الرياضيات

العلمي

الفصل الدراسي الأول

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

الوحدة (١) : النهايات والاتصال

الفصل الأول : النهايات

تدريب (١) صـ ١١

أكمل :

١) $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = ١$ ، ٢) $\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٥$

٣) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ٠٢ ، ٤) م (٢) = ٨

تدريب (٢) : صـ ١٢

١) $\lim_{س \to ١} م(س) = ٣$ ، ٢) $\lim_{س \to -١} م(س)$ = غير موجودة

٣) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ٢$ ، ٤) $\lim_{س \to -٢} م(س) = ٣$

تمارين ومسائل

صـ ١٣

١) م) $\lim_{س \to ٦^+} م(س) = ٥$ ، ب) $\lim_{س \to -٦} م(س) = ٢$

ج) $\lim_{س \to ٠} م(س) = ١$ ، د) $\lim_{س \to ٢} م(س)$ غ٠٢

ه) $\lim_{س \to -٨^+} م(س) = -٦$ ، و) $\lim_{س \to -٨^-} م(س) = -٦$

٢) $\lim_{س \to ١٠} م(س)$ = غير موجودة ، ب) م (-٨) = -٣٠

٣) م) $\lim_{س \to -٤^+}$ س + ١٢ = ٤ ، ب) $\lim_{س \to -٤^+} ل(س)$ = غير موجودة

ج) $\lim_{س \to -٤^-} ل(س)$ غير موجودة ، د) $\lim_{س \to -٤} ل(س)$ غير موجودة

ه) $\lim_{س \to ٠} ل(س) = ٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $[-1, 1]$

د) $\lambda = -1, 1$ هـ) $\lambda = -2, 3$

٤) $\lim_{س \to 0^+} ل(س) = \lim_{س \to 0^-} ل(س) = (2)^2 + 3 = 7$

$ل(2) = 2 \times 2 + 1 = 5$

ثانياً: نظريات النهايات

تدريب (1)

١) $\lim_{س \to 2} (م(س) + ه(س) \times س) = \lim_{س \to 2} م(س) + \lim_{س \to 2} ه(س) \times \lim_{س \to 2} س$

$= -3 + -6 \times -2$

$= -3 - 12 = -16$

٢) $\lim_{س \to 1} \frac{م(س)}{ه(س)} = \frac{\lim_{س \to 1} م(س)}{\lim_{س \to 1} ه(س)} = \frac{2}{2} = 1$

٣) $\lim_{س \to 1} \sqrt{م(س)} + \lim_{س \to 1} \sqrt{ه(س)} + 10$

$= \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 2 + 10$

$= 3\sqrt{2} + 10$

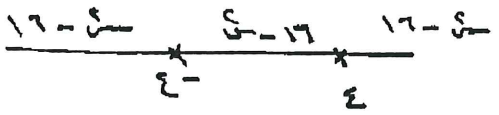
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٢)

١) نهـا | س − ٨ | = | ٠ − ٨ | = ٨
س ← ٠

٢) نهـا | س − ١٦ | = صفر
س ← ١٦

٣) نهـا | س٢ − ١٦ | = ٠
س ← ٤ لأن :



نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤+

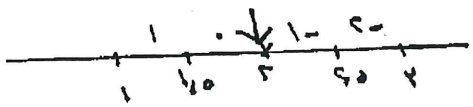
نهـا | س٢ − ١٦ | = صفر
س ← ٤−

تدريب (٣)

١) نهـا [س − ٢]
س ← ١

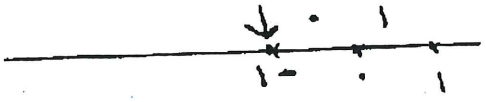
∴ = ٠

٢) نهـا [٤ − ٢ س]
س ← ١,٥



∴ = ١

٣) نهـا [س + ١] = ١
س ← ٠



٤) نهـا [٠,٥ س]
س ← ٤

∴ = ٢

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

أ) ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢٠ ، ٢١ ، ٢٢ ، ٢٣ ، ٢٤ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٨ ، ٢٩ ، ٣٠ ، ٣١ ، ٣٢ ، ٣٣ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٦ ، ٣٧ ، ٣٨ ، ٣٩ ، ٤٠ ، ٤١ ، ٤٢ ، ٤٣ ، ٤٤ ، ٤٥ ، ٤٦ ، ٤٧ ، ٤٨ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥١ ، ٥٢ ، ٥٣ ، ٥٤ ، ٥٥ ، ٥٦ ، ٥٧ ، ٥٨ ، ٥٩ ، ٦٠ ، ٦١ ، ٦٢ ، ٦٣ ، ٦٤ ، ٦٥ ، ٦٦ ، ٦٧ ، ٦٨ ، ٦٩ ، ٧٠ ، ٧١ ، ٧٢ ، ٧٣ ، ٧٤ ، ٧٥ ، ٧٦ ، ٧٧ ، ٧٨ ، ٧٩ ، ٨٠ ، ٨١ ، ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ ، ٨٥ ، ٨٦ ، ٨٧ ، ٨٨ ، ٨٩ ، ٩٠ ، ٩١ ، ٩٢ ، ٩٣ ، ٩٤ ، ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ ، ٩٨ ، ٩٩ ، ١٠٠ ، ١٠١ ، ١٠٢ ، ١٠٣ ، ١٠٤ ، ١٠٥ ، ١٠٦ ، ١٠٧ ، ١٠٨ ، ١٠٩ ، ١١٠ ، ١١١ ، ١١٢ ، ١١٣ ، ١١٤ ، ١١٥ ، ١١٦ ، ١١٧ ، ١١٨ ، ١١٩ ، ١٢٠ ، ١٢١ ، ١٢٢ ، ١٢٣ ، ١٢٤ ، ١٢٥ ، ١٢٦ ، ١٢٧ ، ١٢٨ ، ١٢٩ ، ١٣٠ ، ١٣١ ، ١٣٢ ، ١٣٣ ، ١٣٤ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٣٧ ، ١٣٨ ، ١٣٩ ، ١٤٠ ، ١٤١ ، ١٤٢ ، ١٤٣ ، ١٤٤ ، ١٤٥ ، ١٤٦ ، ١٤٧ ، ١٤٨ ، ١٤٩ ، ١٥٠ ، ١٥١ ، ١٥٢ ، ١٥٣ ، ١٥٤ ، ١٥٥ ، ١٥٦ ، ١٥٧ ، ١٥٨ ، ١٥٩ ، ١٦٠ ، ١٦١ ، ١٦٢ ، ١٦٣ ، ١٦٤ ، ١٦٥ ، ١٦٦ ، ١٦٧ ، ١٦٨ ، ١٦٩ ، ١٧٠ ، ١٧١ ، ١٧٢ ، ١٧٣ ، ١٧٤ ، ١٧٥ ، ١٧٦ ، ١٧٧ ، ١٧٨ ، ١٧٩ ، ١٨٠ ، ١٨١ ، ١٨٢ ، ١٨٣ ، ١٨٤ ، ١٨٥ ، ١٨٦ ، ١٨٧ ، ١٨٨ ، ١٨٩ ، ١٩٠ ، ١٩١ ، ١٩٢ ، ١٩٣ ، ١٩٤ ، ١٩٥ ، ١٩٦ ، ١٩٧ ، ١٩٨ ، ١٩٩ ، ٢٠٠ ، ٢٠١ ، ٢٠٢ ، ٢٠٣ ، ٢٠٤ ، ٢٠٥ ، ٢٠٦ ، ٢٠٧ ، ٢٠٨ ، ٢٠٩ ، ٢١٠ ، ٢١١ ، ٢١٢ ، ٢١٣ ، ٢١٤ ، ٢١٥ ، ٢١٦ ، ٢١٧ ، ٢١٨ ، ٢١٩ ، ٢٢٠ ، ٢٢١ ، ٢٢٢ ، ٢٢٣ ، ٢٢٤ ، ٢٢٥ ، ٢٢٦ ، ٢٢٧ ، ٢٢٨ ، ٢٢٩ ، ٢٣٠ ، ٢٣١ ، ٢٣٢ ، ٢٣٣ ، ٢٣٤ ، ٢٣٥ ، ٢٣٦ ، ٢٣٧ ، ٢٣٨ ، ٢٣٩ ، ٢٤٠ ، ٢٤١ ، ٢٤٢ ، ٢٤٣ ، ٢٤٤ ، ٢٤٥ ، ٢٤٦ ، ٢٤٧ ، ٢٤٨ ، ٢٤٩ ، ٢٥٠ ، ٢٥١ ، ٢٥٢ ، ٢٥٣ ، ٢٥٤ ، ٢٥٥ ، ٢٥٦ ، ٢٥٧ ، ٢٥٨ ، ٢٥٩ ، ٢٦٠ ، ٢٦١ ، ٢٦٢ ، ٢٦٣ ، ٢٦٤ ، ٢٦٥ ، ٢٦٦ ، ٢٦٧ ، ٢٦٨ ، ٢٦٩ ، ٢٧٠ ، ٢٧١ ، ٢٧٢ ، ٢٧٣ ، ٢٧٤ ، ٢٧٥ ، ٢٧٦ ، ٢٧٧ ، ٢٧٨ ، ٢٧٩ ، ٢٨٠ ، ٢٨١ ، ٢٨٢ ، ٢٨٣ ، ٢٨٤ ، ٢٨٥ ، ٢٨٦ ، ٢٨٧ ، ٢٨٨ ، ٢٨٩ ، ٢٩٠ ، ٢٩١ ، ٢٩٢ ، ٢٩٣ ، ٢٩٤ ، ٢٩٥ ، ٢٩٦ ، ٢٩٧ ، ٢٩٨ ، ٢٩٩ ، ٣٠٠ ، ٣٠١ ، ٣٠٢ ، ٣٠٣ ، ٣٠٤ ، ٣٠٥ ، ٣٠٦ ، ٣٠٧ ، ٣٠٨ ، ٣٠٩ ، ٣١٠ ، ٣١١ ، ٣١٢ ، ٣١٣ ، ٣١٤ ، ٣١٥ ، ٣١٦ ، ٣١٧ ، ٣١٨ ، ٣١٩ ، ٣٢٠ ، ٣٢١ ، ٣٢٢ ، ٣٢٣ ، ٣٢٤ ، ٣٢٥ ، ٣٢٦ ، ٣٢٧ ، ٣٢٨ ، ٣٢٩ ، ٣٣٠ ، ٣٣١ ، ٣٣٢ ، ٣٣٣ ، ٣٣٤ ، ٣٣٥ ، ٣٣٦ ، ٣٣٧ ، ٣٣٨ ، ٣٣٩ ، ٣٤٠ ، ٣٤١ ، ٣٤٢ ، ٣٤٣ ، ٣٤٤ ، ٣٤٥ ، ٣٤٦ ، ٣٤٧ ، ٣٤٨ ، ٣٤٩ ، ٣٥٠ ، ٣٥١ ، ٣٥٢ ، ٣٥٣ ، ٣٥٤ ، ٣٥٥ ، ٣٥٦ ، ٣٥٧ ، ٣٥٨ ، ٣٥٩ ، ٣٦٠ ، ٣٦١ ، ٣٦٢ ، ٣٦٣ ، ٣٦٤ ، ٣٦٥ ، ٣٦٦ ، ٣٦٧ ، ٣٦٨ ، ٣٦٩ ، ٣٧٠ ، ٣٧١ ، ٣٧٢ ، ٣٧٣ ، ٣٧٤ ، ٣٧٥ ، ٣٧٦ ، ٣٧٧ ، ٣٧٨ ، ٣٧٩ ، ٣٨٠ ، ٣٨١ ، ٣٨٢ ، ٣٨٣ ، ٣٨٤ ، ٣٨٥ ، ٣٨٦ ، ٣٨٧ ، ٣٨٨ ، ٣٨٩ ، ٣٩٠ ، ٣٩١ ، ٣٩٢ ، ٣٩٣ ، ٣٩٤ ، ٣٩٥ ، ٣٩٦ ، ٣٩٧ ، ٣٩٨ ، ٣٩٩ ، ٤٠٠ ، ٤٠١ ، ٤٠٢ ، ٤٠٣ ، ٤٠٤ ، ٤٠٥ ، ٤٠٦ ، ٤٠٧ ، ٤٠٨ ، ٤٠٩ ، ٤١٠ ، ٤١١ ، ٤١٢ ، ٤١٣ ، ٤١٤ ، ٤١٥ ، ٤١٦ ، ٤١٧ ، ٤١٨ ، ٤١٩ ، ٤٢٠ ، ٤٢١ ، ٤٢٢ ، ٤٢٣ ، ٤٢٤ ، ٤٢٥ ، ٤٢٦ ، ٤٢٧ ، ٤٢٨ ، ٤٢٩ ، ٤٣٠ ، ٤٣١ ، ٤٣٢ ، ٤٣٣ ، ٤٣٤ ، ٤٣٥ ، ٤٣٦ ، ٤٣٧ ، ٤٣٨ ، ٤٣٩ ، ٤٤٠ ، ٤٤١ ، ٤٤٢ ، ٤٤٣ ، ٤٤٤ ، ٤٤٥ ، ٤٤٦ ، ٤٤٧ ، ٤٤٨ ، ٤٤٩ ، ٤٥٠ ، ٤٥١ ، ٤٥٢ ، ٤٥٣ ، ٤٥٤ ، ٤٥٥ ، ٤٥٦ ، ٤٥٧ ، ٤٥٨ ، ٤٥٩ ، ٤٦٠ ، ٤٦١ ، ٤٦٢ ، ٤٦٣ ، ٤٦٤ ، ٤٦٥ ، ٤٦٦ ، ٤٦٧ ، ٤٦٨ ، ٤٦٩ ، ٤٧٠ ، ٤٧١ ، ٤٧٢ ، ٤٧٣ ، ٤٧٤ ، ٤٧٥ ، ٤٧٦ ، ٤٧٧ ، ٤٧٨ ، ٤٧٩ ، ٤٨٠ ، ٤٨١ ، ٤٨٢ ، ٤٨٣ ، ٤٨٤ ، ٤٨٥ ، ٤٨٦ ، ٤٨٧ ، ٤٨٨ ، ٤٨٩ ، ٤٩٠ ، ٤٩١ ، ٤٩٢ ، ٤٩٣ ، ٤٩٤ ، ٤٩٥ ، ٤٩٦ ، ٤٩٧ ، ٤٩٨ ، ٤٩٩ ، ٥٠٠ ، ٥٠١ ، ٥٠٢ ، ٥٠٣ ، ٥٠٤ ، ٥٠٥ ، ٥٠٦ ، ٥٠٧ ، ٥٠٨ ، ٥٠٩ ، ٥١٠ ، ٥١١ ، ٥١٢ ، ٥١٣ ، ٥١٤ ، ٥١٥ ، ٥١٦ ، ٥١٧ ، ٥١٨ ، ٥١٩ ، ٥٢٠ ، ٥٢١ ، ٥٢٢ ، ٥٢٣ ، ٥٢٤ ، ٥٢٥ ، ٥٢٦ ، ٥٢٧ ، ٥٢٨ ، ٥٢٩ ، ٥٣٠ ، ٥٣١ ، ٥٣٢ ، ٥٣٣ ، ٥٣٤ ، ٥٣٥ ، ٥٣٦ ، ٥٣٧ ، ٥٣٨ ، ٥٣٩ ، ٥٤٠ ، ٥٤١ ، ٥٤٢ ، ٥٤٣ ، ٥٤٤ ، ٥٤٥ ، ٥٤٦ ، ٥٤٧ ، ٥٤٨ ، ٥٤٩ ، ٥٥٠ ، ٥٥١ ، ٥٥٢ ، ٥٥٣ ، ٥٥٤ ، ٥٥٥ ، ٥٥٦ ، ٥٥٧ ، ٥٥٨ ، ٥٥٩ ، ٥٦٠ ، ٥٦١ ، ٥٦٢ ، ٥٦٣ ، ٥٦٤ ، ٥٦٥ ، ٥٦٦ ، ٥٦٧ ، ٥٦٨ ، ٥٦٩ ، ٥٧٠ ، ٥٧١ ، ٥٧٢ ، ٥٧٣ ، ٥٧٤ ، ٥٧٥ ، ٥٧٦ ، ٥٧٧ ، ٥٧٨ ، ٥٧٩ ، ٥٨٠ ، ٥٨١ ، ٥٨٢ ، ٥٨٣ ، ٥٨٤ ، ٥٨٥ ، ٥٨٦ ، ٥٨٧ ، ٥٨٨ ، ٥٨٩ ، ٥٩٠ ، ٥٩١ ، ٥٩٢ ، ٥٩٣ ، ٥٩٤ ، ٥٩٥ ، ٥٩٦ ، ٥٩٧ ، ٥٩٨ ، ٥٩٩ ، ٦٠٠ ، ٦٠١ ، ٦٠٢ ، ٦٠٣ ، ٦٠٤ ، ٦٠٥ ، ٦٠٦ ، ٦٠٧ ، ٦٠٨ ، ٦٠٩ ، ٦١٠ ، ٦١١ ، ٦١٢ ، ٦١٣ ، ٦١٤ ، ٦١٥ ، ٦١٦ ، ٦١٧ ، ٦١٨ ، ٦١٩ ، ٦٢٠ ، ٦٢١ ، ٦٢٢ ، ٦٢٣ ، ٦٢٤ ، ٦٢٥ ، ٦٢٦ ، ٦٢٧ ، ٦٢٨ ، ٦٢٩ ، ٦٣٠ ، ٦٣١ ، ٦٣٢ ، ٦٣٣ ، ٦٣٤ ، ٦٣٥ ، ٦٣٦ ، ٦٣٧ ، ٦٣٨ ، ٦٣٩ ، ٦٤٠ ، ٦٤١ ، ٦٤٢ ، ٦٤٣ ، ٦٤٤ ، ٦٤٥ ، ٦٤٦ ، ٦٤٧ ، ٦٤٨ ، ٦٤٩ ، ٦٥٠ ، ٦٥١ ، ٦٥٢ ، ٦٥٣ ، ٦٥٤ ، ٦٥٥ ، ٦٥٦ ، ٦٥٧ ، ٦٥٨ ، ٦٥٩ ، ٦٦٠ ، ٦٦١ ، ٦٦٢ ، ٦٦٣ ، ٦٦٤ ، ٦٦٥ ، ٦٦٦ ، ٦٦٧ ، ٦٦٨ ، ٦٦٩ ، ٦٧٠ ، ٦٧١ ، ٦٧٢ ، ٦٧٣ ، ٦٧٤ ، ٦٧٥ ، ٦٧٦ ، ٦٧٧ ، ٦٧٨ ، ٦٧٩ ، ٦٨٠ ، ٦٨١ ، ٦٨٢ ، ٦٨٣ ، ٦٨٤ ، ٦٨٥ ، ٦٨٦ ، ٦٨٧ ، ٦٨٨ ، ٦٨٩ ، ٦٩٠ ، ٦٩١ ، ٦٩٢ ، ٦٩٣ ، ٦٩٤ ، ٦٩٥ ، ٦٩٦ ، ٦٩٧ ، ٦٩٨ ، ٦٩٩ ، ٧٠٠ ، ٧٠١ ، ٧٠٢ ، ٧٠٣ ، ٧٠٤ ، ٧٠٥ ، ٧٠٦ ، ٧٠٧ ، ٧٠٨ ، ٧٠٩ ، ٧١٠ ، ٧١١ ، ٧١٢ ، ٧١٣ ، ٧١٤ ، ٧١٥ ، ٧١٦ ، ٧١٧ ، ٧١٨ ، ٧١٩ ، ٧٢٠ ، ٧٢١ ، ٧٢٢ ، ٧٢٣ ، ٧٢٤ ، ٧٢٥ ، ٧٢٦ ، ٧٢٧ ، ٧٢٨ ، ٧٢٩ ، ٧٣٠ ، ٧٣١ ، ٧٣٢ ، ٧٣٣ ، ٧٣٤ ، ٧٣٥ ، ٧٣٦ ، ٧٣٧ ، ٧٣٨ ، ٧٣٩ ، ٧٤٠ ، ٧٤١ ، ٧٤٢ ، ٧٤٣ ، ٧٤٤ ، ٧٤٥ ، ٧٤٦ ، ٧٤٧ ، ٧٤٨ ، ٧٤٩ ، ٧٥٠ ، ٧٥١ ، ٧٥٢ ، ٧٥٣ ، ٧٥٤ ، ٧٥٥ ، ٧٥٦ ، ٧٥٧ ، ٧٥٨ ، ٧٥٩ ، ٧٦٠ ، ٧٦١ ، ٧٦٢ ، ٧٦٣ ، ٧٦٤ ، ٧٦٥ ، ٧٦٦ ، ٧٦٧ ، ٧٦٨ ، ٧٦٩ ، ٧٧٠ ، ٧٧١ ، ٧٧٢ ، ٧٧٣ ، ٧٧٤ ، ٧٧٥ ، ٧٧٦ ، ٧٧٧ ، ٧٧٨ ، ٧٧٩ ، ٧٨٠ ، ٧٨١ ، ٧٨٢ ، ٧٨٣ ، ٧٨٤ ، ٧٨٥ ، ٧٨٦ ، ٧٨٧ ، ٧٨٨ ، ٧٨٩ ، ٧٩٠ ، ٧٩١ ، ٧٩٢ ، ٧٩٣ ، ٧٩٤ ، ٧٩٥ ، ٧٩٦ ، ٧٩٧ ، ٧٩٨ ، ٧٩٩ ، ٨٠٠ ، ٨٠١ ، ٨٠٢ ، ٨٠٣ ، ٨٠٤ ، ٨٠٥ ، ٨٠٦ ، ٨٠٧ ، ٨٠٨ ، ٨٠٩ ، ٨١٠ ، ٨١١ ، ٨١٢ ، ٨١٣ ، ٨١٤ ، ٨١٥ ، ٨١٦ ، ٨١٧ ، ٨١٨ ، ٨١٩ ، ٨٢٠ ، ٨٢١ ، ٨٢٢ ، ٨٢٣ ، ٨٢٤ ، ٨٢٥ ، ٨٢٦ ، ٨٢٧ ، ٨٢٨ ، ٨٢٩ ، ٨٣٠ ، ٨٣١ ، ٨٣٢ ، ٨٣٣ ، ٨٣٤ ، ٨٣٥ ، ٨٣٦ ، ٨٣٧ ، ٨٣٨ ، ٨٣٩ ، ٨٤٠ ، ٨٤١ ، ٨٤٢ ، ٨٤٣ ، ٨٤٤ ، ٨٤٥ ، ٨٤٦ ، ٨٤٧ ، ٨٤٨ ، ٨٤٩ ، ٨٥٠ ، ٨٥١ ، ٨٥٢ ، ٨٥٣ ، ٨٥٤ ، ٨٥٥ ، ٨٥٦ ، ٨٥٧ ، ٨٥٨ ، ٨٥٩ ، ٨٦٠ ، ٨٦١ ، ٨٦٢ ، ٨٦٣ ، ٨٦٤ ، ٨٦٥ ، ٨٦٦ ، ٨٦٧ ، ٨٦٨ ، ٨٦٩ ، ٨٧٠ ، ٨٧١ ، ٨٧٢ ، ٨٧٣ ، ٨٧٤ ، ٨٧٥ ، ٨٧٦ ، ٨٧٧ ، ٨٧٨ ، ٨٧٩ ، ٨٨٠ ، ٨٨١ ، ٨٨٢ ، ٨٨٣ ، ٨٨٤ ، ٨٨٥ ، ٨٨٦ ، ٨٨٧ ، ٨٨٨ ، ٨٨٩ ، ٨٩٠ ، ٨٩١ ، ٨٩٢ ، ٨٩٣ ، ٨٩٤ ، ٨٩٥ ، ٨٩٦ ، ٨٩٧ ، ٨٩٨ ، ٨٩٩ ، ٩٠٠ ، ٩٠١ ، ٩٠٢ ، ٩٠٣ ، ٩٠٤ ، ٩٠٥ ، ٩٠٦ ، ٩٠٧ ، ٩٠٨ ، ٩٠٩ ، ٩١٠ ، ٩١١ ، ٩١٢ ، ٩١٣ ، ٩١٤ ، ٩١٥ ، ٩١٦ ، ٩١٧ ، ٩١٨ ، ٩١٩ ، ٩٢٠ ، ٩٢١ ، ٩٢٢ ، ٩٢٣ ، ٩٢٤ ، ٩٢٥ ، ٩٢٦ ، ٩٢٧ ، ٩٢٨ ، ٩٢٩ ، ٩٣٠ ، ٩٣١ ، ٩٣٢ ، ٩٣٣ ، ٩٣٤ ، ٩٣٥ ، ٩٣٦ ، ٩٣٧ ، ٩٣٨ ، ٩٣٩ ، ٩٤٠ ، ٩٤١ ، ٩٤٢ ، ٩٤٣ ، ٩٤٤ ، ٩٤٥ ، ٩٤٦ ، ٩٤٧ ، ٩٤٨ ، ٩٤٩ ، ٩٥٠ ، ٩٥١ ، ٩٥٢ ، ٩٥٣ ، ٩٥٤ ، ٩٥٥ ، ٩٥٦ ، ٩٥٧ ، ٩٥٨ ، ٩٥٩ ، ٩٦٠ ، ٩٦١ ، ٩٦٢ ، ٩٦٣ ، ٩٦٤ ، ٩٦٥ ، ٩٦٦ ، ٩٦٧ ، ٩٦٨ ، ٩٦٩ ، ٩٧٠ ، ٩٧١ ، ٩٧٢ ، ٩٧٣ ، ٩٧٤ ، ٩٧٥ ، ٩٧٦ ، ٩٧٧ ، ٩٧٨ ، ٩٧٩ ، ٩٨٠ ، ٩٨١ ، ٩٨٢ ، ٩٨٣ ، ٩٨٤ ، ٩٨٥ ، ٩٨٦ ، ٩٨٧ ، ٩٨٨ ، ٩٨٩ ، ٩٩٠ ، ٩٩١ ، ٩٩٢ ، ٩٩٣ ، ٩٩٤ ، ٩٩٥ ، ٩٩٦ ، ٩٩٧ ، ٩٩٨ ، ٩٩٩ ، ١٠٠٠

