (٩)، والفرق بين العلامتين المعياريتين المناظرتين لهما (١,٥)، فجد الانحراف المعياري لعلامات طلاب الصف في هذا الاختبار.

٥) أثبت أنَّ المتوسط الحسابي لجميع العلامات المعيارية لجميع قيم التوزيع يساوي صفرًا.

## رابعًا التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

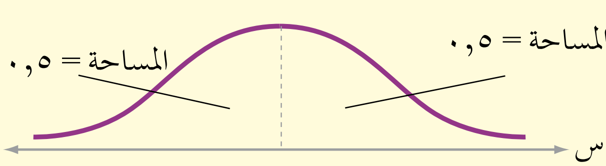
إذا كانت درجات الحرارة لماء البحر في خليج العقبة في شهر نيسان تتبع توزيعًا طبيعيًّا، متوسطه الحسابي (٢٧) سلسيوس، وانحرافه المعياري (٢) سلسيوس، وكان أكرم يفضل ألّا تقل درجة حرارة الماء عن (٢٥) سلسيوس كي يسبح في الماء، فما عدد الأيام التي تكون فيها درجة حرارة الماء مناسبة له للسباحة في هذا الشهر؟

تعلمت سابقًا أنَّ قيم مدى المتغير العشوائي المنفصل قابلة للعد، وقيم مدى المتغير العشوائي المتصل غير منتهية وتكون على شكل فترة، أو اتحاد فترتين، أو أكثر من الأعداد الحقيقية، وتعلمت أنَّ أهم التوزيعات للمتغير العشوائي المنفصل هو توزيع ذات الحدين، وفي هذا الدرس ستتعلم أحد توزيعات المتغير العشوائي المتصل وأهمها وهو (التوزيع الطبيعي).

**التوزيع الطبيعي**: توزيع احتمالي متصل، جرسي الشكل، ومتماثل حول المتوسط الحسابي ويمتد إلى مالا نهاية في الاتجاهين، ولكن معظم المساحة (الاحتمال) تتركز حول المتوسط الحسابي.

**خصائص التوزيع الطبيعي**

- المنحنى يأخذ شكل الجرس.
- متماثل حول المتوسط الحسابي $\mu$.
- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال




الشكل (٦-٢١)

- المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١، ونظرًا للتماثل حول المتوسط فإنَّ المساحة على يمين المتوسط تساوي المساحة على يسار المتوسط وتساوي (٠,٥).

**فكر وناقش**

**ابحث**: المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي ١ . لماذا؟

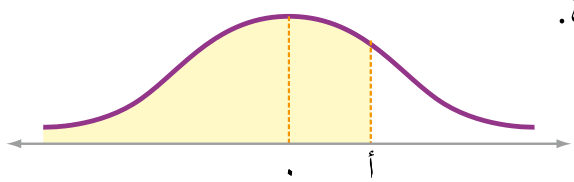
**تعريف**

**التوزيع الطبيعي المعياري**: هو التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (صفر)، وانحرافه المعياري (واحد)، ومتغيره العشوائي العلامة المعيارية (ز).

ويتم إيجاد احتمال وقوع المتغير العشوائي (ز) تحت قيمة ما، أو فوقها، أو محصورة بين قيمتين، من خلال جدول التوزيع الطبيعي المعياري الوارد في ملحق (٢) في نهاية الكتاب، على النحو الآتي:

١) ل( ز ≤ أ)، حيث أ ≥ صفر. من الجدول مباشرة.

انظر الشكل (٦ –٢٢)

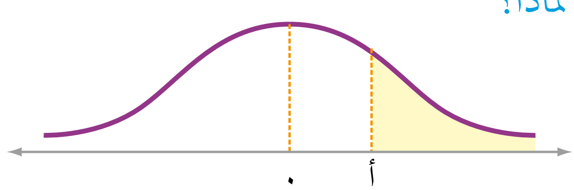


الشكل (٦–٢٢)

٢) ل( ز ≥ أ) = ١ – ل( ز ≤ أ)

لماذا؟

انظر الشكل (٦ –٢٣)

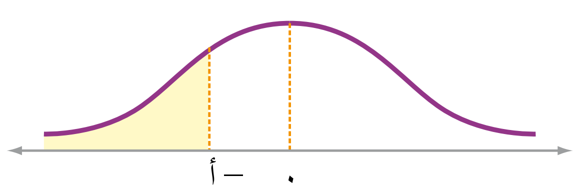


الشكل (٦–٢٣)

٣) ل( ز ≤ – أ) = ل( ز ≥ أ) = ١ – ل( ز ≤ أ)

لماذا؟

انظر الشكل (٦ –٢٤)

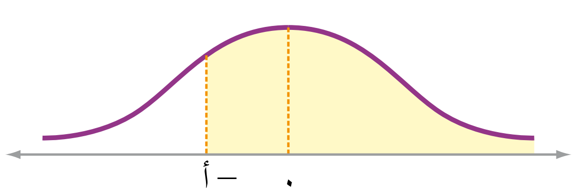


الشكل (٦–٢٤)

٤) ل( ز ≥ – أ) = ل( ز ≤ أ)

لماذا؟

انظر الشكل (٦ –٢٥)



الشكل (٦–٢٥)

## مثال ١

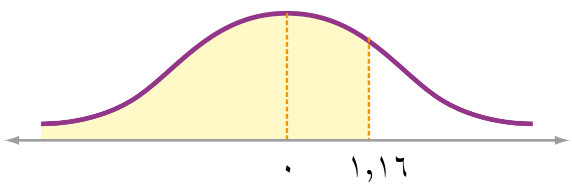
إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل( ز ≤ ١,١٦)

٢) ل( ز ≥ ٢,٥)

٣) ل( ز ≤ −١,٣)

٤) ل(−٢ ≤ ز ≤ ١)




الشكل (٦−٢٦)

**الحل**

١) ل( ز ≤ ١,١٦) = ٠,٨٧٧٠ كما في الشكل(٦−٢٦)

من الجدول مباشرة.