ب) $س \in]٢ ، ١٢]$

تدريب (٥)

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sin س}{س} = ١$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٥س}{٥س} = ١$

٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٢س}{٢س} = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٤س}{٤س} = \frac{\sin ٤٩س}{٤٩س} \times \frac{٤٩}{٤} = \frac{٤٩}{٤}$

تدريب (٦)

$\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٤س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٤س}{٤س} \times ٤ = ١ \times ٤ = ٤$

$\lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٢س}{\sin ٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{\sin ٢س}{٢س} \times \frac{٥س}{\sin ٥س} \times \frac{٢}{٥} = ١ \times ١ \times \frac{٢}{٥} = \frac{٢}{٥}$

تدريب (٧)

١) $\lim_{س \to ١} \frac{\sin ٢(س-١)}{س-١} = ٢$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\sin ٣(س-١)}{س-١} = ٣$

٣) $\lim_{س \to ١} \frac{\sin ٢(س-١)}{\sin ٣(س-١)} = \frac{٢}{٣}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عامرين وسائل

١) أ) $\lim_{س \to ١} (م(س) + ن(س)) = -٦ + -٤ = -١٠$

ب) $\lim_{س \to ١} (م(س) \times ن(س)) = -٦ \times -٤ = ٢٤$

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{م(س)}{ن(س)} = \frac{-٦}{-٤} = \frac{٣}{٢}$

د) $\lim_{س \to ٤} ن(س)^{٤} = \left(\lim_{س \to ٤} ن(س)\right)^{٤} = (-٣)^{٤} = ٨١$

هـ) $\lim_{س \to ٤} \sqrt{ن(س) - ١} = \sqrt{\lim_{س \to ٤} (ن(س) - ١)} = \sqrt{-٣ - ١} = \sqrt{-٤}$

و) $\lim_{س \to -٥} \frac{ن(س)}{م(س) - ١} = \frac{ن(-٣)}{م(-٣) - ١} = \frac{٠}{-٤} = ٠$

٢) أ) $\lim_{س \to ١} (٢ع(س) + ن(س)) = ١٠ + ٢ = ١٢$

ب) $١٢٥ - ٤ = ١٢١$

ج) $\frac{٤٢}{٥}$ د) $٢٥ - ٤ = ٢١$

٣) أ) $\lim_{س \to ٥+} |س - ٤| - ١٢٥| = صفر$ ب) $\lim_{س \to ٥-} |س - ٤| - ١٢٥| = صفر$

ج) $\lim_{س \to ٣-} |س - ١٢| = صفر$ د) $\lim_{س \to ٨} |س - ٤| - ١٦| = صفر$

هـ) $\lim_{س \to -٤} [س - ٣] = غ.م$ و) $\lim_{س \to ١} (س[س] + |س - ١|)$ غ.م

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ز) $\lim_{س \to 5^-} \sqrt{5-س}$ = صفر ح) $\lim_{س \to 1} \sqrt{1-س}$ غير موجود

ط) $\lim_{س \to 0} \sqrt{س^2+3س+3}$ = $\lim_{س \to -2} \sqrt{(س+2)^2}$ = $\lim_{س \to -2} |س+2|$ = صفر

ع) بفرض $ب \in [6, 8)$

ه) $ب \in (-\infty, 5)$

ج) بما أن $\lim_{س \to 2} م(س)$ موجودة ∴ $\lim_{س \to 2^+} م(س) = \lim_{س \to 2^-} م(س)$

$9 - 4ب = 3$ وعند $س = 2$ $9 - 2 = 4ب$

$6 = 4ب \Leftarrow ب = \frac{6}{4}$

ز) $\lim_{س \to 2} \sqrt{2س-3}$ افرض $ص = 2س-3$

$\lim_{ص \to 1} ل(ص) = 1$ $س \to 2$ ، $ص \to 1$

ط) $\lim_{س \to 2} (ل+م)(س) = \lim_{س \to 2} ل(س) + \lim_{س \to 2} م(س) = 2 + 1 = 3$

ي) $\lim_{س \to 1} م(س) + \lim_{س \to 1} ع(س)$ لأن النهايتين منفصلتين

$= 0 + 2 = 2$

ك) $\lim_{س \to 2} م(س) \times \lim_{س \to 2} ع(س) = 1 \times 1 = 1$

ل) افرض $ص = س - 1$ $س \to 1$ ، $ص \to$ صفر

$\lim_{ص \to 0} م(ص) + \lim_{س \to 1} ع(س) = 4 + 2 = 6$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) $\lim_{س \to -٣} (س - ل(س)) = -١٠$

$-٣ - \lim_{س \to -٣} ل(س) = -١٠$

$\Leftarrow -٣ + ١٠ = \lim_{س \to -٣} ل(س) = ٧$

$\therefore \lim_{س \to -٣} (ق^{٢}(س) - ٢ ل(س)) = (\lim_{س \to -٣} ق(س))^{٢} - \lim_{س \to -٣} ٢ ل(س)$

$= ١٦ - ١٤$

$= ٢$

١٠) $ع(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} (٤ع(س) + ٤ - س^{٢}) = \lim_{س \to ٢} ٤ع(س) + \lim_{س \to ٢} ٤ - \lim_{س \to ٢} س^{٢}$

$= ٤ \times ٥ + ١٦$

$= ٢٠ + ١٦ = ٣٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثالثا : نهايات اقترانات كسرية .

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to -٥} \frac{س^٢ + ٣س - ١٠}{س + ٥} = \lim_{س \to -٥} \frac{(س+٥)(س-٢)}{(س+٥)} = -٧$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س^٢ + ١}{س - ٢}$ غ.م

تدريب (٢)

١) $\lim_{س \to ٥} \left(\frac{١}{س - ٥} - \frac{٢}{س^٢ - ٥س}\right)$

$= \lim_{س \to ٥} \left(\frac{١٠ - ٢س}{س^٢ - ٥س}\right) \frac{١}{(س-٥)(س+٥)}$

$= \lim_{س \to ٥} \frac{-٢(٥-س)}{س(س-٥)(س+٥)} = \frac{-٢}{٢٥} \times \frac{١}{١٠} = \frac{-٢}{٢٥٠}$

٢) $\lim_{س \to ٢} \frac{س - ٢}{\sqrt{س^٢ + ٣س + ٤} - ٦} \times \frac{\sqrt{س^٢ + ٣س + ٤} + ٦}{\sqrt{س^٢ + ٣س + ٤} + ٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س^٢ + ٣س + ٤} + ٦)}{(س^٢ + ٣س + ٤) - ٣٦}$

$\lim_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(\sqrt{س^٢ + ٣س + ٤} + ٦)}{(س-٢)} = ١٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س^2+1} - \sqrt{1-2س^2}}{س} \times \frac{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(س^2+1) - (1-2س^2)}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س^2 + 2س^2}{س^2 (\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{3}{\sqrt{س^2+1} + \sqrt{1-2س^2}}$

$= \frac{3}{2}$

تدريب (3)

أ) $\lim_{س \to 3^+} \frac{\sqrt{س-3}}{\sqrt{س^2-9}} = \lim_{س \to 3^+} \frac{\sqrt{س-3}}{\sqrt{(س-3)(س+3)}}$

$= \lim_{س \to 3^+} \frac{1}{\sqrt{س+3}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$

ب) $\lim_{س \to 2^+} \frac{\sqrt{س-2}}{\sqrt{س^2-4}}$ لأن المقدار غير معرف في مجال العدد $\mathbb{R}$

تدريب (4)

$\lim_{س \to 7} \frac{\sqrt[3]{س+1} - 2}{س-7} \times \frac{(\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4}{(\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4}$

$= \lim_{س \to 7} \frac{(س+1) - 8}{(س-7)((\sqrt[3]{س+1})^2 + 2\sqrt[3]{س+1} + 4)} = \frac{1}{(\sqrt[3]{8})^2 + 2\sqrt[3]{8} + 4}$

$= \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{ن} - ١}{س - ١}$ ، $ن \neq ٠$ لأن البسط والمقام غير معرّفان في فترة مفتوحة تحوي العدد ١

ج) $\lim_{س \to ١} \frac{س^{٣} + ٣س - ٤}{س^{٢} - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^{٢} + س + ٤)}{(س-١)(س+١)} = \frac{٦}{٢} = ٣$

د) $\lim_{س \to ٧^{+}} \frac{س^{٢} - ٤٩}{|س - ٧|} = \lim_{س \to ٧^{+}} \frac{(س-٧)(س+٧)}{(س-٧)} = \lim_{س \to ٧^{+}} س + ٧ = ١٤$

هـ) $\lim_{س \to ٠,٥} \frac{س - [\![س]\!]}{٤س^{٢} - ٥س}$ لإيجاد النهاية عند العدد ٠,٥ يجب إيجاد النهاية من اليمين واليسار

$\lim_{س \to ٠,٥^{+}} \frac{س - [\![س]\!]}{س(٤س - ٥)} = \lim_{س \to ٠,٥^{+}} \frac{س - ٠}{س(٤س-٥)(٢س+٥)} = \lim_{س \to ٠,٥^{+}} \frac{١}{(٤س-٥)(٢س+٥)} = \frac{١}{١٠}$

$\lim_{س \to ٠,٥^{-}} \frac{س - [\![س]\!]}{س(٤س - ٥)} = \lim_{س \to ٠,٥^{-}} \frac{س - ٠}{س(٤س-٥)(٢س+٥)} = \lim_{س \to ٠,٥^{-}} \frac{١}{(٤س-٥)(٢س+٥)} = -\frac{١}{١٠}$

$\therefore$ النهاية غير موجودة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $\lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{1+س^2} - \sqrt{1-س^2}}{س^2} \times \frac{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}{\sqrt{1+س^2} + \sqrt{1-س^2}}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{(1+س^2)-(1-س^2)}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})} = \lim_{س \to 0} \frac{2س^2}{س^2(\sqrt{1+س^2}+\sqrt{1-س^2})}$

$= \frac{2}{2} = 1$

٢) بما أن النهاية موجودة $\therefore$ م(٣) + ٥ = صفر $\Leftarrow$ م(٣) = −٥

$\lim_{س \to 2} [م(س) - ٢س^2 + ٣ب] = ٧$

$م(٣) - ٦ + ٣ب = ٧ \Leftarrow -٥ - ٦ + ٣ب = ٧$

$٣ب = ٧ + ١١$

$٣ب = ١٨$

$\Leftarrow ب = ٦$

٣) بما ان النهاية موجودة اذاً

$\lim_{س \to -٢^+} م(س) = \lim_{س \to -٢^-} م(س)$

$\frac{٢-س}{٣-س} = -١ = \lim_{س \to -٢^-}$ $\lim_{س \to -٢^-} أ س^2 - ٤ = أ - ٤$

$أ - ٤ = -١ \Leftarrow أ = ٣ \Leftarrow أ = \frac{١}{٣}$

موجود في أسئلة الوحدة
ص ٦٦

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٣) بما أن النهاية موجودة

$$أ + ٢ب + ٢ = ٠ \quad \cdots (١)$$

$$أ + ٢ب + ٢ = ١$$

$$٢أ + ٢ب = ١ \quad \cdots (٢)$$

بحل المعادلتين (١) ، (٢)

$$أ = ٣ \quad ، \quad ب = -\frac{٥}{٢}$$

$$\begin{array}{cccc} & أ & ٢ب & ٢ \\ ١ & أ & (أ+٢ب) & \\ & أ & (أ+٢ب) & أ+٢ب+٢ \end{array}$$

٤) $$\text{نها}_{س \to ٠} \frac{(٢س)^{٨س} - ١}{١ - ٨^{س}} = \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٨^{س} - ١}{١ - ٨^{س}}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٠} \frac{٨^{س}(١ - ٨^{-س})}{(١ - ٨^{س})} = \text{نها}_{س \to ٠} -٨^{-س} = -١$$

٥) بما أن النهاية موجودة

$$\text{نها}_{س \to ٠} ه(س) = \text{نها}_{س \to ٠} ل(س)$$

$$س \to ٠ \quad \Leftarrow \quad ع^{٢} \to ٠ \quad \Leftarrow \quad ع \to ٠$$

$$\frac{ع^{٢} - ب}{٢ع^{٥} + ع^{٣} + ١٨} = ع + ٥$$

$$\frac{(ع - ٣)(ع^{٢} + ٣ع + ٩)}{٢(ع^{٥} + ٣ع^{٣} + ٩)} = ع + ٥$$

$$ع - ٣ = ٣ع^{٣} + ١٠ \Leftarrow -ع = ١٣ \Leftarrow ع = -١٣$$

٦) النهاية غير موجودة عند الصفر

$$س^{٣} - ٥س + ٦ = ٠ \quad (س - ٢)(س - ٣) = ٠$$

مج أ : ٣،٢

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٧ $\lim_{س \to ٣} \frac{س^٣ + ٢س - ٢}{ق(س) - ٦} = ٢ - ب$

$\lim_{س \to ١} \frac{(س+٢)(س-١)}{(س-١)} = ٢ - ب$ ... بضرب البسط والمقام × $س - ١$

$\lim_{س \to ١} \frac{ق(س) - ٦}{س - ١}$

$\frac{٤}{٨} = ٢ - ب \Leftarrow \frac{١}{٢} = ٢ - ب \Leftarrow -ب = ٢ - \frac{١}{٢} \Leftarrow ب = ١$

ب) نعلم ان النهاية موجودة اذا $د(٠) + ٥ = صفر$

$\lim_{س \to ٣} (د(س) - ٥ - ٣جـ) = ٢ \Leftarrow -٥ - ٥ - ٢جـ = ٢$

$-٢جـ = ٢ + ١٠$

$جـ = -٤$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

رابعًا: نهايات اقترانات مثلثية.

تدريب (١)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا} ٦س}{٣س} = \frac{٦}{٣} = ٢$

٢) $\lim_{س \to \pi} \frac{\text{جا}(س - \pi)}{(س - \pi)} = ١$

٣) $\lim_{س \to 0} \frac{س}{\text{ظا} س} = ١$

٤) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا} س}{س - \frac{\pi}{٢}} = \frac{١}{\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{\pi}$

تدريب (٢)

$\lim_{س \to 0} \frac{س - \text{جا}٣س + \text{ظا}٥س}{٣س - ٤\text{ظا}س}$ نقسم بسط ومقام الكسر على س

$= \lim_{س \to 0} \frac{١ - \frac{\text{جا}٣س}{س} + \frac{\text{ظا}٥س}{س}}{٣ - ٤\frac{\text{ظا}س}{س}} = \frac{١ - ٣ + ٥}{٣} = \frac{٣}{٣} = ١$

تدريب (٣)

١) $\lim_{س \to 0} \frac{١ - \text{جتا}س}{س^٢} = \lim_{س \to 0} \frac{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢})}{س^٢}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{٢\text{جا}^٢\frac{س}{٢}}{س^٢} = ٢ \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\frac{س}{٢}}{س}$

$= ٢ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$

٢) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س + \text{جا}٤س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٨س}{س} + \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}٤س}{س}$

$= ٨ + ٤ = ١٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤)

١) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جتا}\, س}{\frac{\pi}{٢} - س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{٢} - س\right)} = ١$

٢) $\lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\, \frac{\pi}{٢} س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{٢} - \frac{\pi}{٢} س\right)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\, \frac{\pi}{٢}(١ - س)}{(١ - س)} = \frac{\pi}{٢}$

تمارين ومسائل

١) $\lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\, ٨س}{س} = ٨$

٢) $\lim_{س \to ٠} \frac{س + \text{ظا}\, ٢س - \text{جا}\, س}{س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س}{س} + \lim_{س \to ٠} \frac{\text{ظا}\, ٢س}{س} - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}\, س}{س}$

$= ١ + ٢ - ١ = ٢$

٣) $\lim_{س \to ٠} (\text{قا}\, س + \text{ظا}\, ٥س) = \lim_{س \to ٠} \text{قا}\, س + \lim_{س \to ٠} \text{ظا}\, ٥س$

$= ١ + ٠ = ١$

٤) $\lim_{س \to ٠} ٧ - ٣ \text{ظتا}^{٢}(٢س)$ فتا ٥س

$= \lim_{س \to ٠} \frac{٧ - ٣}{\text{ظا}^{٢}(٢س)} \times \lim_{س \to ٠} \frac{س}{\text{جا}\, ٥س} = ٧ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٥} = \frac{٧}{٢٠}$

٥) $\lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}\, ٤س - ٢\, \text{جتا}^{٢} س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١ + \text{جتا}\, ٤س - (\text{جتا}^{٢} س + ١)}{س^{٢}}$

$= \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جتا}\, ٤س - \text{جتا}^{٢} س}{س^{٢}} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{س^{٢}} \times -٢\, \text{جا}\, ٣س\, \text{جا}\, س$

$= -٦ \times ١ = -٦$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٦) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}\, س}{س\, \text{جا}\, س} \times \frac{1 + \text{جتا}\, س}{1 + \text{جتا}\, س}$

$\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^2 س}{(س\, \text{جا}\, س)(1 + \text{جتا}\, س)}$ $= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^2 س}{س\, \text{جا}\, س (1 + \text{جتا}\, س)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{1 + \text{جتا}\, س}$

$= 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{ظا}\, 2س}{\pi - 2س} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\pi - 2س)}{\text{جتا}(\pi - 2س)} = \frac{1}{2}$

١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}\, س - \text{جا}\, س}{س} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س} - \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}\, س}{س}$

$= 1 - 1 = \text{صفر}$

٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}\, س}{(\pi - 2س)^2} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}\, س}{(2)^2 (\frac{\pi}{2} - س)^2} \times \frac{1 + \text{جا}\, س}{1 + \text{جا}\, س}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \text{جا}^2 س}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2 (1 + \text{جا}\, س)} = \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتا}^2 س}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2 (1 + \text{جا}\, س)}$

$\lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س))^2}{4 (\frac{\pi}{2} - س)^2 (1 + \text{جا}\, س)} = \frac{1}{4} \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{2} - س)}{(\frac{\pi}{2} - س)} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + \text{جا}\, س}$

$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٠) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س - 1}{س^2} \times \frac{\text{جتا}^2 س + 1}{\text{ظا}^2 س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س - 1}{س^2 (\text{ظا}^2 س + 1)} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س}{س^2 (\text{ظا}^2 س + 1)}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا} س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{1}{\text{ظا}^2 س + 1}$

$= 1 \times 1 \times \frac{1}{1} = 1$

١١) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}^2 س + س^2}{\text{جا}^2 س}$ نقسم بسط المقدار ع $س^2$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\frac{\text{ظا}^2 س}{س^2} + \frac{س^2}{س^2}}{\frac{\text{جا}^2 س}{س^2}} = \lim_{س \to 0} \frac{\left(\frac{\text{ظا} س}{س}\right)^2 + 1}{\left(\frac{\text{جا} س}{س}\right)^2}$

$= \frac{\lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{ظا} س}{س}\right)^2 + \lim_{س \to 0} 1}{\lim_{س \to 0} \left(\frac{\text{جا} س}{س}\right)^2} = \frac{1 + 1}{1} = 2$

١٢) $\lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} 2س - \text{جا} س}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا} 2س}{س - \frac{\pi}{4}}$

$= \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - 2س\right)}{س - \frac{\pi}{4}} = \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}\left(\frac{\pi}{2} - س\right)}{\left(\frac{\pi}{4} - س\right)} = -2$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٣) $\lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}٦س}{\text{جتا}٨س - 1} \times \frac{1 + \text{جتا}٦س}{1 + \text{جتا}٦س} \times \frac{\text{جتا}٨س + 1}{\text{جتا}٨س + 1}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{1 - \text{جتا}^٢٦س}{\text{جتا}^٢٨س - 1} \times \frac{\text{جتا}٨س + 1}{1 + \text{جتا}٦س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢٦س}{-\text{جا}^٢٨س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}٨س + 1}{1 + \text{جتا}٦س}$

$= \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}^٢٦س}{س^٢} \times \frac{س^٢}{-\text{جا}^٢٨س} \times \frac{٢}{٢} = \frac{٣٦}{-٦٤}$

١٤) $\lim_{س \to 0} س^٣ (\text{ظتا}^٢س + \text{قتا}^٢س)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س^٣}{\text{ظا}^٢س} + \lim_{س \to 0} \frac{س^٣}{\text{جا}^٢س} = ٣ + ١ = ٤$

١٥) $\lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظتا}س}{٢س - \pi} = \lim_{س \to \frac{\pi}{٢}} \frac{\text{ظا}(\frac{\pi}{٢} - س)}{٢(\frac{\pi}{٢} - س)} = \frac{١}{٢}$

١٦) $\lim_{س \to ١} \frac{س \text{ جا}\pi س}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\pi س}{س - ١} = \frac{\text{جا}(\pi - \pi س)}{س - ١}$

$= \lim_{س \to ١} \frac{\text{جا}\pi(١ - س)}{س - ١} = \pi$

١٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{س^٢ - ١٦} = \lim_{س \to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{(س-٤)(س+٤)} = \lim_{س \to ٤} \frac{\text{ظا}(س+٤)}{(س+٤)} \times \lim_{س \to ٤} \frac{١}{س-٤}$

$= ١ \times \frac{١}{٨} = \frac{١}{٨}$

١٨) $\lim_{س \to ٠} \frac{٢\text{جا}س - \text{جا}٢س}{١ - \text{جتا}٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - \text{جا}٢س}{١ - (١ - ٢\text{جا}^٢س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س - \text{جا}٢س}{٢\text{جا}^٢س}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - \text{جا}٢س}{٢\text{جا}^٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{٢\text{جا}^٢س} - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢س}{٢\text{جا}^٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\text{جا}س} - \lim_{س \to ٠} \frac{١}{٢\text{جا}س} = \frac{١}{٢}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - \text{جا}٢س}{\text{جا}^٣س} = \lim_{س \to ٠} \frac{٢س}{\text{جا}^٣س} - \lim_{س \to ٠} \frac{\text{جا}٢س}{\text{جا}^٣س} = \lim_{س \to ٠} \frac{١}{\text{جا}^٢س} - \lim_{س \to ٠} \frac{٢}{\text{جا}^٢س} = -\frac{١}{٢}$

∴ $\lim_{س \to ٠} \frac{٢س - \text{جا}٢س}{\text{جا}^٣س}$ غير موجودة

١٩) $\lim_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}س}{\pi - ٣} = \lim_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}(٣\pi - س)}{-(٣\pi - س)} = -\lim_{س \to ٣\pi} \frac{\text{جا}(٣\pi - س)}{(٣\pi - س)}$

$= -١$

٢٠) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - ٢}{\text{ظا}٣س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - ٢}{\text{ظا}(٣\pi - ٣\pi - ٣س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - ٢}{\text{ظا}\pi(٣ - س)} = -\frac{١}{\pi}$

٢١) $\lim_{س \to ٣} \frac{\text{جا}س + \text{جا}٣}{س + ٣} = \lim_{س \to -٣} \frac{\text{جا}(\frac{س+٣}{٢})\ \text{جتا}(\frac{س-٣}{٢})}{س + ٣}$

$= \lim_{س \to -٣} \frac{\text{جا}(\frac{س+٣}{٢})}{س+٣} \times \lim_{س \to -٣} \text{جتا}(\frac{س-٣}{٢})$

$= \text{جتا}(-٣)$

$= \text{جتا}٣$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٢٢) $\frac{أ}{ج} = \frac{٣}{١-٥} = ٦$ ، $أ = ١٢$ ، $ب = \frac{٩}{٦} = \frac{٣}{ج}$

٢٣) $\lim_{س \to ٠} \frac{جا(٢٢ - ٣س)}{-٥س} = \lim_{س \to ٠} \frac{جا٢(١١ - س)}{-٥س} = -\frac{جا٢ب}{-٥ب}$

$= \frac{٢}{٥}$

الفصل الثاني : الاتصال

أولاً : الاتصال عند نقطة .

تدريب (١)

١) $م$ معرفة عند $س = ٤$ $م(٤) = \frac{|٤-٤|}{٨} = صفر$

احسب $\lim_{س \to ٤}$ النهاية

$\lim_{س \to ٤^+} م(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س-٤}{|س-٤|} = صفر$

$\lim_{س \to ٤^-} م(س) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{س-٤}{-(س-٤)} = صفر$

بما أن $\lim_{س \to ٤} م(س) = م(٤) = صفر$ ∴ $م$ متصل عند $س = ٤$

تدريب (٢)

١) $س \in ط$ $ط$ مجموعة الأعداد الصحيحة .

٢) $م(س) = [٠,٥ س]$

تدريب (٣)

بما أن $م$ متصل ∴ $\lim_{س \to -٢^+} م(س) = \lim_{س \to -٢^-} م(س) = م(-٢)$

$-٢أ + ٢ب = ٦$ ... ①

$٣أ + ب = ٦$ ... ②

بحل المعادلتين ينتج $أ = \frac{٦}{٥}$ ، $ب = -\frac{١٢}{٥}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥)

$$ق(س) = \begin{cases} (1+2س)\,س^2 & ، \ س \le 1 \\ 3س^2 - |س| & ، \ س > 1 \end{cases}$$

ق غير متصل عند $س = 1$ لأنها كثيرة حدود

ق متصل عند $س > 1$ لأنها متصلة كثيرة حدود

اكتب في الرسمان عند $س = 1$

$$\text{نها}_{س \to 1^+} ق = \text{نها}_{س \to 1^+} ق(س) \stackrel{؟}{=} ق(1)$$

$$3 = 3 = 2 + 1 \quad \therefore \text{ ق متصل عند } س = 1$$

طريقة (٢)

ق متصل عند $س = 1$ لأن $\text{نها}_{س \to 1^+} ق(س) = \text{نها}_{س \to 1^-} ق(س) = ق(1) = 3$

ل متصل عند $س = 1$ لأن $\text{نها}_{س \to 1^+} ل(س) = \text{نها}_{س \to 1^-} ل(س) = ل(1) = 1$

$\therefore$ ق + ل متصل عند $س = 1$ (نظرية ٢)

تدريب (٦)

$$و(س) = \begin{cases} (س-5)^2 \times 0 & ، \ س \ge -1 \\ (س-5)^2 \times -1 & ، \ س < -2 \end{cases}$$

و غير متصل عند $س = -2$ لأن:

$$\text{نها}_{س \to -2^-} و = \text{صفر} \ ، \ \text{نها}_{س \to -2^+} و = (-2-5)^2 \times -1 = -49$$

و غير متصل عند $س = 5$

لأن $\text{نها}_{س \to 5^-} و = (س-5)^2 \times 6$ ، $\text{نها}_{س \to 5^+} و(س) = 0$

$\therefore \text{نها}_{س \to 5^+} و \neq \text{نها}_{س \to 5^-} و$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين وسائل

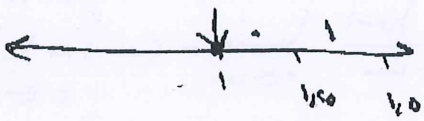
١) $س = -٥$ لأن $\lim_{س \to -٥} م(س) \neq م(-٥)$

$س = ١$ لأن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$

$س = ٤$ لأن $م(٤)$ غير معرّفة

٣) $\lim_{س \to ١^+} م(س) = ١$

$\lim_{س \to ١^-} م(س) = ٠$



بما أن $\lim_{س \to ١^+} م(س) \neq \lim_{س \to ١^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ١,٥$

٣) $م$ غير متصل عند $س = ١$ فإن $م(١)$ غير معرّفة

٤) $م$ غير متصل عند $س = ٢$ لذلك $م(٢)$ غير معرّفة

٥) $\lim_{س \to ٠^+} م(س) = \lim_{س \to ٠^+} (١ - جتا س) = صفر$

$\lim_{س \to ٠^-} م(س) = \lim_{س \to ٠^-} \frac{|ظا س|}{س} = -١$

بما أن $\lim_{س \to ٠^+} م(س) \neq \lim_{س \to ٠^-} م(س)$ ∴ $م$ غير متصل عند $س = ٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٦) $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{س-٢}{|س-٢|} =$ غير موجود

$\lim_{س \to ٢^-} ل(س) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س-٢}{-(س-٢)} = \lim_{س \to ٢^-} (-١) = -١$

$\therefore$ غير موجود

$ل(٢) =$ غير موجود

بما ان $\lim_{س \to ٢^+} ل(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} ل(س)$ $\therefore$ ل غير متصل عند $س = ٢$

٧) $م(٢) = ٥$

$\lim_{س \to ٢} م(س) = \lim_{س \to ٢} \frac{|س-٢|}{س-٢} = \lim_{س \to ٢} \frac{س-٢}{س-٢} = ١$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) \neq م(٢)$ $\therefore$ م غير متصل عند $س = ٢$

٨) $ك(٢) = ٢ \times ٢ - ١ = ٣$

$\lim_{س \to ٢^+} ك(س) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ك(س) =$ غير موجود

$\therefore \lim_{س \to ٢} ك(س)$ غير موجود وعليه ك غير متصل عند $س = ٢$

٩) بما ان ع متصل عند $س = ٢$

فإن $\lim_{س \to ٢} ع(س) = ع(٢)$

$\lim_{س \to ٢^+} ع(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to ٢^-} ع(س) = \frac{ح}{٢} + ٤$

$\frac{ح}{٢} + ٤ = ٥ \Leftarrow \frac{ح}{٢} = ١ \Leftarrow ح = ٢$

١٠) $ل(١) = ٤$ ، $\lim_{س \to ١} ل(س) = \lim_{س \to ١} \frac{س^٣ + س^٢ + ٢س - ٤}{س - ١} = \lim_{س \to ١} \frac{(س-١)(س^٢ + ٢س + ٤)}{(س-١)}$

$= ٧$

بما ان $ل(١) \neq \lim_{س \to ١} ل(س)$ $\therefore$ ل غير متصل عند $س = ١$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) $م(٢) = [٢+٤] = [٦] = ٦$

$\lim_{س \to ٢^-} م(س) = ٦$ ، $\lim_{س \to ٢^+} م(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٦}{٣} + ٥ + ٣س)$

$= ٢ + ٣ = ٦$

بما ان $\lim_{س \to ٢} م(س) = م(٢)$

$\therefore$ م متصل عند $س = ٢$

١٢) $\lim_{س \to ٣^+} ل(س) = \lim_{س \to ٣^-} ل(س) = ل(٣)$

$-٣ = ٤ + ب \Leftarrow ب = -٧$

١٣) $م(٣) = ٢ \times ٣ + ٥ = ٤ + ١٠ = ١٤$

$\lim_{س \to ٣} م(س) = ٢(٣)^٢ - ٤$

$= ٢ \times ٩ - ٤$

$= ١٤$

بما ان $\lim_{س \to ٣} م(س) \neq م(٣)$ $\therefore$ م غير متصل عندما $س = ٣$.

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ثانياً : الاتصال على فترة

تدريب (١)

د متصل على الفترة $[2,7]$ على جزء كثير حدود .

د متصل على الفترة $[0,5]$ على جزء كثير حدود .

$\lim_{س \to 2^+} د(س) = 9$ ، $د(2) = 9$

$\therefore$ د متصل

اجتث في الاتصال د عند نقطة التقطيع .

$\lim_{س \to 5^+} د(س) = 25$ ، $\lim_{س \to 5^-} د(س) = 25$ ، $د(5) = 25$

$\therefore$ د متصل عند $س = 5$ وبذلك د متصل على الفترة $[7,13]$

$\lim_{س \to 7^-} د(س) = 27$ ، $د(7) = 9$ د غير متصل عند $س = 7$

أيضاً عند $س = 7$ جعلت د متصل على الفترة $[7,13]$

تدريب (٢)

١) د متصل على $ع - \{0\}$ على جزء اقتران لسببي معرّفان ع قاعدة

عند $س = 0$

$\lim_{س \to 0} د(س) = \lim_{س \to 0^+} س - 5 = \lim_{س \to 0^-} \frac{(س+5)(س-5)}{(س+5)} = 10$

$د(0) = 0 + 5 = 10$

وبذلك د متصل على مجموعة الأعداد الحقيقية ع

تدريب (٣)

أكمل تعريف الاقتران د .

د متصل على $(1.0, 1.0)$ على جزء كثير حدود .

$د = \begin{cases} 1.0 - س & 1.0 \geq س \\ س - 1.0 & 1.0 < س \leq 1.9 \end{cases}$

د متصل على $(1.0, 1.9)$ على جزء كثير حدود .

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند نقطة الأصل.

$\lim_{س \to 0^+} \frac{ه(س) - ه(0)}{س - 0} = \lim_{س \to 0^+} \frac{ه(س) - 0}{س} = \lim_{س \to 0^+} \frac{ه(س)}{س}$

$\lim_{س \to 0^-} \frac{ه(س) - ه(0)}{س - 0} = \lim_{س \to 0^-} \frac{ه(س)}{س} = \lim_{س \to 0^-} \frac{ه(س)}{-س}$

$ه(0) = 0$

$\therefore ه$ متصل عند $س = 0$

عند النقطة $س = 1$:

$\lim_{س \to 1^+} ه(س) = 1 - 1 = 0$ ، $ه(1) = 0$

$\lim_{س \to 1^-} ه(س) = 1 - 1 = 0$

$\therefore ه$ متصل على يسار العدد 1

$\lim_{س \to 9^-} ه(س) = 9 - 1 = 8$ ، $ه(9) = 9 - 1 = 8$

$\lim_{س \to 9^+} ه(س) = 9 - 1 = 8$

$\therefore ه$ متصل على يمين العدد 9

$\therefore ه$ متصل على الفترة $[1, 9]$

تدريب (٤)

بما أن الاقترانين $ع$ متصل على الفترة $[-\pi, \pi]$ $\therefore ع$ متصل عند $س = 0$

$\therefore \lim_{س \to 0^+} ع(س) = \lim_{س \to 0^-} ع(س) = ع(0)$

$ب(2 + 0) = \lim_{س \to 0^-} \frac{جا 2س}{5س} = \frac{2}{5}$

$\frac{2}{5} = 2 \Leftarrow$ ، $\boxed{ب = 1}$ $\boxed{ا = 10}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

١) $م$ متصل على الفترة $(-١،٢)$ على صورة كثير حدود ـ

$م$ متصل على الفترة $(١،٢)$ على صورة كثير حدود ـ

عند نقطة التحول ـ

$\text{نها}_{س \to ١^+} م(س) = ٨$ ، $\text{نها}_{س \to ١^-} م(س) = ٣ + ٥ = ٨$

$م(١) = ٨$

$\therefore$ $م$ متصل عند $س = ١$

عند الطرف ٢ :

$\text{نها}_{س \to -٢^+} م(س) = ١٧$ ، $م(-٢) = ١٧$

$\therefore$ $م$ متصل على مجموعة العدد -٢

$\text{نها}_{س \to ١^-} م(س) = ٨$ ، $م(١) = ٨$

$\therefore$ $م$ متصل على مجموعة العدد ١

وعليه $م$ متصل على الفترة $[-٢، ١]$

٢) أعد تعريف الاقتران ل

$$ل(س) = \begin{cases} ٢س - ١٠ & ٥ \leq س < ٨ \\ ١٠ - ٢س & ١٠ \leq س < ٥ \end{cases}$$

ل متصل على الفترة $(٥، ٨)$ والفترة $(-١٠، ٥)$ على صورة كثير حدود عند نقطة التحول ـ

$\text{نها}_{س \to ٥^+} ل(س) = \text{هـ}ز$ ، $\text{نها}_{س \to ٥^-} ل(س) = \text{هـ}ز$ ، $ل(٥) = \text{هـ}ز$

$\therefore$ $ل$ متصل عند $س = ٥$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

عند النظرات :

$\lim_{س \to -1^+} م(س) = 10 + 20 = 30$ ، $م(-1) = 20$

$\therefore$ م متصل على يمين العدد -1

$\lim_{س \to 8^-} م(س) = 16 - 10 = 6$ ، $م(8) = 6$

$\therefore$ م متصل على يسار العدد 8

وعليه م متصل على الفترة $[-1, 8]$

٣) ع متصل على الفترة $(-\infty, 3)$ على صورة اقتران نسبي معرّف على مجاله

ع متصل على الفترة $(3, \infty)$ على صورة اقتران كثير حدود.

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^+} ع(س) = 8$ ، $\lim_{س \to 3^-} ع(س) = \lim_{س \to 3^-} \frac{س^3 - 27}{س - 3} =$

$= \lim_{س \to 3^-} \frac{(س - 3)(س^2 + 3س + 9)}{(س - 3)}$

$= 27$

بما أن $\lim_{س \to 3^+} ع(س) \neq \lim_{س \to 3^-} ع(س)$ $\therefore$ ع غير متصل عند $س = 3$

وعليه ع متصل على $ح - \{3\}$

٤) ل متصل على الفترة $(-\infty, 4)$ حيث تربيعي معرّف

ل متصل على الفترة $(4, \infty)$ متصل (فيه معادلة)

عند نقطة التحوّل $س = 4$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

$\lim_{س \to ٤^-} ل(س) = \lim_{س \to ٤^+} ل(س) = ل(٤)$

$\therefore$ ل متصل عند س = ٤

ومنه ل متصل على الفترة $(-\infty, \infty)$

٥) $\lim_{س \to ٤^-} ع(س) = ٨$ ، $ع(٤) = ٤$

$\therefore$ ع غير متصل عند س = ٤ من جهة اليسار

$\lim_{س \to ٣^+} ع(س) = ٨$ ، $ع(٣) = ٥$

$\therefore$ ع غير متصل عند س = ٣ من جهة اليمين

ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$ على جملة كثير حدود من الدرجة الصفرية

ومنه ع متصل على الفترة $(٤, ١٣)$

٦) م متصل على الفترة $(٣, ١٠)$ اقتران جزء معرّف على مجاله

بما الفترة $(٦, ١٣)$ يوجد نقطة تحوّل عند س = ٤

$\lim_{س \to ٤^+} م(س) = ٢$ ، $\lim_{س \to ٤^-} م(س) = ٢$

$\therefore$ م غير متصل عند س = ٤

عند الطرف

$\lim_{س \to ٠^+} م(س) = ٢$ ، $م(٠) = ١$

$\therefore$ م غير متصل على يمين العدد ٠

$\lim_{س \to ٦^-} م(س) = ٢$ ، $م(٦) = ٣$

$\therefore$ م متصل على يسار العدد ٦

ومنه م متصلة على الفترة $[٠, ٦] - \{٤\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والـ

٢) لحساب الاقتران ع متصل :

$$\text{نها}_{س \to ٢} ع(س) = ٧$$

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{س^{٣} + ٢(هـ-١)س - ٤هـ}{س-٢} = ٧$$

بما ان المقام معطى : $(س-٢)$ عامل من عوامل البسط

$$\text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س^{٣} + ٢(هـ-١)س - ٤هـ)}{س-٢} = \text{نها}_{س \to ٢} \frac{(س-٢)(س^{٢} + ٢س + ٢(هـ-١))}{(س-٢)} = ٧$$

$$٢٠ + ٢ + ٢(هـ-١) = ٧$$

$$٢(هـ-١) = ٣$$

$$هـ - ١ = \frac{٣}{٢} \Leftarrow \boxed{هـ = \frac{٥}{٢}}$$

٣) ع متصل على الفترة $(-\infty، ٢)$ ع لصورة كثير حدود .

ع متصل على الفترة $(٢، ٤)$ اقتران خطي

ع متصل على الفترة $(٤، ٥)$ اقتران نسبي معرف على مجاله .

عند $س = ٢$

$$\text{نها}_{س \to ٢^{-}} م(س) = ٤ \quad م(٢) = ٣ \quad \therefore م \text{ غير متصل عند } س = ٢$$

$$\text{نها}_{س \to ٤^{-}} م(س) = ٣ \quad ، \quad \text{نها}_{س \to ٤^{+}} م(س) = \frac{٢٠}{٢٦-١٦} = \frac{٢٠}{١٠} = ٢$$

$\therefore م$ غير متصل عند $س = ٤$

مدى $م$ متصل على $ح - \{٢، ٤\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٩) في الفترة $(-\infty, 1)$ $م$ متصل في جميع قيم $س$ حيث $س \neq -1$

في الفترة $(1, \infty)$ $م$ متصل (لجميع الدوال المتعددة متصلة)

نقطة التحول $س = 1$

$\lim_{س \to 1^+} م(س) = \lim_{س \to 1^+} (-2) = -2$

$\lim_{س \to 1^-} م(س) = \lim_{س \to 1^-} (س + 1) = 2$

$\therefore$ $م$ غير متصل عند $س = 1$

الرسم:

$م(س) = -2$ ، $س \leq 1$	$م(س) = س + 1$ ، $س > 1$
$م(1) = -2$	$م(2) = 2 + 1 = 3$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$م$ متصل على يسار العدد 1	$م$ متصل على يمين العدد 1

ومنه $م$ متصل على الفترة $[-\infty, 1] - \{1\}$.

١٠) يكون الاقتران التربيعي متصلاً لجميع الأعداد الحقيقية إذا كان المميز $ب^2 - 4أجـ < 0$.