وهي القيمة الواقعة عند تقاطع صف العدد(١,١) مع عمود الأجزاء من مئة (٠,٠٦)، كما في الجدول الآتي الذي يمثل جزءًا من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

| أ | ٠,٠٠ | ٠,٠١ | ٠,٠٢ | ٠,٠٣ | ٠,٠٤ | ٠,٠٥ | ٠,٠٦ | ٠,٠٧ | ٠,٠٨ | ٠,٠٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٠ | ٠,٥٠٠٠ | ٠,٥٠٤٠ | ٠,٥٠٨٠ | ٠,٥١٢٠ | ٠,٥١٦٠ | ٠,٥١٩٩ | ٠,٥٢٣٩ | ٠,٥٢٧٩ | ٠,٥٣١٩ | ٠,٥٣٥٩ |
| ٠,١ | ٠,٥٣٩٨ | ٠,٥٤٣٨ | ٠,٥٤٧٨ | ٠,٥٥١٧ | ٠,٥٥٥٧ | ٠,٥٥٩٦ | ٠,٥٦٣٦ | ٠,٥٦٧٥ | ٠,٥٧١٤ | ٠,٥٧٥٣ |
| ٠,٢ | ٠,٥٧٩٣ | ٠,٥٨٣٢ | ٠,٥٨٧١ | ٠,٥٩١٠ | ٠,٥٩٤٨ | ٠,٥٩٨٧ | ٠,٦٠٢٦ | ٠,٦٠٦٤ | ٠,٦١٠٣ | ٠,٦١٤١ |
| ٠,٣ | ٠,٦١٧٩ | ٠,٦٢١٧ | ٠,٦٢٥٥ | ٠,٦٢٩٣ | ٠,٦٣٣١ | ٠,٦٣٦٨ | ٠,٦٤٠٦ | ٠,٦٤٤٣ | ٠,٦٤٨٠ | ٠,٦٥١٧ |
| ٠,٤ | ٠,٦٥٥٤ | ٠,٦٥٩١ | ٠,٦٦٢٨ | ٠,٦٦٦٤ | ٠,٦٧٠٠ | ٠,٦٧٣٦ | ٠,٦٧٧٢ | ٠,٦٨٠٨ | ٠,٦٨٤٤ | ٠,٦٨٧٩ |
| ٠,٥ | ٠,٦٩١٥ | ٠,٦٩٥٠ | ٠,٦٩٨٥ | ٠,٧٠١٩ | ٠,٧٠٥٤ | ٠,٧٠٨٨ | ٠,٧١٢٣ | ٠,٧١٥٧ | ٠,٧١٩٠ | ٠,٧٢٢٤ |
| ٠,٦ | ٠,٧٢٥٧ | ٠,٧٢٩١ | ٠,٧٣٢٤ | ٠,٧٣٥٧ | ٠,٧٣٨٩ | ٠,٧٤٢٢ | ٠,٧٤٥٤ | ٠,٧٤٨٦ | ٠,٧٥١٧ | ٠,٧٥٤٩ |
| ٠,٧ | ٠,٧٥٨٠ | ٠,٧٦١١ | ٠,٧٦٤٢ | ٠,٧٦٧٣ | ٠,٧٧٠٤ | ٠,٧٧٣٤ | ٠,٧٧٦٤ | ٠,٧٧٩٤ | ٠,٧٨٢٣ | ٠,٧٨٥٢ |
| ٠,٨ | ٠,٧٨٨١ | ٠,٧٩١٠ | ٠,٧٩٣٩ | ٠,٧٩٦٧ | ٠,٧٩٩٥ | ٠,٨٠٢٣ | ٠,٨٠٥١ | ٠,٨٠٧٨ | ٠,٨١٠٦ | ٠,٨١٣٣ |
| ٠,٩ | ٠,٨١٥٩ | ٠,٨١٨٦ | ٠,٨٢١٢ | ٠,٨٢٣٨ | ٠,٨٢٦٤ | ٠,٨٢٨٩ | ٠,٨٣١٥ | ٠,٨٣٤٠ | ٠,٨٣٦٥ | ٠,٨٣٨٩ |
| ١,٠ | ٠,٨٤١٣ | ٠,٨٤٣٨ | ٠,٨٤٦١ | ٠,٨٤٨٥ | ٠,٨٥٠٨ | ٠,٨٥٣١ | ٠,٨٥٥٤ | ٠,٨٥٧٧ | ٠,٨٥٩٩ | ٠,٨٦٢١ |
| ١,١ | ٠,٨٦٤٣ | ٠,٨٦٦٥ | ٠,٨٦٨٦ | ٠,٨٧٠٨ | ٠,٨٧٢٩ | ٠,٨٧٤٩ | ٠,٨٧٧٠ | ٠,٨٧٩٠ | ٠,٨٨١٠ | ٠,٨٨٣٠ |
| ١,٢ | ٠,٨٨٤٩ | ٠,٨٨٦٩ | ٠,٨٨٨٨ | ٠,٨٩٠٧ | ٠,٨٩٢٥ | ٠,٨٩٤٤ | ٠,٨٩٦٢ | ٠,٨٩٨٠ | ٠,٨٩٩٧ | ٠,٩٠١٥ |

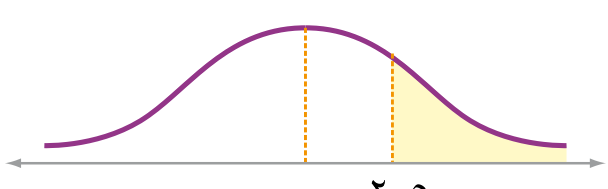
الشكل (٦−٢٦)

٢) ل( ز ≥ ٢,٥) = ١ − ل( ز ≤ ٢,٥)،

كما في الشكل(٦−٢٧)

= ١ − ٠,٩٩٣٨

= ٠,٠٠٦٢

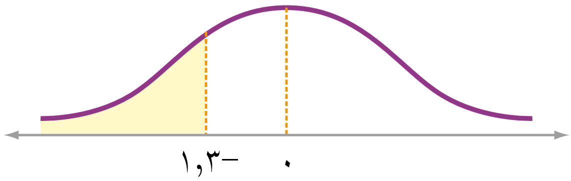



الشكل (٦−٢٧)

٣) ل( ز≥ −١,٣) = ١ − ل( ز≥ ١,٣)، كما في الشكل(٦−٢٨)

= ١ − ٠,٩٠٣٢

= ٠,٠٩٦٨



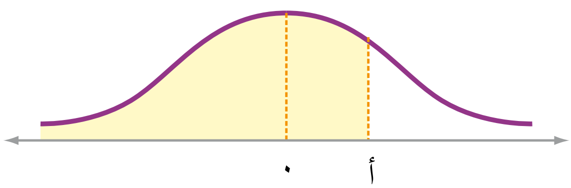
الشكل (٦−٢٨)

٤) ل(−٢ ≥ ز ≥ ١) = ل( ز ≥ ١) − ل( ز ≥ −٢)

= ٠,٨٤١٣ − ( ١ − ٠,٩٧٧٢)

= ٠,٨١٨٥

كما في الشكل (٦−٢٩)



الشكل (٦−٢٩)

**تدريب ١**

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا. فجد قيمة كل مما يأتي، باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

١) ل( ز≥ ١,٣٦)

٢) ل( ز≤ ١,٢٣)

٣) ل( ز≥ −٠,٩٥)

٤) ل(٠,٠٣ ≥ ز ≥ ٣,١)

٥) ل(−٠,٨ ≥ ز ≥ صفر)

٦) هل تختلف قيمة ل( ز≥ ١,١٦) عن قيمة ( ١ − ل(ز> ١,١٦))؟ برر إجابتك.