$1 - 4 \times 9 \times 4 < 0$

$1 - 36 < 0 \Leftarrow 1 < 36$

ضم $أ$ التي تحقق المتباينة $أ > \frac{1}{36}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والـ

أسئلة الوحدة

١) أ) $\lim_{س \to ٠^+} ق(س) = ٢$

ب) $\lim_{س \to ٠^-} ق(س) = -٢$

ج) $\lim_{س \to ٣} ق(س) = ٢$

د) $\lim_{س \to ٤} ق(س) = ٤$

هـ) $ق = \{(٠,٢)\}$

و) $ب = \{(٠,٢)، (٤,٢)\}$

٢) اثبت أن $ق(س) = س^٢ + ١$ ، $س \to ١$ ، $ل \to ٣$

$\lim_{ل \to ٣} ق(ل) = \lim_{س \to ١} س^٢ + ٢ = ١٦ + ١ = ١٧$

٣) بما أن النهاية موجودة

$\therefore \lim_{س \to -٢^+} ه(س) = \lim_{س \to -٢^-} ه(س)$

$-١ = ٩د - ٤$

$٩د = ٣ \Leftarrow د = \frac{١}{٣}$

٤) حتى تكون النهاية موجودة : $(س-٢)$ عامل من عوامل البسط

$٤ + (م+٣) \times ٢ + م = ٠$

$٤ + ٢م + ٦ + م = ٠$

$٣م + ١٠ = ٠ \Leftarrow م = -١٠$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) بما أن $\lim_{س \to ٥} م(س)$ موجودة

$\therefore \lim_{س \to ٥^+} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} م(س)$

$\lim_{س \to ٥^+} \frac{س^٢ - ٤س - ٥}{|س - ٥|} = \lim_{س \to ٥^+} \frac{(س - ٥)(س + ١)}{(س - ٥)} = ٦$

$س^٢ - ٤س - ٥ \Leftarrow$

$س^٢ + ٤س + ٥$ $\quad$ $س^٢ - ٤س - ٥$

-١ $\quad$ ٥

$\lim_{س \to ٥^-} م(س) = \lim_{س \to ٥^-} ٢ جتا \frac{\pi}{٥} س + ب = ٦$

$= -٢ + ب = ٦ \Leftarrow \boxed{ب = ٨}$

٦) $\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{١ - جتا ٢س} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{(١ - ١ + ٢جا^٢ س)} = \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢ جا^٢ س}$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢ جا^٢ س} = \frac{١}{٢} \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جاس} \times \frac{س - جاس}{جاس}) = \frac{١}{٢} \times ١ \times$

$= ؟$

$\lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{س جاس} = \frac{١}{٢} \lim_{س \to ٠} \frac{س}{جاس} \times \frac{س - جاس}{س}$

$= \frac{١}{٢} - \frac{١}{٢} = ٠$

$\therefore \lim_{س \to ٠} \frac{س - جاس}{٢ جا^٢ س}$ غير م

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{س + \sin 2س}{3س} = \lim_{س \to 0} \left(\frac{س}{3س} + \frac{\sin 2س}{3س} \right)$

$= \lim_{س \to 0} \frac{س}{3س} + \lim_{س \to 0} \frac{\sin 2س}{3س} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

ج) $\lim_{س \to 1} \frac{1}{(1-س)} \left(\frac{1}{\sin س} - 1 \right) = \lim_{س \to 0} \frac{1}{1-س} \left[\frac{1 - \sin س}{\sin س} \right]$

$= \lim_{س \to 1} \frac{1}{(\sin س)(1+\sin س)} \cdot \frac{(1-\sin س)(1+\sin س)}{\sin س} = \frac{1}{2}$

د) $\lim_{س \to 2} \frac{س^2 - 3س}{1 - \sqrt{س-1}} = \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)}{س-2-\sqrt{س-1}}$ بالضرب بمرافق المقام

$= \lim_{س \to 2} س(س-3) \cdot \frac{س-1+\sqrt{س-1}}{س-1-\sqrt{س-1}} \times \frac{س-1+\sqrt{س-1}}{س-1+\sqrt{س-1}}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س-1+\sqrt{س-1}\right]}{(س-1)^2 - (\sqrt{س-1})^2}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س-1+\sqrt{س-1}\right]}{س^2 - 3س + 1 - س + 1}$

$= \lim_{س \to 2} \frac{س(س-3)\left[س-1+\sqrt{س-1}\right]}{س(س-3)}$

$= 4 = \frac{12}{3}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جتا}(س - \frac{\pi}{4})}{(س - \frac{\pi}{4})} \times \lim_{س \to \frac{\pi}{4}} \frac{\text{جا}(2س + \frac{\pi}{2})}{\text{جتا}(س - \frac{\pi}{4})}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\left(2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4}{2} = 2$$

ب) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{ظا}2س - 1}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جتا}2س - 1}{س^2 \text{جتا}2س} = \lim_{س \to 0} \frac{-(1 - \text{جتا}2س)}{س^2 \text{جتا}2س}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2\text{جا}^2 س}{س^2 \text{جتا}2س} = \lim_{س \to 0} \frac{1}{\text{جتا}2س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= 2$$

ج) $\lim_{هـ \to 0} \frac{\text{جتا}(\frac{\pi}{2} + هـ) - \frac{1}{2}}{هـ} = \lim_{هـ \to 0} \frac{-\text{جا}هـ - \frac{1}{2}}{هـ}$ (تعريف المشتقة)

$= \dot{ص}$ (جا س) عندما $س = \frac{\pi}{3}$

$= -\text{جتا}\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

د) $\lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}3س - \text{جا}5س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{-2\text{جا}س \text{جا}(-2س)}{س^2}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{2\text{جا}2س \text{جا}س}{س^2} = \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}2س}{س} \times \lim_{س \to 0} \frac{\text{جا}س}{س}$$

$$= 4$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٧) بالضرب على $س$ بجميع الحدود

$$\lim_{س \to \infty} \frac{\frac{ع س^{٢}}{س} - \frac{ط \جا ب س}{س}}{\frac{ب س}{س} - \frac{ط \جتا ب س}{س}} = \frac{١}{٤}$$

$$\frac{-ب}{ب - ٤} = \frac{١}{٤} \Leftarrow -٤ب = ب - ٤$$

$$-٥ب = -٤ \Leftarrow ب = \frac{٤}{٥}$$

٨) بما $\lim_{س \to ٠} ه(س) = \lim_{س \to ٠} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س + ٢}$ اكتب في الصورة المطلقة

$$\lim_{س \to ٠^{+}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س + ٢} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{س^{٢} - ٤}{س + ٢} = \lim_{س \to ٠^{+}} \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س + ٢} = -٤$$

$$\lim_{س \to ٠^{-}} \frac{|س^{٢} - ٤|}{س + ٢} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{٤ - س^{٢}}{س + ٢} = \lim_{س \to ٠^{-}} \frac{(٢ - س)(٢ + س)}{(س + ٢)} = ٤$$

$\therefore$ ه غير متصل عند $س = ٠$

٩) بما $\lim_{س \to ٢^{+}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{+}} [٥ و_{١} س + ٢] = ٤$

بما $\lim_{س \to ٢^{-}} ع(س) = \lim_{س \to ٢^{-}} |\frac{س^{٢}}{٢} - ١| = \frac{١}{٢}$

$\therefore$ بما $\lim_{س \to ٢} ع(س)$ غير موجود

وبما ع غير متصل عند $س = ٢$

١٠) بما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^{+}} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{+}} -٦ص - [س] = -٢$

بما $\lim_{س \to \frac{١}{٢}^{-}} ل(س) = \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{-}} \frac{٩س^{٢} - ١}{|١ - ٦س - ٢س^{٢}|} = \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{-}} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{|٢س - ١|(١ - ٣س)}$

$$= \lim_{س \to \frac{١}{٢}^{-}} \frac{(٣س - ١)(٣س + ١)}{(٢س - ١)(١ - ٣س)} = -(٢ \times \frac{١}{٢} + ١) = -٢$$

$\therefore$ ل متصل عند $س = \frac{١}{٢}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١١) ع(س) = $\sqrt{س+١}$ متصل على الفترة (٢،١) افترانا جبريا مع رسم
حيث ف على مجاله .

اجيب بما اتصال ع على سيا = العدد ٢

$\lim_{س \to ٢^-}$ ع(س) = $\lim_{س \to ٢^-}$ $\sqrt{س+١}$ = $\sqrt{٣}$

ه(٢) = $\sqrt{[٢]+٢}$ = $\sqrt{٤}$ = ٢

بما ان $\lim_{س \to ٢^-}$ ع(س) ≠ ه(٢) ∴ ع غير متصل على سيا = العدد ٢

وصلت ع متصل على الفترة (٢،١)

١٢) هـ متصل على الفترة (-∞،١) على مجموعة كثيرة حدود .

هـ متصل على الفترة (١،∞) لانه حاصل قسمة كثيرة حدود بافتراض
جبريا مقام لا يساوي الصفر مهما ا .

البحث في اتصاله هـ عند س = ١

$\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^+}$ س + ١ = ١ + ١ = ٢

$\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) = $\lim_{س \to ١^-}$ س^٢ = ١

بما ان $\lim_{س \to ١^+}$ هـ(س) ≠ $\lim_{س \to ١^-}$ هـ(س) ∴ هـ غير متصل عند س = ١

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٣) m متصل على الفترة $(-٢، -١)$ على الصورة اقتران لـ x معرّف على مجاله

اكتب قيمة الثابت m على الفترة $(-١، ١)$

بحيث تتلاشى النهاية عند $x = ٠$

m متصل على الفترة $(-١، ٠)$ على الصورة $x + ١$

m متصل على الفترة $(٠، ١)$ على الصورة $x - ١$

اكتب قيمة الثابت عند $x = ٠$

$$\lim_{x \to ٠^+} m(x) = \text{صفر} \quad , \quad \lim_{x \to ٠^-} m(x) = \lim_{x \to ٠^-} x - ١ = -١$$

$m(٠) = ٠$ ∴ m متصل عند $x = ٠$ ومنه m متصل على $(-١، ١)$

عند نقطة التشعب $x = -١$

$$\lim_{x \to -١^+} m(x) = \lim_{x \to -١^+} [x] = -١$$

$$\lim_{x \to -١^-} m(x) = \lim_{x \to -١^-} \frac{x^٢ - ١}{x + ١} = \lim_{x \to -١^-} (x - ١) = -٢$$

∴ m غير متصل عند $x = -١$

عند الطرف $x = -٢$

$$\lim_{x \to -٢^+} m(x) \stackrel{?}{=} m(-٢)$$

$$\lim_{x \to -٢^+} \frac{x^٣ + ١}{x + ٢} = \lim_{x \to -٢^+} \frac{(x + ١)(x - ١)}{(x + ١)} = -٣$$

$m(-٢) = -٣$

∴ m متصل عند $x = -٢$ من جهة اليمين

ومنه m متصل على الفترة $[-٢، ١) - \{-١\}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٤) $ل \times هـ = \begin{cases} 0 & ، س < 1 \\ \frac{س-1}{س+2} & ، 1 \le س < 2 \\ 1{,}5 & ، س = 2 \end{cases}$

$ل \times هـ$ متصل على الفترة $(1,0)$ لأنه كسر حدوده

$ل \times هـ$ متصل على الفترة $(2,1)$ لأنه اقتران نسبي مقامه مخالف للصفر

المشتبه بانفصاله عند نقط التحول

عند $س = 1$

$\text{نها}_{س \to 1^+} ل \times هـ = \text{صفر}$ ، $\text{نها}_{س \to 1^-} ل \times هـ = \text{صفر}$ ، $ل \times هـ(1) = 0$

$\therefore ل \times هـ$ متصل عند $س = 1$

عند الأطراف

$\text{نها}_{س \to 0^+} ل \times هـ = 0$ ، $ل \times هـ(0) = 0$ $\therefore ل \times هـ$ متصل لأنه يحتوي الصفر

$\text{نها}_{س \to 2^-} ل \times هـ = \text{نها}_{س \to 2^-} \frac{س-1}{س+2} = \frac{3}{4}$ ، $ل \times هـ(2) = 1{,}5$

بما أن $\text{نها}_{س \to 2^-} ل \times هـ \neq ل \times هـ(2)$ $\therefore ل \times هـ$ غير متصل عند $س = 2$

العدد ٢ وسط $ل \times هـ$ متصل على الفترة $[2,0]$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(١٥

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ج	ج	ب	ل	ج	د	ل	ج	ج	ب

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

الفصل الأول : متوسط التغير والمشتقات

أولاً : متوسط التغير

تدريب (١)

١) $\Delta س = ٣,٧ - ٤ = -٠,٣$

٢) $\Delta س = ن + ١ - ن = ١$

تدريب (٢)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٢,١) - هـ(٢)}{٢,١ - ٢} = \frac{٥ - (٢,١)^٢ - (٥ - ٢^٢)}{٠,١}$$

$$= \frac{٠,٤١}{٠,١} = ٤,١$$

تدريب (٣)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{هـ(٥) - هـ(٣)}{٥ - ٣} = \frac{-١ - ٠}{٢} = -\frac{١}{٢}$$

تدريب (٤)

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٤) - ف(١)}{٣} = \frac{٥٢ - ١٩}{٣} = \frac{٣٣}{٣} = ١١$$

تدريب (٥)

معدل التغير = $ظا ١٣٥^\circ = -١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\Delta ص = هـ(٤) - هـ(٣) = ١٢ - ٦ = ٦$

ب) $\Delta ص = هـ(٢ + هـ) - هـ(٢) = (٢ + هـ)^٢ - ١ + هـ) - (٢^٢ - ٢)$

$= ٤ + ٤ هـ + هـ^٢ - ٢ - هـ - ٤ + ٢ = هـ^٢ + ٣ هـ$

(٢) معدل التغير $= \frac{هـ(١ + هـ) - هـ(١)}{هـ} = \frac{(١ + هـ)^٣ - ٣ - (١ - ١)}{هـ}$

$= \frac{١ + هـ^٣ + ٣ هـ^٢ + ٣ هـ - ٣ - ١ + ٣}{هـ} = هـ^٢ + ٣ هـ + ٣$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(١٦)

تدريب (٦)

$$\frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{(١٢ - ص(٤) + ٢) - (٣ - ص(١) + ٢)}{٣}$$

$$= \frac{(١٢ + ٢ - ٣ - ٢) - (ص(٤) - ص(١))}{٣} = \frac{٩}{٣} - \frac{ص(٤) - ص(١)}{٣}$$

$$= ٣ - ٦ = -٣$$

(٤)

(٣) س = ٢ − ١٫٠ = ١٫٩

ص = ٥ − ٠٫٦ = ٤٫٤

النقطة (١٫٩ ، ٤٫٤)

(٤) نفرض طول ضلع المربع س وحدة ∴ م(س) = س²

معدّل التغير = $\frac{م(١٫١) - م(١)}{٠٫١} = \frac{٣٫٦٤١ - ٣٫٦}{٠٫١}$

$= \frac{٠٫٠٤١}{٠٫١} = ١٫٤١$ سم²

(٥) معدّل التغير = $\frac{م(٢) - م(-١)}{٢ - (-١)} = \frac{٤ \times ٣ - ٣م(٢) - (٤ \times ١ - ٣م(-١))}{٣}$

$= \frac{١٦ - ٤ - ٣(م(٢) - م(-١))}{٣} = \frac{١٢}{٣} - ٣ \times \frac{م(٢) - م(-١)}{٣}$

$= ٤ - ٣ \times ٥ = -١١$

(٦) أ) $\bar{ع} = \frac{ف(٥) - ف(٢)}{٥ - ٢} = \frac{٣٠٠ - ١٢٥ - (١٢٠ - ٢٠٠)}{٣}$

$= \frac{١٧٥ - ١٠٠}{٣} = \frac{٧٥}{٣} = ٢٥$

ب) $\bar{ع} = \frac{ف(٥ن) - ف(٠)}{٥ن} = \frac{٦٠ ٥ن - ٥(٥ن)^٢}{٥ن}$

$= \frac{٥٥ن(١٢ - ٥ن)}{٥ن} = ٥(١٢ - ٥ن)$

(٧) معدّل التغير = $\frac{ص(٤) - ص(١)}{٤ - ١} = \frac{م^٢(٤) - م^٢(١)}{٣}$

$= \frac{(م(٤) - م(١))(م(٤) + م(١))}{٣}$

$= \frac{م(٤) - م(١)}{٣} \times (م(٤) + م(١)) = ٣ \times ٢ = ٦$

(٣)

٨) $\frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٩-٥} = ١٤$ ، $هـ(٩)-هـ(٥) = ٥٦$

$\frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٥-٢} = ٧$ ، $هـ(٥)-هـ(٢) = ٢١$

معدل التغير $= \frac{هـ(٩)-هـ(٢)}{٩-٢} = \frac{هـ(٩)-هـ(٥)+هـ(٥)-هـ(٢)}{٧}$

$= \frac{هـ(٩)-هـ(٥)}{٧} + \frac{هـ(٥)-هـ(٢)}{٧} = \frac{٥٦}{٧} + \frac{٢١}{٧} = ١١$

٩) معدل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = ظا\frac{٣}{٤}\pi$

$هـ(٤)-هـ(١) = -١$ ، $هـ(١) = ٥$

١٠) معدل التغير $= \frac{هـ(٤)-هـ(١)}{٤-١} = \frac{[٤+١]-١٠-١٣}{٣}$

$= \frac{٥-١}{٣} = \frac{٤}{٣}$

١١) $هـ(س) = \frac{١}{س^٢+س}$ ، $س \neq ٠$

مقدار التغير $= هـ(س_٢)-هـ(١) = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} - \frac{١}{٢} = -\frac{١}{٣}$

$\frac{١}{س_٢^٢+س_٢} = \frac{١}{٦}$ ، $س_٢^٢+س_٢ = ٦$

$س_٢^٢+س_٢-٦ = ٠$ ، $(س_٢+٣)(س_٢-٢) = ٠$

إذن $س_٢ = ٢$ ، -٣ يرفض

١٢) ميل $\overleftrightarrow{أب} = \frac{١٠-٢}{٥-١} = ٢$

ميل العمودي $= -\frac{١}{٢}$

ثانياً: المشتقات الأولى

التدريبات

(١) أ) $\text{ه}'(-١) = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ه}(-١+\text{هـ}) - \text{ه}(-١)}{\text{هـ}} = \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{(-١+\text{هـ})^{٣} + ٢(-١+\text{هـ}) - (-٣)}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}^{٣} - ٣\text{هـ}^{٢} + ٣\text{هـ} - ١ - ٢ + ٢\text{هـ} + ٣}{\text{هـ}}$

$= \lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{هـ}(\text{هـ}^{٢} - ٣\text{هـ} + ٥)}{\text{هـ}} = ٥$

ب) نفرض $٥\text{هـ} = \text{ل}$ ومنه $\text{هـ} = \frac{\text{ل}}{٥}$ ، $\text{ل} \to ٠$ عندما $\text{هـ} \to ٠$.

$\lim_{\text{هـ} \to ٠} \frac{\text{ه}(٠) - \text{ه}(٥\text{هـ})}{٣\text{هـ}} = \lim_{\text{ل} \to ٠} \frac{\text{ه}(٠) - \text{ه}(\text{ل})}{\frac{\text{ل}}{٥}}$

$= -٥ \lim_{\text{ل} \to ٠} \frac{\text{ه}(\text{ل}) - \text{ه}(٠)}{\text{ل}} = -٥\,\text{ه}'(٠) = -٣٠$

(٢) $\text{ه}'(٢) = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{ه}(\text{س}) - \text{ه}(٢)}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+١} - \frac{٢}{٣}}{\text{س} - ٢}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\frac{٣\text{س} - ٢(\text{س}+١)}{٣(\text{س}+١)}}{\text{س} - ٢} = \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{٣\text{س} - ٢\text{س} - ٢}{٣(\text{س}+١)(\text{س} - ٢)}$

$= \lim_{\text{س} \to ٢} \frac{\text{س} - ٢}{٣(\text{س}+١)(\text{س} - ٢)} = \frac{١}{٩}$

(٣) $\text{ه}'(-١) = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{\text{ه}(\text{س}) - \text{ه}(-١)}{\text{س} - (-١)} = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{٤\text{س} + ١ - (-٣)}{\text{س} + ١}$

$= \lim_{\text{س} \to -١} \frac{٤\text{س} + ٤}{\text{س} + ١} = \lim_{\text{س} \to -١} \frac{٤(\text{س}+١)}{\text{س} + ١} = ٤$

$\text{س} = ١$ نقطة تضرع

$\text{ه}'(١) = \lim_{\text{س} \to ١} \frac{\text{ه}(\text{س}) - \text{ه}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٤\text{س} + ١ - ٥}{\text{س} - ١}$

$= \lim_{\text{س} \to ١} \frac{٤(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٤$

$\text{ه}'_{+}(١) = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{\text{ه}(\text{س}) - \text{ه}(١)}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢\text{س} + ٣ - ٥}{\text{س} - ١} = \lim_{\text{س} \to ١^{+}} \frac{٢(\text{س} - ١)}{\text{س} - ١} = ٢$

$\text{ه}'(١)$ غير موجودة لأن $\text{ه}'(١) \neq \text{ه}'_{+}(١)$

(٤)

تدريب (٥)

نفرض طول ضلع المربع س وحدات ، م(س)

فيكون م(س) = س^{٢}

$$م'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{م(ع) - م(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^{٢} - س^{٢}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} (ع + س) = ٢س$$

م'(٥) = ٢ × ٥ = ١٠ وحدة مربعة

(٤) تدريب (٤) $\text{ق}(س) = س^3 + 7س^2 - 5س + 1$

$$\text{ق}'(س) = \lim_{س \to 2} \frac{\text{ق}(س) - \text{ق}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2} \frac{س^3 + 7س^2 - 5س + 1 - 25}{س - 2}$$

$$= \lim_{س \to 2} \frac{(س - 2)(س^2 + 9س + 13)}{س - 2} = \lim_{س \to 2} (س^2 + 9س + 13)$$

$$= 4 + 18 + 13 = 35$$

تمارين وحسائل

(١) أ) $\text{ق}(3) = \lim_{ه \to 0} \frac{\text{ق}(3 + ه) - \text{ق}(3)}{ه} = \lim_{ه \to 0} \frac{-8 - (-5 + 3ه)^2}{ه}$

$$= \lim_{ه \to 0} \frac{-8 - 25 - 30ه - 9ه^2}{ه} = \lim_{ه \to 0} \frac{-33 - 30ه - 9ه^2}{ه} = -\infty$$

ب) $\text{ق}(-1) = \lim_{ه \to 0} \frac{\text{ق}(-1 + ه) - \text{ق}(-1)}{ه} = \lim_{ه \to 0} \frac{(-1 + ه)^3 + (-1 + ه)^2 - 0}{ه}$

$$= \lim_{ه \to 0} \frac{ه^3 - 3ه^2 + 3ه - 1 + 1 - 2ه + ه^2}{ه} = \lim_{ه \to 0} \frac{ه^3 - 2ه^2 + ه}{ه}$$

$$= \lim_{ه \to 0} \frac{ه(ه^2 - 2ه + 1)}{ه} = 1$$

ج) $\text{ل}'(0) = \lim_{س \to 0} \frac{\text{ل}(س) - \text{ل}(0)}{س - 0} = \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 1} - 1}{س}$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{\sqrt{س + 1} - 1}{س} \times \frac{\sqrt{س + 1} + 1}{\sqrt{س + 1} + 1} = \lim_{س \to 0} \frac{س + 1 - 1}{س(\sqrt{س + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{س \to 0} \frac{1}{\sqrt{س + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

(٥)

ج) $\text{هـ}(٠)$ ، $\text{هـ}(٦)$ غير موجودة لأن هـ ليست $\leftarrow$ ، $\leftarrow$ طرفي فترة.

$\leftarrow = ٣$ نقطة تفرع

$$\text{هـ}'(٣) = \lim_{\leftarrow \to ٣} \frac{\text{هـ}(\leftarrow) - \text{هـ}(٣)}{\leftarrow - ٣} = \lim_{\leftarrow \to ٣} \frac{\leftarrow^٢ - \leftarrow - ٦}{\leftarrow - ٣}$$

$$= \lim_{\leftarrow \to ٣} \frac{(\leftarrow - ٣)(\leftarrow + ٢)}{\leftarrow - ٣} = ٥$$

$$\text{هـ}'_+(٣) = \lim_{\leftarrow \to ٣^+} \frac{\text{هـ}(\leftarrow) - \text{هـ}(٣)}{\leftarrow - ٣} = \lim_{\leftarrow \to ٣^+} \frac{٥\leftarrow - ٩ - ٦}{\leftarrow - ٣}$$

$$= \lim_{\leftarrow \to ٣^+} \frac{٥(\leftarrow - ٣)}{\leftarrow - ٣} = ٥$$

$\text{هـ}(٣) = ٥$ لأن $\text{هـ}'_+(٣) = \text{هـ}'(٣) = ٥$

د) نعيد تعريف $\text{هـ}(\leftarrow)$

$$\text{هـ}(\leftarrow) = \begin{cases} \leftarrow^٢ - ٤ & \leftarrow < -٢ \\ ٤ - \leftarrow^٢ & -٢ \leq \leftarrow \leq ٢ \\ \leftarrow^٢ - ٤ & \leftarrow > ٢ \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(١) = \lim_{\leftarrow \to ١} \frac{\text{هـ}(\leftarrow) - \text{هـ}(١)}{\leftarrow - ١} = \lim_{\leftarrow \to ١} \frac{٤ - \leftarrow^٢ - ٣}{\leftarrow - ١}$$

$$= \lim_{\leftarrow \to ١} \frac{-(\leftarrow^٢ - ١)}{\leftarrow - ١} = \lim_{\leftarrow \to ١} \frac{-(\leftarrow - ١)(\leftarrow + ١)}{\leftarrow - ١} = -٢$$

$\leftarrow = ٢$ نقطة تفرع

$$\text{هـ}'_-(٢) = \lim_{\leftarrow \to ٢^-} \frac{\text{هـ}(\leftarrow) - \text{هـ}(٢)}{\leftarrow - ٢} = \lim_{\leftarrow \to ٢^-} \frac{٤ - \leftarrow^٢ - ٠}{٢ - \leftarrow}$$

$$= \lim_{\leftarrow \to ٢^-} \frac{(٢ - \leftarrow)(٢ + \leftarrow)}{٢ - \leftarrow} = \lim_{\leftarrow \to ٢^-} -(٢ + \leftarrow) = -٤$$

$$\text{هـ}'_+(٢) = \lim_{\leftarrow \to ٢^+} \frac{\leftarrow^٢ - ٤ - ٠}{\leftarrow - ٢} = \lim_{\leftarrow \to ٢^+} \frac{(\leftarrow - ٢)(\leftarrow + ٢)}{\leftarrow - ٢} = ٤$$

$\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'_+(٢) \neq \text{هـ}'_-(٢)$

و) $\text{هـ}(-١) = \lim_{\leftarrow \to -١} \frac{\text{هـ}(\leftarrow) - \text{هـ}(-١)}{\leftarrow + ١} = \lim_{\leftarrow \to -١^+} \frac{\frac{\leftarrow^٢ + ٣\leftarrow + ٢}{\leftarrow + ٣} + ٠}{\leftarrow + ١}$

$$= \lim_{\leftarrow \to -١} \frac{(\leftarrow + ١)(\leftarrow + ٢)}{(\leftarrow + ٣)(\leftarrow + ١)} = \frac{١}{٢}$$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(٦)

ج) $\lim_{س \to ٥} \frac{م(س) - م(٥)}{س - ٥} = م'(٥) = ٣$

$$\lim_{س \to ٥} \frac{س^٣ - ٤س^٢ + ٣س - ٤}{س - ٥}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س^٢ + ٣)(س - ٥) - (س - ٥)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{س - ٥}{س - ٥}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ٣ - ١}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{س^٢ + ٢}{س - ٥}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٥) + ٣(س - ٥)}{(س - ٥)(س + ٥)} = \lim_{س \to ٥} \frac{(س - ٥)(س + ٨)}{(س - ٥)(س + ٥)}$$

$$= \frac{١٣}{١٠}$$

د) $م'(س) = \lim_{س \to ٤} \frac{م(س) - م(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{٩}}{س - ٤}$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{\sqrt{٢س + ١} - \sqrt{٩}}{س - ٤} \times \frac{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{٩}}{\sqrt{٢س + ١} + \sqrt{٩}}$$

$$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(٢)}{(س - ٤)(\sqrt{٢س + ١} + ٣)} = \lim_{س \to ٤} \frac{٢}{\sqrt{٢س + ١} + ٣}$$

$$= \frac{١}{٣}$$

(٣) أ) $\lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س - هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س) + م(س) - م(س - هـ)}{هـ}$

$$= \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س + هـ) - م(س)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{م(س) - م(س - هـ)}{هـ}$$

بفرض $ص = -هـ$

$$= م'(س) + \lim_{ص \to ٠} \frac{م(س + ص) - م(س)}{-ص} = م'(س) + م'(س)$$

$$= ٢م'(س)$$

ب) $\lim_{س \to ٥} \frac{٣م(س) - س م(٥)}{س - ٥} = \lim_{س \to ٥} \frac{٣م(س) + ٣م(٥) - ٣م(٥) - س م(٥)}{س - ٥}$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣م(س) - ٣م(٥)}{س - ٥} + \lim_{س \to ٥} \frac{٣م(٥) - س م(٥)}{س - ٥}$$

$$= \lim_{س \to ٥} \frac{٣(م(س) - م(٥))}{س - ٥} - \lim_{س \to ٥} \frac{م(٥)(س - ٥)}{س - ٥}$$

$$= ٣م'(٥) - م(٥)$$

(٦)

السؤال (٢)

ه) $\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع^3 - س^3}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع^2 + ع س + س^2)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} (ع^2 + ع س + س^2) = ٣ س^2$

و) $\frac{د ص}{د س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\text{ق}(ع) - \text{ق}(س)}{ع - س} = \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{ع} - \sqrt[3]{س}}{ع - س}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{\sqrt[3]{ع} - \sqrt[3]{س}}{ع - س} \times \frac{\sqrt[3]{ع^2} + \sqrt[3]{ع}\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^2}}{\sqrt[3]{ع^2} + \sqrt[3]{ع}\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^2}}$

$= \text{نها}_{ع \to س} \frac{ع - س}{(ع - س)(\sqrt[3]{ع^2} + \sqrt[3]{ع}\sqrt[3]{س} + \sqrt[3]{س^2})} = \frac{١}{٣ \sqrt[3]{س^2}}$

(٧) $\lim_{س \to ٤} \frac{٢ ع(س) - ٣ س ن(س) - ع ن(٤) - ٤ ن(س) + ٤ ن(س)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{٢ ع(س) - ٣ س ن(س) - ع ن(٤) - ن(س) + ٤ ن(س)}{س - ٤}$

$= ٣ \lim_{س \to ٤} \frac{ع(ن(س) - ن(٤))}{س - ٤} + ٢ \lim_{س \to ٤} \frac{ن(س)(س - ٤)}{س - ٤}$

$= ٣ س ن'(س) + ٢ ن(س)$

$\lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٥ - ٢هـ) - ن(٥ + ٤هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٥) + ن(٥ - ٢هـ) - ن(٥ + ٤هـ) - ن(٥)}{هـ}$

$= - \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٥ + ٤هـ) - ن(٥)}{هـ} + \lim_{هـ \to ٠} \frac{ن(٥ - ٢هـ) - ن(٥)}{هـ}$

نفرض $٤هـ = م$ ومنه $هـ = \frac{م}{٤}$ نفرض $-٢هـ = ل$ ومنه $هـ = -\frac{ل}{٢}$

$= - \lim_{م \to ٠} \frac{ن(٥ + م) - ن(٥)}{\frac{م}{٤}} + \lim_{ل \to ٠} \frac{ن(٥ + ل) - ن(٥)}{-\frac{ل}{٢}}$

$= -٤ \lim_{م \to ٠} \frac{ن(٥ + م) - ن(٥)}{م} - ٢ \lim_{ل \to ٠} \frac{ن(٥ + ل) - ن(٥)}{ل}$

$= -٤ ن'(٥) - ٢ ن'(٥) = -٦ ن'(٥) = -٦ \times ٣$

(٥) $ن'(٩) = \lim_{س \to ٩} \frac{ن(س) - ن(٩)}{س - ٩} = \lim_{س \to ٩} \frac{(س - ٩) ل(س) - ٠}{س - ٩}$

$= \lim_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{س - ٩} \times \lim_{س \to ٩} ل(س) = ل(٩)$

(٦) نفرض طول نصف القطر $(نق)$ للدائرة $(ع)$

فيكون محيط $ع = ٢ \pi نق + ٢$

$م(نق) = ٢ \pi نق \times ٢ \pi نق (نق + ٢)$

$= ٢ \pi نق^٢ + ٤ \pi نق$

$م'(٦) = \lim_{نق \to ٦} \frac{م(نق) - م(٦)}{نق - ٦} = \lim_{نق \to ٦} \frac{٢ \pi نق^٢ + ٤ \pi نق - ٩٦ \pi}{نق - ٦}$

$= ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{نق^٢ + ٢نق - ٤٨}{نق - ٦} = ٢ \pi \lim_{نق \to ٦} \frac{(نق - ٦)(نق + ٨)}{نق - ٦} = ٢٨ \pi$

(٧) $ن'(س) = \lim_{هـ \to ٠} \frac{٦ - ٤هـ - ٣ س هـ}{هـ} = \lim_{هـ \to ٠} (٦ - ٤ - ٣ س هـ) = ٦ - ٣ س$

$ن'(-٢) = ٦ - (-٢)^٢ = ٤ > ٠$

(٧)

(٨) نفرض طول ضلع المكعب ل وحدة فيكون $ح(ل) = ل^3$

$$قـ(ج) = \lim_{ل \to ج} \frac{ح(ل) - ح(ج)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} \frac{ل^3 - ٨}{ل - ج}$$

$$= \lim_{ل \to ج} \frac{(ل - ج)(ل^2 + ج ل + ج^2)}{ل - ج} = \lim_{ل \to ج} (ل^2 + ج ل + ج^2) = ١٢$$

(٩) نفرض طول نصف قطر الكرة نق وحدة ، $ح(نق) = \frac{٤}{٣} \pi نق^3$

$$ح'(نق) = \lim_{ع \to نق} \frac{ح(ع) - ح(نق)}{ع - نق} = \lim_{ع \to نق} \frac{\frac{٤}{٣}\pi ع^3 - \frac{٤}{٣}\pi نق^3}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} \frac{ع^3 - نق^3}{ع - نق} = \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} \frac{(ع - نق)(ع^2 + نق ع + نق^2)}{ع - نق}$$

$$= \frac{٤}{٣}\pi \lim_{ع \to نق} (ع^2 + نق ع + نق^2) = \frac{٤}{٣}\pi \times ٣ نق^2 = ٤ \pi نق^2$$

ثالثاً : الاتصال والاشتقاقية

التدريبات

(١) ١) س = ٢ نقطة تفرّع

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (\frac{٤}{س} + ١) = ٣$ ، $\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} (٥س - ١) = ٩$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة لأن $\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) \neq \lim_{س \to ٢^-} هـ(س)$

إذن هـ غير متصل عند س = ٢

٢) $هـ'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\frac{٤}{س} + ١ - ٣}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^+} \frac{٤ - ٢س}{س(س - ٢)} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{-٢(س - ٢)}{س(س - ٢)} = -١$

$هـ'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{هـ(س) - هـ(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١ - ٩}{س - ٢}$

$= \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥س - ١٠}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{٥(س - ٢)}{س - ٢} = ٥$

هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ لأن $هـ'_+(٢) \neq هـ'_-(٢)$

(٢) بما أن الاتصال عند س = ٢ لأنها نقطة تفرّع .

$\lim_{س \to ٢^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^+} (س^٢ - ١) = ٣$

$\lim_{س \to ٢^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٢^-} \sqrt{س + ١} = \sqrt{٣}$

$\lim_{س \to ٢} هـ(س)$ غير موجودة وعليه هـ غير متصل عند س = ٢

إذن هـ غير قابل للاشتقاق عند س = ٢ حسب النظرية

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} \frac{س^٢ - ١ - ١٥}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤} \frac{(س - ٤)(س + ٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤} (س + ٤) = ٨$

تمارين ومسائل

(١) أ) هـ غير قابل للاشتقاق عند $س = ١$ لأن هـ غير متصل عند $س = ١$

ب) نبحث الاتصال لـ هـ عند $س = ٢$

$\lim_{س \to ٢^+} \text{هـ}(س) = ٠$ ، $\lim_{س \to ٢^-} \text{هـ}(س) = ٠$ ، إذن $\lim_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = ٠$

$\text{هـ}(٢) = $ صفر . هـ متصل عند $س = ٢$ لأن $\lim_{س \to ٢} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(٢)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} س - ٢ & \text{إذا } س < ٢ \\ ٠ & \text{إذا } ٢ \le س \le ٣ \\ ٢(س - ٣) & \text{إذا } س > ٣ \end{cases}$$

$$\text{هـ}'_+(٢) = \lim_{س \to ٢^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^+} \frac{٠ - ٠}{س - ٢} = ٠$$

$$\text{هـ}'_-(٢) = \lim_{س \to ٢^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(٢)}{س - ٢} = \lim_{س \to ٢^-} \frac{س - ٢}{س - ٢} = ١$$

$\text{هـ}'(٢)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}'_+(٢) \neq \text{هـ}'_-(٢)$

ج) نعيد تعريف $ل(س)$

$ل$ غير $\text{هـ}(س)$ هي قاعدة تزيد كل قيمة لـ $س$ بمقدار $\frac{١}{٤}$ وحدة.

$$ل(س) = \begin{cases} ٥ & \text{إذا } س = -١ \\ ٤ & \text{إذا } -١ < س \le -\frac{١}{٢} \\ ٣ & \text{إذا } -\frac{١}{٢} < س \le ٠ \\ ٢ & \text{إذا } ٠ < س \le \frac{١}{٢} \end{cases}$$

$$\text{هـ}'(\tfrac{١}{٤}) = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(\frac{١}{٤})}{س - \frac{١}{٤}} = \lim_{س \to \frac{١}{٤}} \frac{٢ - ٢}{س - \frac{١}{٤}} = ٠$$

$س = -١$ فقط تضرب . نبحث الاتصال عند $س = -١$

$\lim_{س \to -١^-} ل(س) = ٥$ ، $\lim_{س \to -١^+} ل(س) = ٤$

$\lim_{س \to -١} \text{هـ}(س)$ غير موجودة وعليه $ل$ غير متصل عند $س = -١$

$ل$ غير قابل للاشتقاق عند $س = -١$ لأنه غير متصل عند هذه النقطة

(١٠)

(أ) $هـ$ غير قابل للاشتقاق عند $س = ٠$ ، $س = ٥$ نهايتا طرفا فترة.

$س = ٣$ نقطة تفرع

$$\text{نها}_{س \to ٣^+} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ٣^+} (٦س - ٣) = ١٥$$

$$\text{نها}_{س \to ٣^-} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ٣^-} (س^٢ + ٦س) = ١٥$$

$$\text{نها}_{س \to ٣} هـ(س) = ١٥ \ ، \ هـ(٣) = ١٥ \ ، \ إذن \ هـ \ متصل \ عند \ س = ٣$$

$$هـ'_+(٣) = \text{نها}_{س \to ٣^+} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \text{نها}_{س \to ٣^+} \frac{٦س - ١٥}{س - ٣} = \text{نها}_{س \to ٣^+} \frac{٦(س - ٣)}{س - ٣} = ٦$$

$$هـ'_-(٣) = \text{نها}_{س \to ٣^-} \frac{هـ(س) - هـ(٣)}{س - ٣} = \text{نها}_{س \to ٣^-} \frac{س^٢ + ٦س - ١٥}{س - ٣}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٣^-} \frac{(س + ٥)(س - ٣)}{س - ٣} = ٨$$

$هـ'(٣)$ غير موجودة لأن $هـ'_+(٣) \neq هـ'_-(٣)$

(ب) بما أن $هـ$ متصل عند $س = ٩$

$$\text{نها}_{س \to ٩} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)}{\sqrt{س} - ٣} = ٦$$

$هـ(٩) = ٦$ ، $هـ$ متصل عند $س = ٩$ لأن $\text{نها}_{س \to ٩} هـ(س) = هـ(٩) = ٦$

$$هـ'(٩) = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{هـ(س) - هـ(٩)}{س - ٩} = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{\frac{س - ٩}{\sqrt{س} - ٣} - ٦}{س - ٩} = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{س - ٩ - ٦(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} - ٣)(س - ٩)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٩} \frac{س - ٦\sqrt{س} + ٩}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)(س - ٩)} = \text{نها}_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)^٢}{(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ٣)(س - ٩)}$$

$$= \text{نها}_{س \to ٩} \frac{(\sqrt{س} - ٣)}{(\sqrt{س} + ٣)(س - ٩)} = \frac{١}{٦}$$

(ج) $هـ$ متصل عند $س = ١$ لأن $هـ(١)$ موجودة

$$\text{نها}_{س \to ١^-} هـ(س) = \text{نها}_{س \to ١^+} هـ(س)$$

$$\text{نها}_{س \to ١^-} س^٢ = \text{نها}_{س \to ١^+} (ب + جـ)$$

$$١ = ب + جـ \quad ، \quad ب = -١$$

(٤) عندما $س = -١$

د متصل لجميع قيم $س \neq -١$ لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-١ - ٢ع - (-١ - ٢س)}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{-٢ع + ٢س}{ع - س} = -٢ \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = -٢$$

عندما $-١ < س < ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع^٢ - س^٢}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{(ع - س)(ع + س)}{ع - س} = ٢س$$

عندما $س > ١$ ، د متصل لأنه كثير حدود

$$د'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{د(ع) - د(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = ١$$

$س = -١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to -١^+} د(س) = \lim_{س \to -١^+} س^٢ = ١$$

$$\lim_{س \to -١^-} د(س) = \lim_{س \to -١^-} (-١ - ٢س) = ١$$

$\lim_{س \to -١} د(س) = ١ = د(-١)$ ، د متصل عند $س = -١$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^-} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^-} \frac{-١ - ٢س - ١}{س + ١}$$

$$= \lim_{س \to -١^-} \frac{-٢(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$$د'(-١) = \lim_{س \to -١^+} \frac{د(س) - د(-١)}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{س^٢ - ١}{س + ١} = \lim_{س \to -١^+} \frac{(س - ١)(س + ١)}{س + ١} = -٢$$

$د'(-١) = -٢$

$س = ١$ نقطة تفرع

$$\lim_{س \to ١^-} د(س) = \lim_{س \to ١^-} س^٢ = ١ \quad , \quad \lim_{س \to ١^+} د(س) = \lim_{س \to ١^+} س = ١$$

$\lim_{س \to ١} د(س) = د(١) = ١$ ، د متصل عند $س = ١$

(٤)

$$\text{هـ}_-'(1) = \lim_{س \to 1^-} \frac{س^2 - 1}{س - 1} = \lim_{س \to 1^-} \frac{(س-1)(س+1)}{س-1} = 2$$

$$\text{هـ}_+'(1) = \lim_{س \to 1^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(1)}{س - 1} = \lim_{س \to 1^+} \frac{س - 1}{س - 1} = 1$$

$\text{هـ}'(1)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_-'(1) \neq \text{هـ}_+'(1)$

$$\text{هـ}(س) = \begin{cases} 2س & س < 1 \\ \text{غير معرفة} & س = 1 \\ 1 & س > 1 \end{cases}$$

(٥) نبحث اتصال هـ عند $س = 2$

$$\lim_{س \to 2^+} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^+} (2س - س^2) = 0$$

$$\lim_{س \to 2^-} \text{هـ}(س) = \lim_{س \to 2^-} (س^2 - 2س) = 0$$

$$\lim_{س \to 2} \text{هـ}(س) = \text{هـ}(2) = 0$$ ، هـ متصل عند $س = 2$

$$\text{هـ}_+'(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2س - س^2}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{س(2-س)}{-(2-س)} = -2$$

$$\text{هـ}_-'(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{\text{هـ}(س) - \text{هـ}(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س^2 - 2س}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{س(س-2)}{س-2} = 2$$

$\text{هـ}'(2)$ غير موجودة لأن $\text{هـ}_+'(2) \neq \text{هـ}_-'(2)$

(٦) عندما $س \to 0$ ، هـ متصل لأنه ثابت

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{0}{ع - س} = \text{صفر}$$

عندما $س \to 4$ ، $\text{هـ}(س) = 5 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{5 - ع - (5 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{-(ع - س)}{ع - س} = -1$$

عندما $س > 4$ ، $\text{هـ}(س)$ متصل ناطرا عند $س = 5$ لأنه أقترانا نسبيا

$$\text{هـ}'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{\text{هـ}(ع) - \text{هـ}(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{\frac{1}{5 - ع} - \frac{1}{5 - س}}{ع - س}$$

$$= \lim_{ع \to س} \frac{5 - س - (5 - ع)}{(5 - ع)(5 - س)(ع - س)} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{(5 - ع)(5 - س)(ع - س)} = \frac{1}{(5 - س)^2}$$

نبحث الاتصال عند نقاط الشعب

عند $س = ٠$

$\lim_{س \to ٠^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^+} (٥ - س) = ٥$

$\lim_{س \to ٠^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٠^-} صفر = صفر$

$\lim_{س \to ٠} هـ(س)$ غير موجودة وعليه $هـ$ غير متصل عند $س = ٠$.