**مثال ٢**

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة ( أ ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) ل( ز≥ أ ) = ٠,٨٧٢٩

٢) ل( ز≤ أ ) = ٠,٠٠٤٥

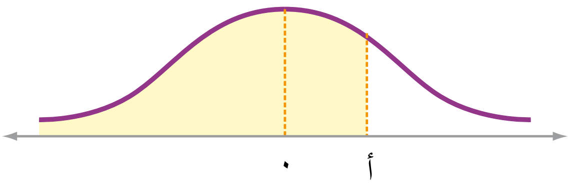
**الحل**

١) ل( ز ≤ أ ) = ٠,٨٧٢٩

لاحظ الشكل(٦−٣٠) ومن الجدول نجد أنَّ

قيمة (ز) المناظرة للاحتمال ٠,٨٧٢٩ هي ١,١٤،

إذن أ = ١,١٤



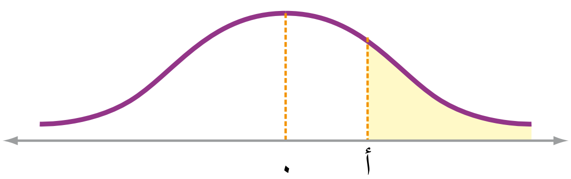
الشكل (٦−٣٠)

٢) ل( ز ≥ أ ) = ٠,٠٠٤٥

لاحظ الشكل(٢−٣١) نجد أنَّ

ل( ز ≤ أ ) = ١ − ٠,٠٠٤٥ = ٠,٩٩٥٥

إذن أ = ٢,٦١



الشكل (٦−٣١)

## تدريب ٢

إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا معياريًّا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة ( أ ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

١) ل( ز ≤ أ ) = ٠,٥٣١٩

٢) ل( ز ≥ أ ) = ٠,٦٨٠٨

والآن سنتعرف كيفية إيجاد احتمالات أي توزيع طبيعي من خلال التحويل إلى التوزيع الطبيعي المعياري، وذلك من خلال تحويل العلامة الخام (س) إلى العلامة المعيارية (ز):

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا طبيعيًّا متوسطه الحسابي ($\mu$)، وانحرافه المعياري ($\sigma$)، فإنَّ:
العلامة المعيارية (ز) للمتغير العشوائي (س) هي:

$$ز = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

**فكر وناقش**

**ابحث**: ما العلاقة بين التوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري؟

## مثال ٣

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (٧٠)، وانحرافه المعياري (٨)، فجد:

١) ل ( س ≥ ٧٢)

٢) ل ( س ≤ ٥٦)

**الحل**

بما أن (س) يتبع توزيعًا طبيعيًّا، فيمكن تحويل المشاهدة الخام (س)، إلى علامة معيارية (ز).

١) ل ( س ≥ ٧٢) = ل ( ز ≥ $\frac{٧٢ - ٧٠}{٨}$) = ل ( ز ≥ ٠,٢٥) = ٠,٥٩٨٧

٢) ل ( س ≤ ٥٦) = ل ( ز ≤ $\frac{٥٦ - ٧٠}{٨}$) = ل ( ز ≤ −١,٧٥) = ل ( ز ≥ ١,٧٥)= ٠,٩٥٩٥

### تدريب ٣

إذا كان (س) متغيرًا عشوائيًّا يتبع التوزيع الطبيعي الذي متوسطه الحسابي (١١٠)، وانحرافه المعياري (١٠)، فجد:

١) ل ( س ≥ ٩٥)

٢) ل ( س ≤ ١٠٥)

٣) ل ( ٩٠ ≥ س ≥ ١٣٠)

## مثال ٤

إذا كانت كتل أكياس الطحين في أحد المخازن وعددها (١٠٠٠) كيس تتبع التوزيع الطبيعي، وكان المتوسط الحسابي للكتل (٥٠) كغ، والانحراف المعياري لها (١,٢٥) كغ. إذا اختير أحد الأكياس عشوائيًّا، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

١) ما احتمال أن تقل كتلة الكيس عن (٤٧) كغ؟

٢) ما احتمال أن تزيد كتلة الكيس عن (٥١) كغ؟

٣) ما عدد الأكياس التي تنحصر كتلتها بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ ؟

## الحل

ليَكن (س) كتلة كيس الطحين، ويتبع توزيعًا طبيعيًّا متوسطه $\mu$ = ٥٠، وانحرافه المعياري $\sigma$ = ١,٢٥ وبالتالي:

١) احتمال أن تقل كتلة الكيس عن (٤٧) كغ يساوي:

$$ل(س \leq ٤٧) = ل(ز \leq \frac{٤٧ - ٥٠}{١,٢٥}) = ل(ز \leq -٢,٤) = ١ - ل(ز \leq ٢,٤)$$

$$= ١ - ٠,٩٩١٨ = ٠,٠٠٨٢$$

٢) احتمال أن تزيد كتلة الكيس عن (٥١) كغ يساوي:

$$ل(س \geq ٥١) = ل(ز \geq \frac{٥١ - ٥٠}{١,٢٥}) = ل(ز \geq ٠,٨) = ١ - ل(ز \leq ٠,٨)$$

$$= ١ - ٠,٧٨٨١ = ٠,٢١١٩$$

٣) احتمال أن تنحصر الكُتل بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ يساوي:

$$ل(٤٨ \leq س \leq ٥٢) = ل(\frac{٤٨ - ٥٠}{١,٢٥} \leq ز \leq \frac{٥٢ - ٥٠}{١,٢٥}) = ل(-١,٦ \leq ز \leq ١,٦)$$

$$= ل(ز \leq ١,٦) - ل(ز \leq -١,٦) = ل(ز \leq ١,٦) - (١ - ل(ز \leq ١,٦))$$ لماذا؟

$$= ٢ ل(ز \leq ١,٦) - ١$$ لماذا؟

$$= ٢ \times ٠,٩٤٥٢ - ١ = ٠,٨٩٠٤$$

إذن، عدد الأكياس التي تنحصر كتلها بين (٤٨) كغ، و(٥٢) كغ يساوي:

العدد الكلي × الاحتمال = ١٠٠٠ × ٠,٨٩٠٤ = ٨٩٠٤ أكياس.