إذن $هـ(٠)$ غير موجودة.

$س = ٤$

$\lim_{س \to ٤^+} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{١}{٥ - س} = ١$ ، $\lim_{س \to ٤^-} هـ(س) = \lim_{س \to ٤^-} (٥ - س) = ١$

$\lim_{س \to ٤} هـ(س) = ١$ ، $هـ(٤) = ١$. $هـ$ متصل عند $س = ٤$

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤^+} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{\frac{١}{٥ - س} - ١}{س - ٤}$

$= \lim_{س \to ٤^+} \frac{١ - (٥ - س)}{(٥ - س)(س - ٤)} = \lim_{س \to ٤^+} \frac{س - ٤}{(٥ - س)(س - ٤)} = ١$

$هـ'(٤) = \lim_{س \to ٤^-} \frac{هـ(س) - هـ(٤)}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٥ - س - ١}{س - ٤} = \lim_{س \to ٤^-} \frac{٤ - س}{س - ٤} = -١$

إذن $هـ(٤)$ غير موجودة. مما سبق

$هـ(س) = \begin{cases} ٠ & س \leq ٠ \\ ١ & ٠ < س < ٤ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ ، ٤ ، ٥ \\ \frac{١}{(٥ - س)^٢} & س > ٤ \end{cases}$

(٧) $هـ(س) = \begin{cases} ١ & ١ \leq س < ٢ \\ ٢ - س & ٢ \leq س \leq ٣ \\ س - ٣ & ٣ < س \leq ٤ \end{cases}$

$هـ(١)$ ، $هـ(٤)$ غير موجودة لأن $س = ١$ ، $س = ٤$ طرفي فترة

عندما $س \in]٢ ، ٣[$ ، $هـ(س)$ متصل لأن اقتران ثابت

$هـ(س) = \lim_{ع \to س} \frac{هـ(ع) - هـ(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{١ - ١}{ع - س} = ٠$

(١٤)

عندما $1 < س < 3$ ، $ق(س) = 2 - س$ متصل لأنه كثير حدود

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{2 - ع - (2 - س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{س - ع}{ع - س} = -1$$

عندما $3 < س < 4$

$ق(س) = س - 3$ متصل لأنه كثير حدود

$$ق'(س) = \lim_{ع \to س} \frac{ق(ع) - ق(س)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - 3 - (س - 3)}{ع - س} = \lim_{ع \to س} \frac{ع - س}{ع - س} = 1$$

نقاط التفرع، $س = 2$

$\lim_{س \to 2^-} ق(س) = 1$ ، $\lim_{س \to 2^+} ق(س) = \lim_{س \to 2^+} (2 - س) = 1$

$\lim_{س \to 2} ق(س) = 1 = ق(2)$ ، $ق$ متصل عند $س = 2$

$$ق'_+(2) = \lim_{س \to 2^+} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^+} \frac{2 - س - 1}{س - 2} = -1$$

$$ق'_-(2) = \lim_{س \to 2^-} \frac{ق(س) - ق(2)}{س - 2} = \lim_{س \to 2^-} \frac{1 - 1}{س - 2} = \text{صفر}$$

$ق'(2)$ غير موجود لأن $ق'_+(2) \neq ق'_-(2)$

عند $س = 3$

$\lim_{س \to 3^-} ق(س) = \lim_{س \to 3^-} (2 - س) = -1$ ، $\lim_{س \to 3^+} ق(س) = \lim_{س \to 3^+} (س - 3) = 0$

$\lim_{س \to 3} ق(س) = -1$ ، $ق(3) = 0$ ، $ق$ غير متصل عند $س = 3$

$$ق'_+(3) = \lim_{س \to 3^+} \frac{ق(س) - ق(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^+} \frac{س - 3 - 0}{س - 3} = 1$$

$$ق'_-(3) = \lim_{س \to 3^-} \frac{ق(س) - ق(3)}{س - 3} = \lim_{س \to 3^-} \frac{2 - س - 0}{س - 3} = -1$$

$ق'(3)$ غير موجود لأن $ق'_+(3) \neq ق'_-(3)$

$$ق'(س) = \begin{cases} 0 & 1 < س < 2 \\ -1 & 2 < س < 3 \\ 1 & 3 < س < 4 \end{cases}$$

غير موجودة $س = 1, 2, 3, 4$

سادساً : قواعد الاشتقاق ١

التدريبات

(١) أ) $\text{مـ}'(س) = ٠$ ب) $\text{مـ}'(س) = -٨س$ ج) $\text{مـ}'(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س}}$

(٢) $\text{مـ}(س) = ١٠س^{٥} - ١٥س^{٣}$

$\text{مـ}'(س) = ٥٠س^{٤} - ٤٥س^{٢}$ ، $\text{مـ}'(-١) = ٥٠ \times ١ - ٤٥ \times ١ = ٥$

(٣) أ) $\text{مـ}(س) = ٨س^{٤} - ١٠س^{٥}$ ، $\text{مـ}'(س) = ٢٠س^{٣} - ٥٠س^{٤}$

ب) $\text{ص} = ٤٠$ ، $\text{مـ}(س) = ٢ + س$

$\text{مـ}'(س) = ١$ ، $\text{مـ}'(٤٠) = ١$

تمارين ومسائل

(١) أ) $\text{مـ}'(س) = ٠$ ب) $\text{ص} = ٤٠س^{٣}$

ج) $\text{ص} = ٠$ د) $\text{مـ}(س) = \frac{١}{١٦}س^{٤}$ ، $\text{مـ}'(س) = \frac{١}{٤}س^{٣}$

(٢) أ) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٢س + ٣$ ب) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = \frac{١}{٤}(٢س) = \frac{١}{٢}س$

ج) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = ٤٢س^{٢}$ د) $\frac{\text{د ص}}{\text{د س}} = س^{٣} + س^{٢} - ١٠$

(٣) أ) $\text{مـ}'(س) = ٢س^{٣}$ ، $\text{مـ}'(-١) = -٢$

ب) ميل $س = ٣$ ، $\text{مـ}(س) = س^{٢} + ٣س - ٦$

$\text{مـ}'(س) = ٢س + ٣$ ، $\text{مـ}'(٣) = ٦ + ٣ = ٩$

ج) ميل $س = ٤,٢$ ، $\text{مـ}(س) = ٦ - ٤س^{٢}$

$\text{مـ}'(س) = -٨س$ ، $\text{مـ}'(٤,٢) = -٨ \times ٤,٢ = -١٩,٢$

د) ميل $س = -١$ ، $\text{مـ}(س) = ٣س - ١ - (-س) = ٤س - ١$

$\text{مـ}'(س) = ٤$ ، $\text{مـ}'(-١) = ٤$

(٤) أ) $\text{مـ}'(س) = ٦ \text{ ق}'(س) - ٢ \text{ ط}'(س)$

$\text{مـ}'(-٢) = ٦ \text{ ق}'(-٢) - ٢ \text{ ط}'(-٢) = ٦ \times ٤ - ٢ \times -٣ = ٣٠$

ب) $\text{مـ}(س) = \frac{١}{٢} \text{ ق}(س) + \text{ط}(س) + ٣س^{٢}$

$\text{مـ}'(-٢) = \frac{١}{٢} \text{ ق}'(-٢) + \text{ط}'(-٢) + ٣(-٢)^{٢}$

$= \frac{١}{٢} \times ٤ - ٣ + ١٢ = ١١$

(١٦)

(٥) $هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٣} + ب س & س \geq ١ \\ ٤ - ب س^{٢} + ٢س & س < ١ \end{cases}$

$هـ(١)$ موجودة ، إذن $هـ$ متصل عند $س = ١$

$\lim_{س \to ١^+} هـ(س) = \lim_{س \to ١^-} هـ(س)$

$٢ + ب = ب + ٢$ ومنه $ب = ٢$

$هـ(س) = \begin{cases} ٢س^{٣} + ب س & س \geq ١ \\ ب - ٢س & س < ١ \end{cases} = \begin{cases} ٢س^{٣} + ٢س & س \geq ١ \\ ٤ - ٢س & س < ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = هـ'_{-}(١)$ لأن $هـ(١)$ موجودة

$٦ + ٢ = -٢ + ٤$ ، $٢ = -٦$

(٦) $هـ(س)$ متصل عند $س = ح$ بالفرض

$هـ(س) = \begin{cases} ل(س) & س \geq ح \\ ك(س) & س < ح \end{cases}$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح)$ ، $هـ'_{-}(ح) = ك'(ح)$

$هـ'_{+}(ح) = ل'(ح) = هـ'_{-}(ح)$

إذن $هـ$ قابل للاشتقاق عند $س = ح$ ، أي $هـ'(ح) = ل'(ح)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

خامساً: قواعد الاشتقاق

التدريبات

(١) $هـ'(س) = (٤ - ٢س^{٣})(\frac{١}{٢}) + (\frac{١}{٢}س + ٣)(-٦س^{٢})$

$= ٢ - س^{٣} - ٣س^{٣} - ١٨س^{٢} = ٢ - ٤س^{٣} - ١٨س^{٢}$

(٢) $\frac{ص}{س} = \frac{(س^{٢} - ٤)(٦) - (٦س + ١)(٢س)}{(س^{٢} - ٤)^{٢}} = \frac{٦س^{٢} - ٢٤ - ١٢س^{٢} - ٢س}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

$= \frac{-٦س^{٢} - ٢س - ٢٤}{(س^{٢} - ٤)^{٢}}$

(٣) ١) $ص = \frac{-٢\sqrt{٣}س}{س^{٤}} = \frac{-٢\sqrt{٣}}{س^{٣}}$

٢) $ص = \frac{-٢}{س} - س^{٢}$ ، $ص' = \frac{-٢}{س^{٢}} - ٢س$

فكّر زناشن $هـ'(س) = \frac{س^{٦}(٤س^{٣}) - (س^{٤} - ٢)(٣س^{٢})}{س^{١٢}} = \frac{٤س^{٧} - ٣س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{١٢}}$

$= \frac{س^{٦} + ٩س^{٢}}{س^{١٢}} = \frac{س^{٤} + ٩}{س^{١٠}} = ١ + \frac{٩}{س^{١٠}}$

(٤) $هـ'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س < ١ \\ ١ & س > ١ \end{cases}$

$هـ'_{+}(١) = ١$ ، $هـ'_{-}(١) = \frac{-٤}{٤} = -١$. $هـ'(١)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{-٤}{(س+١)^{٢}} & س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ١ & س > ١ \end{cases}$

تمارين وصائل

(١) أ) $ص' = س^4(٣-س^2) + (١+س^3)(-٢س)$

$= ٣س^4 + س^6 - ٢س^4 = ٥س^4 + س^6$

ب) $ص' = (-٣س^2 - ٢س + ١)(٤) + (٤س - ٣)(-٢س^2 - ٢)$

$= ٤ - ٨س - ٩س^2 + ١٢س^3 - ٨س - ٢س^2 + ٦$

$= ١٦س^3 - ٩س^2 - ١٦س + ١٠$

ج) $ص' = \frac{(١-س)(-٤س^2) - (-٣س^4)(-١)}{(١-س)^2} = \frac{-٤س^2 + ٣س^4}{(١-س)^2}$

$= \frac{-٤س^2 + ٣س^4}{(١-س)^2}$

د) $ص' = \frac{(٢س+٣)(-٢س) - (١-س^2)(٢)}{(٢س+٣)^2}$

$= \frac{-٤س^2 - ٦س - ٢ + ٢س^2}{(٢س+٣)^2} = \frac{-٢س^2 - ٦س - ٢}{(٢س+٣)^2}$

(٢) أ) $ن(س) = (س^2 + ٢س)(س^2 - ٣س - ٦)$

$ن'(س) = (٢س + ٢)(س^2 - ٣س - ٦) + (س^2 + ٢س)(٢س - ٣)$

$= ٢س^3 - ٣س^2 - ٦س + ٤س^2 - ٦س - ١٢ + ٢س^3 - ٣س^2 + ٤س^2 - ٦س$

$= ٤س^3 - ٣س^2 - ٤س - ١٢$

ب) $ن'(س) = \begin{cases} (س-٣)(س^2+س) & س \le ٣ \\ (٣-س)(س^2+٢س) & س > ٣ \end{cases} = \begin{cases} ٣س^2 - ٤س - ٣ & س < ٣ \\ -٣س^2 + ٤س + ٣ & س > ٣ \end{cases}$

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٤س - ٣ & ، س < ٣ \\ ٤س - ٣س^2 + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

$ن'_+(٣) = ٤ - ٢٧ = -١٣$ ، $ن'_-(٣) = ٢٧ - ١٢ - ٣ = ١٢$

$ن'(س) = \begin{cases} ٣س^2 - ٤س - ٣ & ، س < ٣ \\ \text{غير موجود} & ، س = ٣ \\ ٤س - ٣س^2 + ٣ & ، س > ٣ \end{cases}$

(١٩)

ج) $هـ'(س) = \frac{(س^2+3)(2س-2) - (س^2-2س+3)(2س)}{(س^2+3)^2}$

$= \frac{2س^2 - 2س^2 + 8س - 8 - 2س^2 + 4س^2 - 8س}{(س^2+3)^2} = \frac{2س^2 - 8}{(س^2+3)^2}$

د) $هـ(س) = \begin{cases} \frac{(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & إذا س < 3 \\ \frac{(س-1)(س-3)}{س(س-1)} & 3 \le س \le 5 \end{cases}$

$= \begin{cases} \frac{س-3}{س} & إذا س < 3 \\ \frac{س-3}{س} & 3 \le س \le 5 \end{cases} = \begin{cases} 1 - \frac{3}{س} & إذا س < 3 \\ 1 - \frac{3}{س} & 3 \le س \le 5 \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} \frac{3}{س^2} & إذا س < 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 \le س \le 5 \end{cases}$

$هـ'_+(3) = \frac{1}{3}$ ، $هـ'_-(3) = -\frac{1}{3}$ ، $هـ'(3)$ غير موجودة

$هـ'(س) = \begin{cases} -\frac{3}{س^2} & إذا س < 3 \\ \text{غير موجودة} & س = 3 \\ \frac{3}{س^2} & 3 < س \le 5 \end{cases}$

(٣) أ) $هـ'(س) = س \, ق'(س) + ق(س)$

$هـ'(2) = 2 \, ق'(2) + ق(2) = 2 \times -1 + 2 = 1$

ب) $هـ'(س) = 2س^3 \times ق'(س) + ق(س) \times 6س - 5$

$هـ'(2) = 12 \times -1 + 2 \times 12 - 5 = 19$

ج) $هـ'(س) = ق'(س) + \frac{ق'(س)}{(ق(س))^2}$

$هـ'(2) = ق'(2) + \frac{ق'(2)}{(ق(2))^2} = -1 + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$

د) $هـ'(س) = \frac{3ق(س) \times 2 - (2س+1)(3ق'(س))}{(3ق(س))^2}$

$هـ'(1) = \frac{6ق(1) - 15ق'(1)}{(3ق(1))^2} = \frac{18+15}{36} = \frac{33}{36} = \frac{11}{9}$

(٤) أ) $\text{مـ}'(س) = ل(س) \times \text{حـ}'(س) + \text{حـ}(س) \times ل'(س)$ (٥٠)

$\text{مـ}'(-٢) = ل(-٢) \times \text{حـ}'(-٢) + \text{حـ}(-٢) \times ل'(-٢)$

$= ٢ \times -٦ + ٤ \times -١ = -١٢$

ب) $\text{مـ}'(س) = \dfrac{[ل(س)+١]\,\text{حـ}'(س) - \text{حـ}(س) \times ل'(س)}{(ل(س)+١)^{٢}}$

$\text{مـ}'(-٢) = \dfrac{[ل(-٢)+١]\,\text{حـ}'(-٢) - \text{حـ}(-٢)\,ل'(-٢)}{(ل(-٢)+١)^{٢}}$

$= \dfrac{٤ \times -٦ - ٤ \times -١}{(-٣+١)^{٢}} = \dfrac{-٢٠}{١٦} = -\dfrac{٥}{٤}$

(٥) أ) نعيد تعريف $\text{مـ}(س)$ حول $س = ١,٤$ ، $\text{مـ}(س) = س^{٢} - ٣$

$\text{مـ}'(س) = ٢س$ ، $\text{مـ}'(١,٤) = ٢,٨$

ب) نعيد تعريف $\text{مـ}(س)$ حول $س = ٢$ ، $\text{مـ}(س) = \dfrac{٣}{٢س - ١}$

$\text{مـ}'(س) = \dfrac{-٣ \times ٢}{(٢س-١)^{٢}}$ ، $\text{مـ}'(٢) = \dfrac{-٦}{٩} = -\dfrac{٢}{٣}$

ج) $\text{مـ}'(س) = \dfrac{(س^{٢}-٤)(٥) - (٥س+١)(٢س)}{(س^{٢}-٤)^{٢}}$

$\text{مـ}'(-١) = \dfrac{-٣ \times ٥ - ١ \times -٢}{(-٣)^{٢}} = \dfrac{-٦+٢}{٩} = -\dfrac{٢}{٣}$

(٦) $\dfrac{د}{دس}(ل(س) \times م(س) \times \text{حـ}(س)) = \dfrac{د}{دس}((ل(س) \times م(س)) \times \text{حـ}(س))$

$= (ل(س) \times م(س))' \times \text{حـ}(س) + \text{حـ}'(س)(ل(س) \times م(س))$

$= (ل(س) \times م(س))' \times \text{حـ}(س) + \text{حـ}(س)(ل(س) \times م'(س) + ل'(س) \times م(س))$

$= ل(س) \times م(س) \times \text{حـ}'(س) + ل(س) \times \text{حـ}(س) \times م'(س) + م(س) \times ل'(س) \times \text{حـ}(س)$

(٧) نضع $ل(س)$ بدلاً من $\text{مـ}(س)$ ، $\text{حـ}(س)$ في السؤال السادس ينتج

$\dfrac{د}{دس}(ل(س))^{٣} = ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س) + ل(س) \times ل(س) \times ل'(س)$

$= ٣(ل(س))^{٢} \cdot ل'(س)$.

(ج١)

(٨) $\text{ه}(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & س \le ١ \\ ٦س & س > ١ \end{cases}$

$\text{ه}_{+}'(١) = ٦$ ، $\text{ه}_{-}'(١) = ١٢$ ، إذن $\text{ه}'(١)$ غير موجودة

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ١٢س^{٢} & س < ١ \\ \text{غير موجودة} & س = ١ \\ ٦ & س > ١ \end{cases}$

(٩) نعيد تعريف $\text{ه}(س)$

$\text{ه}(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+٦س) & س \ge ٠ \\ -س(س^{٢}+٦س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+٦س^{٢} & س \ge ٠ \\ -س^{٣}-٦س^{٢} & س < ٠ \end{cases}$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$

$\text{ه}_{+}'(٠) = ٠$ ، $\text{ه}_{-}'(٠) = ٠$ ، إذن $\text{ه}'(٠) = ٠$

$\text{ه}'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+١٢س & س > ٠ \\ \text{صفر} & س = ٠ \\ -٣س^{٢}-١٢س & س < ٠ \end{cases}$

(١٠) ه متصل عند $س = ج$ لأنه قابل للاشتقاق عند $س = ج$

$\lim_{س \to ج^{+}} \text{ه}(س) = \lim_{س \to ج^{-}} \text{ه}(س)$

$٤ - ٨ب + ٢ج = ٣ب + ٢ج$ ومنه $٣ب + ج = ٠$ ... (١)

$\text{ه}(س) = \begin{cases} ٢ج س - ب & ، س \le ج \\ -٣ب س^{٢} + ج & ، س > ج \end{cases}$

$\text{ه}_{-}'(ج) = \text{ه}_{+}'(ج)$

$٤ج - ب = -١٢ب + ج$ ومنه $١٣ب + ٣ج = ٠$ ... (٢)

$١١ب + ٣ج = ٠$ ... (٣)

(١) $\times$ -٣ ثم الطرح

$٣ب = -٦$ ومنه $ب = -٣$

نجد $ج$ من المعادلة (٥) : $ج = ٢ب = -٦ = ٩$

سادساً : المشتقات العليا

التدريبات

(١) أ) $هـ(س) = ١٥س^{٤} - ٨س + ٦$

$هـ'(س) = ٣٠س - ٨$ ، $هـ''(-١) = -٣٠ - ٨ = -٣٨$

ب) $هـ(س) = \frac{ن}{١٠}س^{ن-١}$ ، $هـ''(س) = \frac{ن(ن-١)}{١٠}س^{ن-٢}$

$هـ'''(س) = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠}س^{ن-٣}$

$٩س^{٢} = \frac{ن(ن-١)(ن-٢)}{١٠}س^{ن-٣}$

$ن - ٣ = ٢$ ومنها $ن = ٥$ ، $٩ = \frac{٣ \times ٤ \times ٥}{١٠} = ٦$

(٢) $هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٤} & س \geq ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٦س & س \geq ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

١) $هـ'_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ'_{-}(٠) = ٠$ ، $\therefore$ $هـ'(٠)$ موجودة ومساوي صفر

$هـ''_{+}(٠) = ٠$ ، $هـ''_{-}(٠) = ٠$ ، $\therefore$ $هـ''(٠)$ موجودة ومساوي صفر

٢) $هـ(س) = \begin{cases} ٣س^{٤} & ، س > ٠ \\ ٠ & ، س \leq ٠ \end{cases}$

$هـ'(س) = \begin{cases} ٦س & س > ٠ \\ ٠ & س \leq ٠ \end{cases}$

٣) $هـ''(س) = \begin{cases} ٦ & س > ٠ \\ ٠ & س < ٠ \end{cases}$

$هـ''_{+}(٠) = ٦$ ، $هـ''_{-}(٠) = ٠$ ، $\therefore$ $هـ''(٠)$ غير موجودة

تدريبيا (١) فرع ج)

$هـ(س) = س^{٦} + ١٤س^{٤} - ٣س^{٣} - ١٠س + س^{٢} + ٧$

$هـ'(س) = ١٣س^{٥} + ٥٦س^{٣} - ٩س^{٢} + ٢٠س - ١٠$

$هـ''(س) = ٦٥س^{٤} + ١٦٨س^{٢} - ١٨س + ٢٠$

$هـ''(-١) = ٦٥ + ١٦٨ + ١٨ + ٢٠ = ٤٨٧$

تمارين ومسائل

(١) أ) $ص = ١٢س^{٢} - ٧س - ٦$

$ص' = ٢٤س - ٧$

ب) $ص = س + \frac{١}{س}$

$ص' = ١ - \frac{١}{س^{٢}}$ ، $ص'' = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

ج) $ه(س) = \begin{cases} س(س^{٢}+س) & س > ٠ \\ -س(س^{٢}+س) & س < ٠ \end{cases} = \begin{cases} س^{٣}+س^{٢} & س > ٠ \\ -س^{٣}-س^{٢} & س < ٠ \end{cases}$

$ه'(س) = \begin{cases} ٣س^{٢}+٢س & س > ٠ \\ -٣س^{٢}-٢س & س < ٠ \end{cases}$

$ه'_{+}(٠) = ٠$ ، $ه'_{-}(٠) = ٠$ ، إذن $ه'(٠) = ٠$

$ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$ ، $ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

$ه''_{+}(٠) = ٢$ ، $ه''_{-}(٠) = -٢$ ، إذن $ه''(٠)$ غير موجودة.