### تدريب ٤

حُلَّ المسألة الواردة في بداية الدرس.

١) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا. فجد قيمة كلٍّ مما يأتي، باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

أ ) ل( ز ≥ ٣,٠٦)

ب) ل( ز ≤ −١)

جـ) ل ( ز ≤ ١,٨)

د ) ل( ز ≥ −٠,٠٧)

هـ ) ل( صفر ≥ ز ≥ ٠,٥)

و ) ل(−١,٥٣ ≥ ز ≥ −٠,١٢)

ز ) ل(| ز | ≥ ٠,٨)

ح ) ل(−١,٧ ≥ ز ≥ صفر)

٢) إذا كان (ز) متغيرًا عشوائيًا طبيعيًا معياريًا، فاستعمل جدول التوزيع الطبيعي المعياري لإيجاد قيمة (أ) في كلٍّ من الحالات الآتية:

أ ) ل( ز≥ أ) = ٠,٣٩٢١

ب) ل(أ≥ ز ≥ ٢) = ٠,١٥٦

٣) تقدم (٢٠٠٠) معلم لامتحان الرخصة الدولية لقيادة الحاسوب (ICDL)، فإذا كان توزيع علاماتهم يتبع التوزيع الطبيعي، بمتوسط حسابي (٧٠)، وانحراف معياري (٨)، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

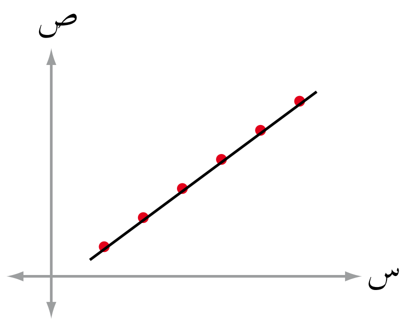
أ ) ما عدد المعلمين الذين تزيد علاماتهم عن (٨٢)؟

ب) إذا كانت علامة النجاح في الامتحان (٨٠)، فما نسبة النجاح؟

٤) إذا كانت علامات (١٠٠٠٠) طالبٍ تتبع توزيعًا طبيعيًا، وكان متوسطه الحسابي (٦٠)، وانحرافه المعياري (٥)، وكان عدد الناجحين (٧٥٨٠) طالباً، فما علامة النجاح؟

٥) إذا كانت كتل (١٠٠٠) صندوق برتقال تتبع توزيعًا طبيعيًا، متوسطه الحسابي (٥)كغ، وانحرافه المعياري (٠,٤)كغ، فجد نسبة الصناديق التي تقل كتلها عن (٤,٨) كغ؟

١) يمثل الشكل (٦-٣٢) شكل الانتشار للمتغيرين س، ص.
حدِّد نوع العلاقة بينهما، وجد قيمة معامل الارتباط.



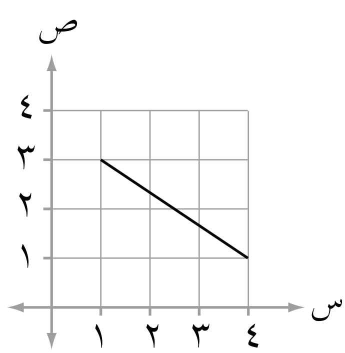
الشكل (٦-٣٢)

٢) يبين الجدول الآتي علامات ستة طلاب في مبحثَي التاريخ (س) والتربية الوطنية (ص) في امتحان قصير، نهايته العظمى (١٠)، أجب عما يليه:

| رقم الطالب | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| مبحث التاريخ (س) | ٢ | ٣ | ٥ | ٦ | ٤ | ١٠ |
| مبحث التربية الوطنية (ص) | ٥ | ٣ | ٦ | ٧ | ٩ | ٦ |

أ ) احسب معامل ارتباط بيرسون الخطي بين س، ص.
ب) جد معادلة خط الانحدار بين المتغيرين س، ص.
جـ) قدِّر علامة التاريخ لطالب إذا كانت علامته في التربية الوطنية (٧).
د ) جد الخطأ في التنبؤ في علامة طالب في التربية الوطنية، إذا كانت علامته في التاريخ (٥).

٣) معتمدًا على الشكل (٦-٣٣) الذي يمثل شكل الانتشار للمتغيرين س، ص أجب عما يأتي:
أ ) ما قيمة معامل ارتباط بيرسون؟
ب) اكتب معادلة خط الانحدار.



الشكل (٦-٣٣)

٤) إذا كانت كل نقط شكل الانتشار بين المتغيرين س، ص، تقع على المستقيم الذي معادلته: ص = ٣ - ٢س، فجد معامل الارتباط.

٥) صندوق يحتوي ٨ بطاقات مرقمة من ٣ إلى ١٠، سُحِبَتْ ثلاث بطاقات دفعة واحدة، إذا دل المتغير العشوائي ق على الرقم الأصغر في البطاقات الثلاث المسحوبة، فاكتب القيم

الممكنة للمتغير العشوائي ق.

٦ ) إذا كان ق متغيرًا عشوائيًا مداه س = ٠، ١، ٢ وكان ل(س) = $\binom{ن}{س}$ (أ)$^{س}$ (٠,٦)$^{ن-س}$ اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير ق، فأجب عن كلٍّ مما يأتي:

أ ) ما نوع المتغير العشوائي ق؟

ب) جد قيم أ، ن.

جـ) جد ل(س=٢).

٧ ) إذا كان ل يمثل اقتران الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي ق، الذي مداه ٢، ٣، ٤، وكان ل(٢) = ٣ل(٣) = ل(٤)، فجد قيمة ل(٣).

٨ ) في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ست مرات، جد كلًّا مما يأتي:

أ ) احتمال ظهور العدد ٦ مرتين.

ب) احتمال ظهور العدد ٦ ثلاث مرات على الأكثر.

٩ ) أشار استطلاع للرأي في إحدى الجامعات أن ٠,٩٥ من طلبة الدراسات العليا يتواصلون إلكترونيًّا مع أساتذتهم الجامعيين، إذا اختيرت عينة عشوائية من ٢٠ طالبًا، فما احتمال أن يكون واحد منهم على الأقل لا يتواصل إلكترونيًّا مع أستاذه الجامعي؟

١٠) في تجربة سحب كرة (دون إرجاع) من صندوق يحتوي على ٤ كرات بيضاء، و٧ كرات حمراء، إذا دل المتغير العشوائي ق على رقم السحب التي يظهر فيه أول كرة حمراء، فجد احتمال أن تظهر أول كرة حمراء في السحب الثالث.