$ه''(س) = \begin{cases} ٦س+٢ & س > ٠ \\ \text{غير موجودة} & س = ٠ \\ -٦س-٢ & س < ٠ \end{cases}$

د) $ه(س) = (س^{٢}+٤س)(٣-س^{٤})+(س^{٣}+١)(س+٤)$

$= ٣س^{٤}+١٢س^{٣}+٢س^{٤}+٤س^{٣}+س+٤$

$= ٥س^{٤}+١٦س^{٣}+٢س+٤$

$ه''(س) = ٢٠س^{٣}+٤٨س^{٢}+٢$

$ه''(-١) \times ه''(-١) = (٥-١٦-٢+٤)(-٢٠+٤٨+٢)$

$= ٩ \times ٣٠ = -٢٧٠$

(٣) $ه(س) = ن س^{ن-١}$ ، $ه''(س) = ن(ن-١)س^{ن-٢}$

$ه'''(س) = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$

$٩س = ن(ن-١)(ن-٢)س^{ن-٣}$ وعندما $ن-٣ = ١$ وعندما $ن = ٤$

$٩ = ٤ \times ٣ \times ٢ = ٤!$

(٤) $ص = \frac{-٤}{س^{٤}}$ ، $ص' = \frac{-٤ \times ٤س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{-١٦}{س^{٥}}$ ، $ص'(١) = -١٦$ (٤)

(٥) $ع(س) = ٤س^{٣} + ٩س^{٢} - ١٢س - ١$

$ع'(س) = ١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢$

أ) $١٢س^{٢} + ١٨س - ١٢ = ٠$ ، $٢س^{٢} + ٣س - ٢ = ٠$

$(٢س - ١)(س + ٢) = ٠$ ومنه $س = -٢ ، \frac{١}{٢}$

ب) مجموعة P : $(٢س - ١)(س + ٢) < ٠$

$س \in (-٢ ، \frac{١}{٢})$

ج) مجموعة Q : $(٢ - س)(١ + س) > ٠$

$س \in (-\infty ، -٢] \cup [\frac{١}{٢} ، \infty)$

(٦) أ) $ص = ٤س^{٣} + ١٥س^{٢} - ٦$

$ص' = ١٢س^{٢} + ٣٠س$ ، $ص'' = ٢٤س + ٣٠$ ، $ص''' = ٢٤$

ب) $ص = ٢٣س^{٢} + ٢٠س + ص$

$ص' = ٤٦س + ٢٠$ ، $ص'' = ٤٦$

(٧) أ) $ع(س) = ٢س^{٢} - ٦$ ، $ع'(س) = ٤س$

$ع''(س) = صفر$ ، $ع''(١٢) = صفر$

ب) $ع(س) = \frac{١}{٤}س^{٤} - س^{٢}$

$ع'(س) = س^{٣} - ٢س$ ، $ع'(-١) = -١ + ٢ = ١$

ج) $ع(س) = -\frac{١}{س^{٢}}$ ، $ع'(س) = \frac{٢س}{س^{٤}} = \frac{٢}{س^{٣}}$

$ع''(س) = \frac{-٢ \times ٣س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦س^{٢}}{س^{٦}} = \frac{-٦}{س^{٤}}$

$ع^{(٤)}(س) = \frac{٦ \times ٤ \times ٣س^{٣}}{س^{٨}} = \frac{٤٥}{س^{٥}}$ ، $ع^{(٤)}(١) = ٤٥$

(٨) $هـ(س) = س^٢ ل(س) + ل(س) \times ٣س$ (٢ د)

$هـ'(س) = س^٢ ل'(س) + ل'(س) \times ٣س + ل(س) \times ٣ + ٣س \times ل'(س)$

$= س^٢ ل'(س) + ٤س ل'(س) + ٣ ل(س)$

$هـ''(س) = س^٢ ل''(س) + ل'(س) \times ٣س + ٤س \times ل''(س) + ل'(س) \times ٤ + ٣ ل'(س)$

$= س^٢ ل''(س) + ٦س ل''(س) + ٦ ل'(س)$

(٩) $(ل \times ق)'(س) = ل(س) \times ق'(س) + ق(س) \times ل'(س)$

$(ل \times ق)''(س) = ل(س) \times ق''(س) + ق'(س) \times ل'(س) + ق(س) \times ل''(س) + ل'(س) \times ق'(س)$

$= (ل'' \times ق)(س) + ٢ (ل' \times ق')(س) + (ل \times ق'')(س)$

(١٠) $هـ(س) = ٢س^٢ + ب س + ح$

$هـ(١) = ٣$ ومنه $٢ + ب + ح = ٣$ ... (١)

$هـ'(س) = ٢ \times ٢س + ب$

$هـ'(١) = -٢$ ومنه $٤ + ب = -٢$ ... (٢)

$هـ''(س) = ٤$

$هـ''(١) = ٤$ ومنه $٢ = ٤$

من معادلة (٢) : $ب = -٦$ ومن معادلة (١) : $ح = ٧$

(١١) $\frac{د}{دس}(ل(س) ق(س) - ل'(س) ق(س))$

$= ل(س) ق'(س) + ق(س) ل'(س) - (ل'(س) ق(س) + ق(س) ل'(س))$

$= ل(س) ق'(س) - ل'(س) ق(س)$

(١٢) $ق'(س) = ل(س) هـ'(س) + هـ(س) ل'(س)$

$ق''(س) = ل(س) هـ''(س) + هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س) + ل'(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ''(س) + ٢ هـ'(س) ل'(س) + هـ(س) ل''(س)$ لكن $ل'' + هـ'' = ح$

$ل'(س) + هـ'(س) = ح$ ، بالتفاضل بطريقة نحصل على

$ل''(س) هـ'(س) + هـ''(س) ل'(س) = ٠$

$ق'''(س) = ل(س) هـ'''(س) + هـ'(س) ل''(س) + هـ''(س) ل'(س) + ل''(س) هـ'(س)$

$= ل(س) هـ'''(س) + ٣ هـ''(س) ل'(س)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

(٥ د)

١٣) $\text{ق}(س) = ٤ص^{٣} - \frac{١٦}{س^{٢}}$

$\text{ق}(س) = ص^{٤} + \frac{١٦ \times ٤ س}{س^{٤}} = ص^{٤} + \frac{٣٢}{س^{٣}}$

$\text{ق}''(س) = ٤ص^{٤} - س \times \frac{٢ \times ٣٢ س^{٢}}{س^{٦}} = ٤ص^{٤} - \frac{٩٦}{س^{٤}}$

$\text{ق}''(٢) = ٩٠ ، ٤٨ - \frac{٩٦}{١٦} = ٢$

$٤٨ = ١ \Leftarrow$ وضح $ص = \frac{١}{٢}$

١٤) $\text{ق}(س) = ٨ - ٨(م-٣) س$

$\text{ق}'(س) = -٨(م-٣)$

$-٨(م-٣) < ٠ ، م-٣ > ٠ \Leftarrow$ وضح $م > ٣$

سابعاً : مشتقة الاقترانات المثلثية

التدريبات

(١) $\text{مـ}(س) = ٢ \text{جتا} س + ٦$

$\text{مـ}(\frac{\pi}{٣}) = ٢ \times \frac{١}{٢} + ٦ = ٧$

(٢) $\text{مـ}(س) = س \text{جتا} س + \text{جا} س$

$\text{مـ}(\frac{\pi}{٢}) = \frac{\pi}{٢} \times ٠ + ١ = ١$

(٣) $\text{مـ}(س) = \text{قا} س = \frac{١}{\text{جتا} س}$

$\text{مـ}(س) = \frac{-(-\text{جا} س)}{\text{جتا}^٢ س} = \frac{١}{\text{جتا} س} \times \frac{\text{جا} س}{\text{جتا} س} = \text{قا} س \text{ ظا} س$

$\text{مـ}(س) = \text{قتا} س = \frac{١}{\text{جا} س}$

$\text{مـ}(س) = \frac{-\text{جتا} س}{\text{جا}^٢ س} = -\frac{١}{\text{جا} س} \times \frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س} = -\text{قتا} س \text{ ظتا} س$

$\text{مـ}(س) = \text{ظتا} س = \frac{\text{جتا} س}{\text{جا} س}$

$\text{مـ}(س) = \frac{\text{جا} س \times -\text{جا} س - \text{جتا} س \times \text{جتا} س}{\text{جا}^٢ س}$

$= \frac{-\text{جا}^٢ س - \text{جتا}^٢ س}{\text{جا}^٢ س} = \frac{-١}{\text{جا}^٢ س} = -\text{قتا}^٢ س$

(٤) $\text{مـ}(س) = \text{قا} س \text{ ظا} س + \text{قا}^٢ س$

$\text{مـ}(\frac{\pi}{٦}) = \frac{٢}{\sqrt{٣}} \times \frac{١}{\sqrt{٣}} + \frac{٤}{٣} = \frac{٢}{٣} + \frac{٤}{٣} = ٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين ومسائل

١) أ) $ص' = ٣ جتا س + جا س$

ب) $ص' = س^٢ جتا س + جا س \times ٢س$

$= س^٢ جتا س + ٢س جا س$

ج) $ص' = \frac{جتا س - س \times جا س}{جتا^٢ س} = \frac{جتا س + س جا س}{جتا^٢ س}$

د) $ص' = ظا^٢ س - \sqrt{٣}$ ، هـ) $ص = ١$ ، $ص' = ٠$

و) $ص' = -ظتا س ظتا س - (س \times -ظا^٢ س + ظتا س \times ١)$

$= -ظتا^٢ س ظا^٢ س + س ظا^٢ س - ظتا س$

ز) $ص' = جتا س$ ، $ص'' = -جا س = -ص$

$ص'' + ٦ ص = -ص + ٦ ص = ٥ ص$

(٣) أ) $ه'(س) = جا س (-جا س) + جتا س جتا س$

$= جتا^٢ س - جا^٢ س$

$ه'(\frac{\pi}{٣}) = (\frac{١}{٢})^٢ - (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ = \frac{١}{٤} - \frac{٣}{٤} = -\frac{١}{٢}$

ب) $ه(س) = -جا س + جتا س$ ، $ه'(س) = -جتا س - جا س$

$ه'(\frac{\pi}{٤}) = -\frac{١}{\sqrt{٢}} - \frac{١}{\sqrt{٢}} = -\sqrt{٢}$

ج) $ه'(س) = \frac{(١ + جا س)(-جا س) - جتا س جتا س}{(١ + جا س)^٢}$

$= \frac{-جا س - جا^٢ س - جتا^٢ س}{(١ + جا س)^٢} = \frac{-جا س - ١}{(١ + جا س)^٢}$

$ه'(\pi) = \frac{-جا \pi - ١}{(١ + جا \pi)^٢} = -١$

د) $ه'(س) = س جا س ظا س + ظا س$

$ه'(\frac{\pi}{٤}) = \frac{\pi}{٤} \times \frac{\sqrt{٢}}{٢} \times \sqrt{٢} + \frac{١}{٢} = \frac{\pi}{٤} + \frac{١}{٢}$

هـ) $ه'(س) = \frac{جا س (ظا^٢ س + ١) - (ظا س + س) جتا س}{جا^٢ س}$

$ه'(\frac{\pi}{٣}) = \frac{\sqrt{٢} (٤ + ١) - (\sqrt{٣} + \frac{\pi}{٣}) \times \frac{١}{٢}}{(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢} = \frac{٥\sqrt{٣} - \frac{\pi}{٦}}{\frac{٣}{٤}}$

$= \frac{٢٠\sqrt{٣}}{٩} - \frac{٨}{٩}$

(٤) أولاً : ص = جتا س

ص' = − جا س ، ص'' = − جتا س

ص + ص'' = جتا س − جتا س = ٠

ثانياً ص = جا س

ص' = جتا س ، ص'' = − جا س

ص'' + ص = جا س − جا س = ٠

(٥) أ) ق'(س) = ١ − جا س

١ − جا س = ٠ ومنها جا س = ١

إذن س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\frac{5\pi}{2}$

ب) ق(س) = ظا س = $\frac{1}{\text{جتا س}} \times \frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}} = \frac{\text{جا س}}{\text{جتا}^2 \text{س}}$

ق'(س) = ٠ إذا كان جا س = ٠

س = − π ، ٠ ، π

(٦) ص = ٢ جتا س − ب جا س

(ص')^2 + ص^2 = (٢ جتا س − ب جا س)^2 + (٢ جا س + ب جتا س)^2

= ٤ جتا^2 س − ٤ ب جتا س جا س + ب^2 جا^2 س + ٤ جا^2 س + ٤ ب جا س جتا س + ب^2 جتا^2 س

= ٤ (جتا^2 س + جا^2 س) + ب^2 (جا^2 س + جتا^2 س)

= ٤ × ١ + ب^2 × ١ = ٤ + ب^2 .

(٧) أ) ص' = − قتا س ظتا س

ص'' = − قتا س × − قتا^2 س + ظتا س (− قتا س ظتا س)

= قتا^3 س + قتا س ظتا^2 س

ب) ص' = س (− جا س) + جتا س − ٤ جتا س

= − س جا س − ٣ جتا س

ص'' = − س جتا س + جا س (− ١) + ٣ جا س = ٢ جا س − س جتا س

(٨) لكي يكون هـ قابلة للاشتقاق عند س = ٠ يجب أن يكون هـ متصلة عند س = ٠

(٩) $\lim_{س \to 0^+} هـ(س) = \lim_{س \to 0^-} هـ(س)$ ومنه $ب = ١$

$$هـ(س) = \begin{cases} -جا س & س < ٠ \\ ب & س \geq ٠ \end{cases}$$

$$هـ'_+(٠) = \lim_{س \to 0^+} \frac{هـ(س) - هـ(٠)}{س - ٠} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جتا س - ١}{س}$$

$$= \lim_{س \to 0^+} \frac{جتا س - ١}{س} \times \frac{جتا س + ١}{جتا س + ١} = \lim_{س \to 0^+} \frac{جتا^٢ س - ١}{س(جتا س + ١)}$$

$$= \lim_{س \to 0^+} \frac{-جا^٢ س}{س(جتا س + ١)} = \lim_{س \to 0^+} \frac{-جا س}{س} \times \lim_{س \to 0^+} \frac{جا س}{جتا س + ١}$$

$$= -١ \times ٠ = ٠$$

$هـ'_-(٠) = ب = هـ'_+(٠)$ ، إذن $ب = ٠$

(٩) نعيد تعريف هـ(س).

$$هـ(س) = \begin{cases} -جا س & س \geq \pi \\ جا س & س < \pi \end{cases}$$

$$هـ'_+(\pi) = \lim_{س \to \pi^+} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س - ٠}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^+} \frac{-جا س}{س - \pi}$$

نفرض س − π = هـ ، عندما س ← π⁺ ، هـ ← ٠⁺

$$= \lim_{هـ \to 0^+} \frac{-جا(\pi + هـ)}{هـ} = \lim_{هـ \to 0^+} \frac{-(-جا هـ)}{هـ} = ١$$

$$هـ'_-(\pi) = \lim_{س \to \pi^-} \frac{هـ(س) - هـ(\pi)}{س - \pi} = \lim_{س \to \pi^-} \frac{جا س - ٠}{س - \pi}$$

$$= \lim_{هـ \to 0^-} \frac{جا(س + هـ)}{هـ} = ١$$

إذن هـ قابلة للاشتقاق عند س = π

(١٠) $هـ(س) = جتا س - \frac{١}{٢}$

$جتا س - \frac{١}{٢} = ٠$ ، $جتا س = \frac{١}{٢}$

إذن $س = \frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

ثامناً : قاعدة السلسلة

التدريبات :

(١) ١) نفرض ع = س٣ - س فيكون ص = ع٦ ، ع = س٣ - س

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ع} \cdot \frac{د ع}{د س} = ٦ ع^{٥} \times (٣ س^{٢} - ١)$

$= ٦ (س^{٣} - س)^{٥} (٣ س^{٢} - ١)$

٢) هـ (س) = ٢ - $\frac{١}{س^{٢}}$ ، هـ (س) = جتا س

(هـ ○ هـ)' (س) = هـ' (هـ (س)) . هـ' (س) = (٢ - $\frac{١}{جا^{٢} س}$) × جتا س

= ٢ جتا س - ظتا س قا س

(٣) $\frac{د ص}{د س}$ = ٢ (قا س + ظا س) (قا س ظا س + قا^٢ س)

$\frac{د ص}{د س}|_{س = ٠}$ = ٢ (١ + ٠) (١ × ٠ + ١) = ٢

(٣) ١) هـ (س) = ٤ قا^٤ س ظا^٤ س

٢) هـ' (س) = ٧ (س^٣ + ٢ س - ٨)^٦ (٣ س^٢ + ٢)

٣) هـ' (س) = ٤ جا^٢ (س^٢) جتا (س^٢) × ٢ س = ٨ س جا^٣ (س^٢) جتا (س^٢)

(٤) نقطة الطرفية بالنسبة إلى س

هـ' (س^٣ - ١) (٣ س^٢) = - $\frac{١}{س^{٢}}$ - ٢ س

س^٣ - ١ = ٧ عندما س = ٢

هـ' (٧) (١٢) = - $\frac{١}{٤}$ - ٤

هـ' (٧) × ١٢ = - $\frac{١٧}{٤}$ ، هـ' (٧) = - $\frac{١٧}{٤}$ × $\frac{١}{١٢}$ = - $\frac{١٧}{٤٨}$

(١) أ) $\frac{ص}{س} = ٨(س^٣ - ٢س + ٤)^٧ (٣س^٢ - ٢)$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{-٥(س^٢+١)^٤(٢س)}{(س^٢+١)^١٠} = \frac{-١٠س}{(س^٢+١)^٦}$

ج) $\frac{ص}{س} = \frac{(١-س^٣)^٤(٤س^٣) - س^٤(٤(١-س^٣)^٣ \times -٣س^٢)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٤ + ١٢س^٦(١-س^٣)^٣}{(١-س^٣)^٨}$

$= \frac{٤س^٣(١-س^٣)^٣(١-س^٣+٣س^٣)}{(١-س^٣)^٨} = \frac{٤س^٣(١+٢س^٣)}{(١-س^٣)^٥}$

د) $\frac{ص}{س} = -جا(س^٢-س) \times (٢س-١) = (١-٢س) جا(س^٢-س)$

(٢) $هـ(س) = ٢س - ٢$ ، $هـ(س) = ٣س^٢$

$(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) + هـ'(١)$

$= هـ'(٢) \times ٣ = ٢ \times ٣ = ٦$

$(هـ \circ هـ)'(١) = هـ'(هـ(١)) . هـ'(١) = هـ'(-١) + صفر = صفر$

(٣) أ) $(هـ \circ هـ)'(٢) = هـ'(هـ(٢)) . هـ'(٢)$

$= هـ'(٣) \times -٦ = ٤ \times -٦ = -٢٤$

ب) $هـ(س^٢) \times ٢س = س = هـ'(٣) \times ٢ \times ٣ = ٣٦ = ٧\sqrt{٣}$

(٤) نفرض ع = هـ(س) فيكون ص = جا ع ، ع = هـ(س)

$\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س} = ن جا^{ن-١} ع \times جتا ع \times هـ'(س)$

$= ن جا^{ن-١}(هـ(س)) \times جتا هـ(س) \times هـ'(س)$

(٥) أ) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ع} . \frac{ع}{س}$

$= جا^٢ ع \times (٣س^٢ - ١) = جا^٢(س^٣ - س) \times (٣س^٢ - ١)$

ب) $\frac{ص}{س} = \frac{ص}{ل} . \frac{ل}{س} = (٢ل + ٢) \times \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+١}}$

$= (٢\sqrt{س^٢+١} + ٢) \times \frac{س}{\sqrt{س^٢+١}} = ٢س + \frac{٢س}{\sqrt{س^٢+١}}$

(٣٢)

(٦) $ص = -جا(س + \frac{\pi}{2})$ ، $ص'' = -جتا(س + \frac{\pi}{2})$

$ص + ص'' = جتا(س + \frac{\pi}{2}) - جتا(س + \frac{\pi}{2}) = صفر$

(٧) $\frac{ص}{س} = ظا^2 س + ظا^2 س قا^2 س = قا^2 س (1 + ظا^2 س)$

$= قا^2 س قا^2 س = قا^4 س$

(٨) أ) $هـ$ اقتران فردي معرف على $ح$ بحيث $هـ(-س) = -هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = -هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = هـ'(س)$

إذن $هـ'(س)$ اقتران زوجي

ب) $هـ$ اقتران زوجي ، أي أن $هـ(-س) = هـ(س)$

باشتقاق الطرفين:

$-هـ'(-س) = هـ'(س)$ ومنه $هـ'(-س) = -هـ'(س)$

إذن $هـ'(س)$ اقتران فردي

(٨) أ) $\frac{ص}{س} = 2 جا 3س جتا 2س \times 3 = 3 جا 6س$

عندما $س = \frac{\pi}{9}$ ، $\frac{ص}{س} = 3 جا \frac{2\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

ب) $\frac{ص}{س} = 4(س + \frac{1}{س})^3 (1 - \frac{1}{س^2})$

$\frac{ص}{س}\Big|_{س=1} = 4(1+1)^3 (1-1) = صفر$

(٩) أ) $ص' = س قا^2(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + ظا(\frac{1}{س}) \times 1$