١١) قررت إحدى الشركات رفض أي شحنة من المواد تشتريها من مورد ما إذا تبيَّن وجود (٣) وحدات معيبة أو أكثر في عينة عشوائية مكونة من (٩) وحدات، إذا كانت نسبة المَعيب في شحنة من أحد الموردين (٠,١)، ما احتمال رفض الشركة للشحنة؟

١٢) إذا كانت العلامات المعيارية لعينة مكونة من (٦) مشاهدات كالآتي:

−٢، −١,٥ ، ٢,٥، ٣، ٣، (ز)، فجد كلًّا مما يأتي:

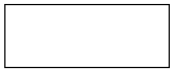
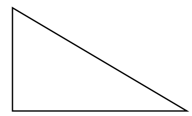
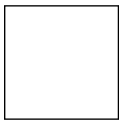
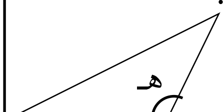
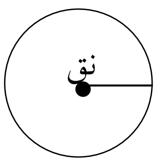
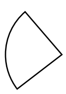
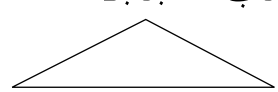
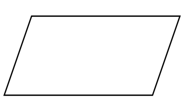
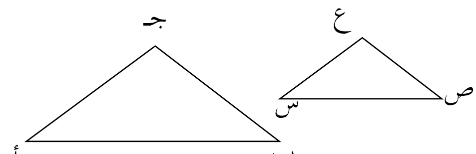
أ ) المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية.

ب) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية.

جـ) قيمة (ز).

## ملحق(١)

قوانين رياضية مهمة(المعدلات المرتبطة، تطبيقات القيم القصوى)

| | |
|---|---|
| ١) المسافة بين نقطتين $(\text{س}_{١}\ ،\ \text{ص}_{١})\ (\text{س}_{٢}\ ،\ \text{ص}_{٢})$<br>$\text{ف}=\sqrt{(\text{س}_{٢}-\text{س}_{١})^{٢}+(\text{ص}_{٢}-\text{ص}_{١})^{٢}}$ | ٩) محيط المستطيل = ٢ (س+ص)<br>مساحة المستطيل = (س × ص)<br>حيث س: الطول ص: العرض<br> |
| ٢) نظرية فيثاغورس: مربع الوتر= مجموع مربعين الضلعين الآخرين.<br> | ١٠) محيط المربع = ٤س<br>مساحة المربع = $\text{س}^{٢}$<br>حيث س طول الضلع<br> |
| ٣) قانون جيب التمام: لإيجاد ضلع في مثلث عُلِمَ فيه ضلعان وزاوية محصورة بينهما:<br>$\text{ل}^{٢}=\text{س}^{٢}+\text{ص}^{٢}-٢\text{س ص جتاهـ}$<br> | ١١) محيط الدائرة =٢نق π<br>مساحة الدائرة =π$\text{نق}^{٢}$<br>حيث نق: نصف القطر<br> |
| ٤) بعد النقطة (س،ص) عن المستقيم أ س + ب ص + جـ = ٠<br>$\text{البعد}=\dfrac{\lvert \text{أ س}_{١}+\text{ب ص}_{١}+\text{جـ}\rvert}{\sqrt{\text{أ}^{٢}+\text{ب}^{٢}}}$ | ١٢) مساحة القطاع الدائري = $\dfrac{١}{٢}$ $\text{نق}^{٢}\text{هـ}$<br>طول القوس = نق× هـ<br>حيث هـ: الزاوية المركزية<br> |
| ٥) إحداثيات منتصف نقطتين $(\text{س}_{١}\ ،\ \text{ص}_{١})\ (\text{س}_{٢}\ ،\ \text{ص}_{٢})$<br>هو: $\dfrac{\text{س}_{١}+\text{س}_{٢}}{٢}\ ،\ \dfrac{\text{ص}_{١}+\text{ص}_{٢}}{٢}$ | ١٣) مساحة القطعة الدائرية $\dfrac{١}{٢}$ $\text{نق}^{٢}$(هـ − جا هـ)<br>حيث هـ: الزاوية المركزية |
| ٦) قانون الجيب $\dfrac{\text{أ}}{\text{جاأ}}=\dfrac{\text{ب}}{\text{جاب}}=\dfrac{\text{جـ}}{\text{جاجـ}}$<br> | ١٤) مساحة متوازي الأضلاع<br>= طول القاعدة × الارتفاع<br> |
| ٧) إذا تشابه مثلثان فإن النسبة بين الأضلاع المتناظرة متساوية<br>$\dfrac{\text{أ جـ}}{\text{س ع}}=\dfrac{\text{جـ ب}}{\text{ع ص}}=\dfrac{\text{ب أ}}{\text{ص س}}$<br> | ١٥) مساحة المثلث = $\dfrac{١}{٢}$ القاعدة × الارتفاع<br>إذا عُلِمَ فيه ضلعان وزاوية محصورة بينهما، هـ الزاوية المحصورة بين الضلعين<br>مساحة المثلث = $\dfrac{١}{٢}$ الضلع الأول × الضلع الثاني × جاهـ<br>مساحة المثلث متساوي الأضلاع = $\dfrac{١}{٢}$ $\text{س}^{٢}$ جا ٦٠<br>حيث س: طول ضلع المثلث متساوي الأضلاع |
| ٨) الربح = سعر البيع − سعر التكلفة | ١٦) المسافة = السرعة × الزمن |

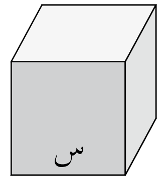
١٧) مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ مجموع القاعدتين المتوازيتين × الارتفاع

١٨) حجم المكعب = $س^{٣}$

المساحة الكلية = ٦ $س^{٢}$

المساحة الجانبية = ٤ $س^{٢}$

حيث س: طول ضلع المكعب

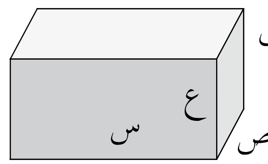



١٩) حجم متوازي المستطيلات = الطول × العرض × الارتفاع

المساحة الجانبية = ٢ (س+ص) × ع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

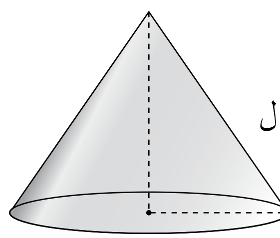
٢(س+ص) × ع + ٢س ص




٢٠) المخروط الدائري القائم

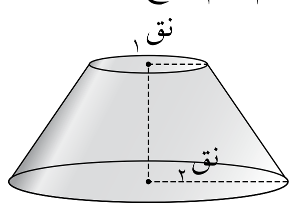
الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ $نق^{٢}$ ع

مساحة سطح المخروط = π نق ل



المخروط الناقص

الحجم = $\frac{\pi}{٣}$ ($نق_{١}^{٢}$ + $نق_{٢}^{٢}$ + $نق_{١}$ $نق_{٢}$) × ع

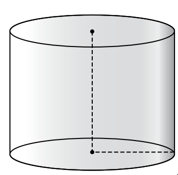



٢١) الاسطوانة:

الحجم = π $نق^{٢}$ ع

المساحة الجانبية = ٢ π نق ع

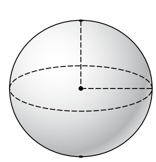
المساحة الكلية = ٢ π $نق^{٢}$ + ٢ π نق ع



٢٢) الكرة

الحجم = $\frac{٤\pi}{٣}$ $نق^{٣}$

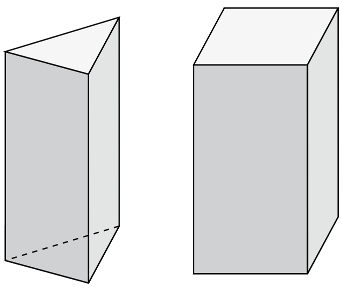
مساحة سطح الكرة = ٤ π $نق^{٢}$



٢٣) المنشور القائم هو مجسم له قاعدتان مستويتان ومتطابقتان ومتوازيتان، وأسطحه الجانبية مستطيلات، إذا كانت قاعدته مثلثة الشكل يسمى منشورًا قائمًا ثلاثيًّا، وإذا كانت قاعدته مربعة الشكل يسمى منشورًا قائمًا رباعيًّا.

مساحة المنشور القائم الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

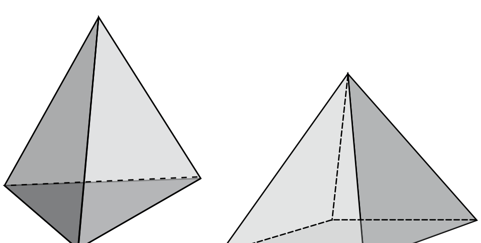
حجم المنشور القائم = مساحة القاعدة × الارتفاع



٢٤) الهرم القائم: عبارة عن مجسم تكون قاعدته منتظمة، والأوجه الجانبية عبارة عن مثلثات متطابقة الضلعين، ويسمى ارتفاع المثلث المتطابق الضلعين: الارتفاع الجانبي للهرم، ويسمى الهرم بالهرم القائم الثلاثي إذا كانت قاعدته مثلث متطابق الأضلاع، وهرمًا قائمًا رباعيًّا إذا كانت قاعدته مربعة الشكل.

المساحة الجانبية للهرم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة × الارتفاع

حجم الهرم القائم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع



٢٥) زاوية الارتفاع أو الانخفاض: هي الزاوية المحصورة بين خط البصر (النظر) والخط الأفقي المارّ بالعين.

## متطابقات مثلثية

ظاس = $\frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$ ، ظتاس = $\frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}$

قاس = $\frac{١}{\text{جتاس}}$ ، قتاس = $\frac{١}{\text{جاس}}$

جا$^{٢}$س + جتا$^{٢}$س = ١

١ + ظا$^{٢}$س = قا$^{٢}$س

١ + ظتا$^{٢}$س = قتا$^{٢}$س

جا٢س = ٢ جاس جتاس

جتا٢س = ١ − ٢ جا$^{٢}$س

= ٢ جتا$^{٢}$س − ١

= جتا$^{٢}$س − جا$^{٢}$س

جا(أ + ب) = جاأجتاب + جتاأ جاب

جا(أ − ب) = جاأجتاب − جتاأ جاب

جتا(أ + ب) = جتاأجتاب − جاأ جاب

جتا(أ − ب) = جتاأجتاب + جاأ جاب

ظا(أ + ب) = $\frac{\text{ظاأ + ظاب}}{\text{١ − ظاأ ظاب}}$

ظا(أ − ب) = $\frac{\text{ظاأ − ظاب}}{\text{١ + ظاأ ظاب}}$

جا$^{٢}$س = $\frac{١}{٢}$ (١ − جتا٢س)

جتا$^{٢}$س = $\frac{١}{٢}$ (١ + جتا٢س)

ظا٢س = $\frac{\text{٢ظاس}}{\text{١ − ظا}^{٢}\text{س}}$

جاس جاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س − ص) − جتا(س + ص))

جاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جا(س + ص) + جا(س − ص))

جتاس جتاص = $\frac{١}{٢}$ (جتا(س + ص) + جتا(س − ص))

جاس − جاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$ (س + ص) جا $\frac{١}{٢}$ (س − ص)

جاس + جاص = ٢ جا $\frac{١}{٢}$ (س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$ (س − ص)

جتاس − جتاص = −٢ جا $\frac{١}{٢}$ (س + ص) جا $\frac{١}{٢}$ (س − ص)

جتاس + جتاص = ٢ جتا $\frac{١}{٢}$ (س + ص) جتا $\frac{١}{٢}$ (س − ص)

جتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جاس

جا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = جتاس

ظا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = ظتاس

ظتا($\frac{\pi}{٢}$ − س) = ظاس

جا($\frac{\pi}{٢}$ + س) = جتاس

جتا($\frac{\pi}{٢}$ + س) = −جاس

جا($\pi$ − س) = جاس

جتا($\pi$ − س) = −جتاس

ظا($\pi$ − س) = −ظاس

جا($\pi$ + س) = −جاس

جتا($\pi$ + س) = −جتاس

ظا($\pi$ + س) = ظاس

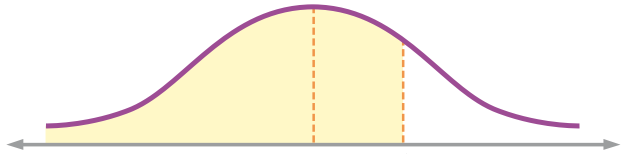
جا(−س) = −جاس

جتا(−س) = جتاس

ظا(−س) = −ظاس

## ملحق(٢)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري




| أ | ٠,٠٠ | ٠,٠١ | ٠,٠٢ | ٠,٠٣ | ٠,٠٤ | ٠,٠٥ | ٠,٠٦ | ٠,٠٧ | ٠,٠٨ | ٠,٠٩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠,٠ | ٠,٥٠٠٠ | ٠,٥٠٤٠ | ٠,٥٠٨٠ | ٠,٥١٢٠ | ٠,٥١٦٠ | ٠,٥١٩٩ | ٠,٥٢٣٩ | ٠,٥٢٧٩ | ٠,٥٣١٩ | ٠,٥٣٥٩ |
| ٠,١ | ٠,٥٣٩٨ | ٠,٥٤٣٨ | ٠,٥٤٧٨ | ٠,٥٥١٧ | ٠,٥٥٥٧ | ٠,٥٥٩٦ | ٠,٥٦٣٦ | ٠,٥٦٧٥ | ٠,٥٧١٤ | ٠,٥٧٥٣ |
| ٠,٢ | ٠,٥٧٩٣ | ٠,٥٨٣٢ | ٠,٥٨٧١ | ٠,٥٩١٠ | ٠,٥٩٤٨ | ٠,٥٩٨٧ | ٠,٦٠٢٦ | ٠,٦٠٦٤ | ٠,٦١٠٣ | ٠,٦١٤١ |
| ٠,٣ | ٠,٦١٧٩ | ٠,٦٢١٧ | ٠,٦٢٥٥ | ٠,٦٢٩٣ | ٠,٦٣٣١ | ٠,٦٣٦٨ | ٠,٦٤٠٦ | ٠,٦٤٤٣ | ٠,٦٤٨٠ | ٠,٦٥١٧ |
| ٠,٤ | ٠,٦٥٥٤ | ٠,٦٥٩١ | ٠,٦٦٢٨ | ٠,٦٦٦٤ | ٠,٦٧٠٠ | ٠,٦٧٣٦ | ٠,٦٧٧٢ | ٠,٦٨٠٨ | ٠,٦٨٤٤ | ٠,٦٨٧٩ |
| ٠,٥ | ٠,٦٩١٥ | ٠,٦٩٥٠ | ٠,٦٩٨٥ | ٠,٧٠١٩ | ٠,٧٠٥٤ | ٠,٧٠٨٨ | ٠,٧١٢٣ | ٠,٧١٥٧ | ٠,٧١٩٠ | ٠,٧٢٢٤ |
| ٠,٦ | ٠,٧٢٥٧ | ٠,٧٢٩١ | ٠,٧٣٢٤ | ٠,٧٣٥٧ | ٠,٧٣٨٩ | ٠,٧٤٢٢ | ٠,٧٤٥٤ | ٠,٧٤٨٦ | ٠,٧٥١٧ | ٠,٧٥٤٩ |
| ٠,٧ | ٠,٧٥٨٠ | ٠,٧٦١١ | ٠,٧٦٤٢ | ٠,٧٦٧٣ | ٠,٧٧٠٤ | ٠,٧٧٣٤ | ٠,٧٧٦٤ | ٠,٧٧٩٤ | ٠,٧٨٢٣ | ٠,٧٨٥٢ |
| ٠,٨ | ٠,٧٨٨١ | ٠,٧٩١٠ | ٠,٧٩٣٥ | ٠,٧٩٦٧ | ٠,٧٩٩٥ | ٠,٨٠١٣ | ٠,٨٠٥١ | ٠,٨٠٧٨ | ٠,٨١٠٦ | ٠,٨١٣٣ |
| ٠,٩ | ٠,٨١٥٩ | ٠,٨١٨٦ | ٠,٨٢١٢ | ٠,٨٢٣٨ | ٠,٨٢٦٤ | ٠,٨٢٨٩ | ٠,٨٣١٥ | ٠,٨٣٤٠ | ٠,٨٣٦٥ | ٠,٨٣٨٩ |
| ١,٠ | ٠,٨٤١٣ | ٠,٨٤٣٨ | ٠,٨٤٦١ | ٠,٨٤٨٥ | ٠,٨٥٠٨ | ٠,٨٥٣١ | ٠,٨٥٥٤ | ٠,٨٥٧٧ | ٠,٨٥٩٩ | ٠,٨٦٢١ |
| ١,١ | ٠,٨٦٤٣ | ٠,٨٦٦٥ | ٠,٨٦٨٦ | ٠,٨٧٠٨ | ٠,٨٧٢٩ | ٠,٨٧٤٩ | ٠,٨٧٧٠ | ٠,٨٧٩٠ | ٠,٨٨١٠ | ٠,٨٨٣٠ |
| ١,٢ | ٠,٨٨٤٩ | ٠,٨٨٦٩ | ٠,٨٨٨٨ | ٠,٨٩٠٧ | ٠,٨٩٢٥ | ٠,٨٩٤٤ | ٠,٨٩٦٢ | ٠,٨٩٨٠ | ٠,٨٩٩٧ | ٠,٩٠١٥ |
| ١,٣ | ٠,٩٠٣٢ | ٠,٩٠٤٩ | ٠,٩٠٦٦ | ٠,٩٠٨٢ | ٠,٩٠٩٩ | ٠,٩١١٥ | ٠,٩١٣١ | ٠,٩١٤٧ | ٠,٩١٦٢ | ٠,٩١٧٧ |
| ١,٤ | ٠,٩١٩٢ | ٠,٩٢٠٧ | ٠,٩٢٢٢ | ٠,٩٢٣٦ | ٠,٩٢٥١ | ٠,٩٢٦٥ | ٠,٩٢٧٩ | ٠,٩٢٩٢ | ٠,٩٣٠٦ | ٠,٩٣١٩ |
| ١,٥ | ٠,٩٣٣٢ | ٠,٩٣٤٥ | ٠,٩٣٥٧ | ٠,٩٣٧٠ | ٠,٩٣٨٢ | ٠,٩٣٩٤ | ٠,٩٤٠٦ | ٠,٩٤١٨ | ٠,٩٤٢٩ | ٠,٩٤٤١ |
| ١,٦ | ٠,٩٤٥٢ | ٠,٩٤٦٣ | ٠,٩٤٧٤ | ٠,٩٤٨٤ | ٠,٩٤٩٥ | ٠,٩٥٠٥ | ٠,٩٥١٥ | ٠,٦٥٢٥ | ٠,٩٥٣٥ | ٠,٩٥٤٥ |
| ١,٧ | ٠,٩٥٥٤ | ٠,٩٥٦٤ | ٠,٩٥٧٣ | ٠,٩٥٨٢ | ٠,٩٥٩١ | ٠,٩٥٩٥ | ٠,٩٦٠٨ | ٠,٩٦١٦ | ٠,٩٦٢٥ | ٠,٩٦٣٣ |
| ١,٨ | ٠,٩٦٤١ | ٠,٩٦٤٩ | ٠,٩٦٥٦ | ٠,٩٦٦٤ | ٠,٩٦٧١ | ٠,٩٦٧٨ | ٠,٩٦٨٦ | ٠,٩٦٩٣ | ٠,٩٦٩٩ | ٠,٩٧٠٦ |
| ١,٩ | ٠,٩٧١٣ | ٠,٩٧١٩ | ٠,٩٧٢٦ | ٠,٩٧٣٢ | ٠,٩٧٣٨ | ٠,٩٧٤٤ | ٠,٩٧٥٠ | ٠,٩٧٥٦ | ٠,٩٧٦١ | ٠,٩٧٦٧ |
| ٢,٠ | ٠,٩٧٧٢ | ٠,٩٧٧٨ | ٠,٩٧٨٣ | ٠,٩٧٨٨ | ٠,٩٧٩٣ | ٠,٩٧٩٨ | ٠,٩٨٠٣ | ٠,٩٨٠٨ | ٠,٩٨١٢ | ٠,٩٨١٧ |
| ٢,١ | ٠,٩٨٢١ | ٠,٩٨٢٦ | ٠,٩٨٣٠ | ٠,٩٨٣٤ | ٠,٩٨٣٨ | ٠,٩٨٤٢ | ٠,٩٨٤٦ | ٠,٩٨٥٠ | ٠,٩٨٥٤ | ٠,٩٨٥٧ |
| ٢,٢ | ٠,٩٨٦١ | ٠,٩٨٦٤ | ٠,٩٨٦٨ | ٠,٩٨٧١ | ٠,٩٨٧٥ | ٠,٩٨٧٨ | ٠,٩٨٨١ | ٠,٩٨٨٤ | ٠,٩٨٨٧ | ٠,٩٨٩٠ |
| ٢,٣ | ٠,٩٨٩٣ | ٠,٩٨٩٦ | ٠,٩٨٩٨ | ٠,٩٩٠١ | ٠,٩٩٠٤ | ٠,٩٩٠٦ | ٠,٩٩٠٩ | ٠,٩٩١١ | ٠,٩٩١٣ | ٠,٩٩١٦ |
| ٢,٤ | ٠,٩٩١٨ | ٠,٩٩٢٠ | ٠,٩٩٢٢ | ٠,٩٩٢٥ | ٠,٩٩٢٧ | ٠,٩٩٢٩ | ٠,٩٩٣١ | ٠,٩٩٣٢ | ٠,٩٩٣٤ | ٠,٩٩٣٦ |
| ٢,٥ | ٠,٩٩٣٨ | ٠,٩٩٤٠ | ٠,٩٩٤١ | ٠,٩٩٤٣ | ٠,٩٩٤٥ | ٠,٩٩٤٦ | ٠,٩٩٤٨ | ٠,٩٩٤٩ | ٠,٩٩٥١ | ٠,٩٩٥٢ |
| ٢,٦ | ٠,٩٩٥٣ | ٠,٩٩٥٥ | ٠,٩٩٥٦ | ٠,٩٩٥٧ | ٠,٩٩٥٩ | ٠,٩٩٦٠ | ٠,٩٩٦١ | ٠,٩٩٦٢ | ٠,٩٩٦٣ | ٠,٩٩٦٤ |
| ٢,٧ | ٠,٩٩٦٥ | ٠,٩٩٦٦ | ٠,٩٩٦٧ | ٠,٩٩٦٨ | ٠,٩٩٦٩ | ٠,٩٩٧٠ | ٠,٩٩٧١ | ٠,٩٩٧٢ | ٠,٩٩٧٣ | ٠,٩٩٧٤ |
| ٢,٨ | ٠,٩٩٧٤ | ٠,٩٩٧٥ | ٠,٩٩٧٦ | ٠,٩٩٧٧ | ٠,٩٩٧٧ | ٠,٩٩٧٨ | ٠,٩٩٧٩ | ٠,٩٩٧٩ | ٠,٩٩٨٠ | ٠,٩٩٨١ |
| ٢,٩ | ٠,٩٩٨١ | ٠,٩٩٨٢ | ٠,٩٩٨٢ | ٠,٩٩٨٣ | ٠,٩٩٨٤ | ٠,٩٩٨٤ | ٠,٩٩٨٥ | ٠,٩٩٨٥ | ٠,٩٩٨٦ | ٠,٩٩٨٦ |
| ٣,٠ | ٠,٩٩٨٧ | ٠,٩٩٨٧ | ٠,٩٩٨٧ | ٠,٩٩٨٨ | ٠,٩٩٨٨ | ٠,٩٩٨٩ | ٠,٩٩٨٩ | ٠,٩٩٨٩ | ٠,٩٩٩٠ | ٠,٩٩٩٠ |
| ٣,١ | ٠,٩٩٩٠ | ٠,٩٩٩١ | ٠,٩٩٩١ | ٠,٩٩٩١ | ٠,٩٩٩٢ | ٠,٩٩٩٢ | ٠,٩٩٩٢ | ٠,٩٩٩٢ | ٠,٩٩٩٣ | ٠,٩٩٩٣ |
| ٣,٢ | ٠,٩٩٩٣ | ٠,٩٩٩٣ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٩٩٩٤ | ٠,٩٩٩٥ | ٠,٩٩٩٥ | ٠,٩٩٩٥ |
| ٣,٣ | ٠,٩٩٩٥ | ٠,٩٩٩٥ | ٠,٩٩٩٥ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٦ | ٠,٩٩٩٧ |
| ٣,٤ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٧ | ٠,٩٩٩٨ |

# قائمة المراجع

## أولًا: المراجع العربية

١– منصور عوض، **مبادئ الإحصاء**، **عمان**: دار الصفاء للنشر، ٢٠٠٦.

٢– إدارة المناهج والكتب المدرسية (الأردن)– **الرياضيات للمرحلة الثانوية/ الفرع العلمي** (المستويان الثالث والرابع)– الطبعة الأولى، وزارة التربية والتعليم، ٢٠١٦.

## ثانيًا: المراجع الأجنبية

1- Howard Anton, IRL; BIVENS, STEPHEN, DAVIS, **Calculus Early Transcendentals**, 10*th* Edition.

2- Larson, Hosteler, **Precalculus**, 7*th* Edition, Bosten.

3- Sallas, Hille, **Calcuus one and Several Variables**,10*th* Edition, 2007. John Willy and Sans.

4- Swokowski, Earal, w. , **Calculus with analiatic Geometry**, 5*th* Edition, Weber and Shmidt, Boston. Massachusetts.

تم بحمد الله