$= -\frac{1}{س} قا^2(\frac{1}{س}) + ظا(\frac{1}{س})$

$ص'' = -\frac{1}{س} \times 2 قا(\frac{1}{س}) قا(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س}) \times -\frac{1}{س^2} + قا^2(\frac{1}{س}) \times \frac{1}{س^2} + قا^2(\frac{1}{س}) \times \frac{1}{س^2}$

$= \frac{2}{س^3} قا^2(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س}) + \frac{1}{س^2} قا^2(\frac{1}{س}) - \frac{1}{س^2} قا^2(\frac{1}{س})$

$= \frac{2}{س^3} قا^2(\frac{1}{س}) ظا(\frac{1}{س})$

(٣٣) $\frac{ص}{س} = \frac{س\,جتا\,س - جا\,س}{س^2} = -\frac{جا\,س - س\,جتا\,س}{س^2}$

$ص = -\frac{س^3(جا\,س + س\,جتا\,س) - (جا\,س - س\,جتا\,س)\times 3س^2}{س^6}$

$= -\frac{س^3 جا\,س + س^4 جتا\,س + 3س^2 جا\,س - 3س^3 جتا\,س}{س^6}$

$= \frac{4س\,جتا\,س - س^3 جتا\,س - 3س\,جا\,س}{س^4}$

(٣٤) $ص = س\,جا\,س\times جتا\,س\times ظا\,س$

إذا كان $س = \frac{\pi}{4}$ وهي $س = \frac{\pi}{12}$ فإن $جا\,س = \frac{1}{2}$

$ص' = (جا\,س)\times جتا\,س\times ظا\,س + س\,جتا\,س\times ظا\,س + س\,جا\,س\times قا^2 س$

$ص'(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1 + \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}\times 1 + \frac{\pi}{4}\times\frac{1}{2}\times 2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \frac{2+\pi+2\pi}{8} = \frac{2+3\pi}{8}$

(٣٥) $\frac{ص}{س} = ص'(س^2+2س)(س+1)$

$\left.\frac{ص}{س}\right|_{س=1} = ص'(3)\times 4\times 2 = 0\times 4\times 2 = 0$

(٣٦) $\frac{ص}{س} = \frac{\sqrt{س^2+2س}\times 2}{\frac{س+1}{\sqrt{س^2+2س}}} = \frac{2(س^2+2س)}{س+1}$

$= \frac{2س^2+4س}{س+1} = \frac{2س(س+2)}{س+1}$

(٣٧) $ص(3س) = س$

$ص'(3س)\times 3 = 2$

$ص'(3س) = \frac{2}{3}$

نفرض $س = 1$ ، $ص'(3) = \frac{2}{3}$

(١٣) $ق(س) = ٣س^٢ + ٤$ ، $ق'(س) = ٦س$ ، $ق''(س) = ٦$ [٣٣]

$ه(س) = ٦س$ ، $ه'(س) = ٦$ ، $ه''(س) =$ صفر

أ) $(ق \circ ه)'(١) = ق'(ه(١)) \times ه'(١)$

$= ق'(٦) \times ٦ = ٦ \times ٣ \times ٦ = ١٠٨$

ب) $(ق \circ ه)'(ج) = ق'(ه(ج)) \times ه'(ج)$

$= ق'(١٢) \times ٦ = ٦ \times ١٢ \times ٦ = ٤٣٢$

جـ) $(ق \circ ه)''(س) = ((ق \circ ه)'(س))'$

$= (ق'(ه(س)) \times ه'(س))' = (ق'(٣س^٢) \times ٦س)'$

$= (١٨س^٢ \times ٦س)' = (١٠٨س^٣)' = ٣٢٤س^٢$

$(ق \circ ه)''(-١) = ٣٢٤$

د) $(ق \circ ق)''(س) = ((ق \circ ق)'(س))' = (ق'(ق(س)) \times ق'(س))'$

$= ق''(ق(س)) \times ق'(س) + ق'(س) \times ق''(ق(س)) \times ق'(س)$

$= ق''(٦س) \times$ صفر $+ ٦ \times ٦ \times ٦ = ١٠٨$

تاسعاً: الاشتقاق الضمني

التدريبات

(١) ١) $٦س - ٨ص\,ص' = ٠$

$٨ص\,ص' = ٦س$ ومنه $ص' = \frac{٣}{٤}\times\frac{س}{ص}$

٢) $٢س\cdot ص' + ٢ص - ٣ص^{٢}ص' = ١ + ٢ص'$

$٢س ص' - ٣ص^{٢}ص' - ٢ص' = ١ - ٢ص$

$ص'(٢س - ٣ص^{٢} - ٢) = ١ - ٢ص$ ومنه $ص' = \frac{١ - ٢ص}{٢س - ٣ص^{٢} - ٢}$

٣) $٢س + ص' = ظا^{٢}ص \cdot ص'$

$ص'(١ - ظا^{٢}ص) = -٢س$ ومنه $ص' = \frac{٢س}{ظا^{٢}ص - ١}$

(٢) ١) $\frac{ص'}{٢\sqrt{ص}} - جاس = ٠$ ومنه $ص' = ٢\sqrt{ص}\,جاس$

٢) $٢(س-ص)(١-ص') - ص' = ٠$

$٢(س-ص) - ص'(٢(س-ص)) - ص' = ٠$

$ص'(٢س - ٢ص + ١) = ٢(س-ص)$ ومنه $ص' = \frac{٢(س-ص)}{٢س - ٢ص + ١}$

(٣) $-جاص\,ص' = ١$ ، $ص' = -\frac{١}{جاص}$

نجد جاص بدلالة س:

$جا^{٢}ص = ١ - جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$

$جاص = \sqrt{١-س^{٢}}$ ، $-\sqrt{١-س^{٢}}$ يُهمل

$ص' = -\frac{١}{جاص} = -\frac{١}{\sqrt{١-س^{٢}}}$

(٤) $\frac{د ص}{د س} = \frac{د ص}{د ن}\cdot\frac{د ن}{د س}$ ، $\frac{د س}{د ن} = ٣\,جتا^{٣}ن$

$\frac{د ص}{د س} = (-جا٢ن)\times ٣\times\frac{١}{٣\,جتا^{٢}ن} = -ظا٣ن$

$\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}} = -٣\,قا^{٢}٣ن \times \frac{د ن}{د س} = -٣\,قا^{٢}٣ن \times \frac{١}{٣\,جتا^{٢}ن}$

$= -قا^{٣}ن$

$\left.\frac{د^{٢}ص}{د س^{٢}}\right|_{ن=\frac{\pi}{٣}} = -(-١)^{٣} = ١$

تمارين وصائل

(١) أ) $٣س + ٨ص \frac{دص}{دس} = ٠$ ، $\frac{دص}{دس} = -\frac{١}{٤} \times \frac{س}{ص}$

ب) $ص = ٠$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢٧س^٣ + ٤س^٢}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{١}{ص^٢} \times \frac{٣س^٢ + ٨س}{٢٧س^٣ + ٤س^٢} = \frac{٣س^٢ + ٨س}{٤ص^٢ ٢٧س^٣ + ٣س^٢}$

ج) $٣س^٢ + ٣ص^٢ \cdot \frac{دص}{دس} = س \frac{دص}{دس} + ص$

$\frac{دص}{دس}(٣ص^٢ - س) = ص - ٣س^٢$ ، $\frac{دص}{دس} = \frac{ص - ٣س^٢}{٣ص^٢ - س}$

د) $جتا(س ص)(س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = ٢س$

$(س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = \frac{٢س}{جتا(س ص)}$ ، $س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{٢س}{جتا(س ص)} - ص$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٢}{ص \, جتا(س ص)} - \frac{ص}{س}$

(٢) أ) $٣(س ص)^٢ (س \cdot \frac{دص}{دس} + ص) = ٤$

$س \cdot \frac{دص}{دس} + ص = \frac{٤}{٣(س ص)^٢}$

$س \cdot \frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣(س ص)^٢} - ص$ وضع $\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣س(س ص)^٢} - \frac{ص}{س}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٣}(\frac{١}{س^٢ ص^٢}) - \frac{ص}{س}$

$\frac{د^٢ص}{دس^٢} = \frac{٤}{٣} \times \frac{-(س^٢ \times ص \cdot \frac{دص}{دس} + ٣س^٢ ص^٢)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{س^٢ ص (٢ س \cdot \frac{دص}{دس} + ٣ص)}{س^٦ ص^٤} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

$= -\frac{٤}{٣} \times \frac{٢ س \cdot \frac{دص}{دس} + ٣ص}{س^٤ ص^٣} - \frac{س \cdot \frac{دص}{دس} - ص}{س^٢}$

د) $٨س + ٦ص \cdot ص = ٠$ ، $ص = -\frac{٤}{٣} \times \frac{س}{ص}$

$ص = -\frac{٤}{٣}(\frac{ص - س \cdot ص}{ص^٢})$

ج) $\frac{ص}{س} = س(-حاص).صَ + جتاص$

$\frac{ص}{س}(1 + س حاص) = جتاص$ ، $\frac{ص}{س} = \frac{جتاص}{1+س حاص}$

$\frac{ص^{2}}{س^{2}} = \frac{(1+س حاص)(-حاص)صَ - جتاص(س جتاص.صَ + حاص)}{(1+س حاص)^{2}}$

$= \frac{-(حاص)(صَ)(1+س حاص) - جتاص(س صَ جتاص + حاص)}{(1+س حاص)^{2}}$

$= \frac{-حاص صَ - س صَ حا^{2}ص - جتاص حاص}{(1+س حاص)^{2}}$

د) $جتاس = \frac{صَ}{2\sqrt{ص}}$ ومنه $صَ = -2\sqrt{ص}\, جتاس$

$صَ = -2\sqrt{ص}(-حاس) + جتاس \times \frac{2صَ}{2\sqrt{ص}}$

$= 2\sqrt{ص}\, حاس + \frac{صَ جتاس}{\sqrt{ص}}$

(٣) أ) $٨س صَ + ٨ص - حاص.صَ = ٠$

$صَ(٨س - حاص) = -٨ص$ ومنه $صَ = \frac{-٨ص}{٨س - حاص}$

$صَ|_{(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})} = \frac{-٨ \times \frac{\pi}{2}}{٨ \times \frac{\pi}{4} - 1} = \frac{-4\pi}{2\pi - 1}$

ب) $٣س^{2} - (2س صَ + 2ص) + 2ص^{2}.صَ = ٠$

$صَ(2ص^{2} - 2س) = -٣س^{2} + 2ص$

$صَ = \frac{-٣س^{2} + 2ص}{2ص^{2} - 2س}$ ، $صَ|_{(1,-1)} = \frac{-٣ + 2}{2 - ٣} = -1$

ج) $\frac{ص}{س} = ٣ - \frac{٤}{س}$ ومنه $\frac{1}{ص} = \frac{٣س - ٤}{س}$

$\frac{1}{ص}صَ = \frac{(٣س - ٤) - س \times ٣}{(٣س - ٤)^{2}}$ ومنه $صَ = \frac{-٨}{(٣س - ٤)^{2}}$

$صَ|_{(2,1)} = \frac{-٨}{٤^{2}} = -\frac{1}{٨}$

(٣٧)

(٤) $\text{جتا}(س+ص) \times (1+ص') = ص'^{2}(-\text{جا}س) + 2ص ص' \text{جتا}س$

$ص' \text{جتا}(س+ص) + \text{جتا}(س+ص) = 2ص ص' \text{جتا}س - ص'^{2} \text{جا}س$

$ص' (\text{جتا}(س+ص) - 2ص \text{جتا}س) = -\text{جتا}(س+ص) - ص'^{2} \text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{جتا}(س+ص) + ص'^{2} \text{جا}س}{2ص \text{جتا}س - \text{جتا}(س+ص)}$$

(٥) $\frac{1}{2\sqrt{س}} + \frac{ص'}{2\sqrt{ص}} = 0$

$ص' = -\sqrt{\frac{ص}{س}}$

يكون المماس أفقياً إذا كان $ص' = 0$ أي أن:

$\sqrt{س} = 3$ ومنه $س = 9$. يكون المماس أفقياً عند النقطة $(9, 9)$

٦) $ص' = \frac{2}{3}(2س+1)^{-\frac{1}{3}} \times 2 = \frac{4}{3\sqrt[3]{2س+1}}$

٧) $1 = -\text{جتا}ص \cdot ص'$ ومنه $ص' = \frac{-1}{\text{جتا}ص} = -\text{قا}ص$

$ص'' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times ص' = -\text{قا}ص \text{ظا}ص \times -\text{قا}ص$

$= \text{ظا}ص \text{قا}^{2}ص$

٨) $ص \times -2\text{جا}2س + ص' \text{جتا}س = س \times 2\text{جتا}ص \text{جتا}ص \times ص' + \text{جا}ص$

$ص'(\text{جتا}2س - 2س \text{جتا}ص) = \text{جا}2ص + 2ص \text{جا}س$

$$ص' = \frac{\text{جا}2ص + 2ص \text{جا}س}{\text{جتا}2س - 2س \text{جتا}ص}$$

$$ص' \Big|_{(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})} = \frac{\text{جا}\pi + 2 \times \frac{\pi}{2} \text{جتا}\pi}{\text{جتا}\pi - 2 \times \frac{\pi}{2} \text{جتا}\pi} = \frac{0 + \pi}{-1 + \pi} = 2$$

(٩) $س ص'' + ص = جتاس$

$ص'' = \frac{جتاس - ص}{س}$

$ص''' = \frac{س(-جاس - ص') - (جتاس - ص)١}{س^{٢}} = \frac{-س جاس - س ص' - جتاس + ص}{س^{٢}}$

$س ص''' + ٢ ص'' + س ص' = \frac{-س جاس - س ص' - جتاس + ص}{س} + ٢ \times \frac{جتاس - ص}{س} + س ص'$

$= \frac{-س جاس - س ص' - جتاس + ص + ٢ جتاس - ٢ ص + س^{٢} ص'}{س}$

بالتعويض عن $س ص'$ بـ $جاس$ و $س ص'$ بـ $جتاس - ص$

$= \frac{-س^{٢} جاس - س ص' + س ص' + س^{٢} ص}{س} = صفر$

(١٠) $\frac{د ص}{د ن} = \frac{د ص}{د س} \cdot \frac{د س}{د ن} = (٣ ن^{٢} + ٢)(\frac{١}{٤ ن}) = \frac{٣}{٤} ن + \frac{١}{٢ ن}$

$\frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times \frac{د ن}{د س} + \frac{د ن}{د س} \times \frac{-٢ \times د^{٢} ن}{(د س)^{٢}} = \frac{٣}{٤} \times \frac{١}{٤ ن} - \frac{\frac{١}{٢ ن^{٢}} \times ٢}{(٤ ن)^{٢}}$

$= \frac{٣}{١٦ ن} - \frac{١}{(٤ ن)^{٣}}$

$\left. \frac{د^{٢} ص}{د س^{٢}} \right|_{ن = ١} = \frac{٣}{١٦} - \frac{١}{٨} = \frac{١}{١٦}$

(١١) $١ + ص'' = جتاص + ص'$

$ص''' = جتاص \times ص'' + ص' (- جاص) \times ص'$

$(ص')^{٢} جاص = ص'' (جتاص - ١)$

$(ص')^{٢} = ص'' \times \frac{جتاص - ١}{جاص} = ص'' (ظتاص - ظتاص)$

(١٢) $ص'' = جتاس + س ص' + ص$ و $ص'' = -جاس + س ص'' + ص' + ص'$

$ص'' (١ - س) = ٢ ص' - جاس$ و $ص'' = \frac{٢ ص' - جاس}{١ - س}$

$ص'' + ص = \frac{٢ ص' - جاس}{١ - س} + ص = \frac{٢ ص' - جاس + ص - س ص}{١ - س}$

$= \frac{٢ ص' + ص - (جاس + س ص)}{١ - س} = \frac{٢ ص'}{١ - س}$

لأن $ص = جاس + س ص$

مراجعات

(١) معدّل التغير $= \frac{\text{ظا}(س+ص)-\text{ظا}س}{ص}$

$= \frac{\text{ظا}(س+ص)-\text{ظا}س}{ص} = \frac{\frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص}{1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص}-\text{ظا}س}{ص}$

$= \frac{\frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص-\text{ظا}س(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}{1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص}}{ص} = \frac{\text{ظا}س+\text{ظا}ص-\text{ظا}س+\text{ظا}^2س\,\text{ظا}ص}{ص(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}$

$= \frac{\text{ظا}ص(1+\text{ظا}^2س)}{ص(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)} = \frac{\text{ظا}ص\,\text{قا}^2س}{ص(1-\text{ظا}س\,\text{ظا}ص)}$

(٢) $\text{مـ}'(\frac{\pi}{4}) = \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{مـ}(\frac{\pi}{4}+ص)-\text{مـ}(\frac{\pi}{4})}{ص} = \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{جا}(\frac{\pi}{4}+ص)-1}{ص}$

$= \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{جا}\frac{\pi}{4}\,\text{جتا}ص+\text{جتا}\frac{\pi}{4}\,\text{جا}ص-1}{ص} = \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{\text{جتا}ص-1}{ص}$

$= \text{نهـا}_{ص\to 0} \frac{1-2\,\text{جا}^2\frac{ص}{2}-1}{ص} = \text{نهـا}_{ص\to 0} -\frac{2\,\text{جا}^2\frac{ص}{2}}{ص}$ × نهـا جا$\frac{ص}{2}$ = −٢ × صفر = صفر

(٣) $\text{مـ}(س) = \begin{cases} س^2+2س+2 & 0 \le س < 1 \\ 4س+1 & 1 \le س < 2 \\ 4س+2 & 2 \le س < 3 \\ 4س+3 & س = 3 \end{cases}$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} 2س+2 & 0 < س < 1 \\ 4 & 1 < س < 2 \\ 4 & 2 < س < 3 \end{cases}$

$\text{مـ}'(1) = 4$ ، $\text{مـ}'_+(1) = 4$ ، إذن $\text{مـ}'(1) = 4$

$\text{مـ}'(2) = 4$ ، $\text{مـ}'_+(2) = 4$ ، إذن $\text{مـ}'(2) = 4$

$\text{مـ}'(س) = \begin{cases} 2س+2 & 0 < س \le 1 \\ 4 & 1 < س < 2 \\ 4 & 2 < س < 3 \\ \text{غير موجودة} & س = 3 \end{cases}$

(٤٠)

(٤) د) $ص'(س) = \frac{1}{\sqrt{٨س+٥}} \times ل'(س) + ل(س) \times \frac{٨}{٢\sqrt{٨س+٥}}$

$ص'(-١) = \frac{١}{\sqrt{٣}} \times ل'(-١) + ل(-١) \times \frac{٨}{٢\sqrt{٣}} = ٢ \times ٢ + ١ \times \frac{٤}{٢\sqrt{٣}} = ٤\frac{١}{٣}$

ه) $ص'(س) = \frac{(س^{٤}-س)(٥ل(س) \cdot ل'(س)) - (ل(س))^{٥}(٥س^{٤}-١)}{(س^{٤}-س)^{٢}}$

$ص'(-١) = \frac{٢ \times ٥ ل(-١) ل'(-١) - (ل(-١))^{٥}(-٣)}{٤} = \frac{٣ \times ١ \times ٢ \times ٥ - ١ \times -٣}{٤} = \frac{٦١}{٤}$

ج) $ص'(س) = ل'(س) - \frac{س ل'(س) - ل(س)}{س^{٢}}$

$ص'(-١) = ل'(-١) - \frac{-١ ل'(-١) - ل(-١)}{(-١)^{٢}}$

$= ٢ - \frac{-١ \times ٢ - ١}{١} = ٢ + ٣ = ٥$

ز) $ص'(س) = (جا^{٢}\frac{\pi}{٣} ل(س)) + \frac{\pi}{٣} ل'(س)$

$ص'(-١) = جا^{٢}(\frac{\pi}{٣} ل(-١)) \times \frac{\pi}{٣} ل'(-١) = (\frac{\pi}{٣} جا \frac{\pi}{٣}) \times ٢$

$= \frac{٣}{\pi} \times ٤ \frac{\pi}{٢} = \frac{٧\pi}{٣}$

(٥) د) $ص = س جا^{٣}س + ظا س$

$ص' = س \times ٣ جا^{٢}س جتا س + جا^{٣}س + قا^{٢}س$

$= ٣ س جا^{٢}س جتا س + جا^{٣}س (س ظا س + ١)$

$= ٣ جا^{٢}س (١ + ص)$

ب) $\frac{د ص}{د س} = ١$ ومنه $\frac{د س}{د ص} = \frac{١}{جتا ص}$

نجد جتا ص بدلالة س

$جتا^{٢}ص + جا^{٢}ص = ١$ ، $جتا^{٢}ص + س^{٢} = ١$

إذن $جتا^{٢}ص = ١ - س^{٢}$ ومنه $جتا ص = \sqrt{١ - س^{٢}}$ لأن $ص \in (٠, \frac{\pi}{٢})$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{١}{جتا ص} = \frac{١}{\sqrt{١ - س^{٢}}}$

٦) $\frac{د س}{د ن} = ٢$ ومنه $\frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

$\frac{د ص}{د س} = \frac{د ن}{د س} \cdot \frac{د ص}{د ن} = \frac{١}{٢} \times (٣ ن - ٤) = ن - ٢$

$\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{د ن}{د س} = \frac{١}{٢}$

عندما ن = ٦ ، $\frac{د^٢ ص}{د س^٢} = \frac{١}{٢}$

٧) $ل(س) = ٢ هـ(س) \cdot ق(س) + ٢ ه(س) \cdot ه(س)$

$= ٢ هـ(س) \cdot ه(س) + ٢ ه(س) \times - هـ(س) = صفر$

٨) ١) $ه(س) = \begin{cases} ٤(س+١)^٣ & س \leq ٠ \\ ٤(س-١)^٣ & س > ٠ \end{cases}$

٢) $ه'_+(٠) = -٤$ ، $ه'_-(٠) = ٤$ وعليه $ه'(٠)$ غير موجودة

٩) $٣ ص^٢ صَ = ه(٤ س^٢ - س)(٨ س - ١)$

$صَ = \frac{ه(٤ س^٢ - س)(٨ س - ١)}{٣ ص^٢}$

نجد ص عندما س = -١ ، $ص^٣ = ه(٥) = -٨$ ومنه ص = -٢

$صَ|_{س=-١} = \frac{ه(٥)(-٩)}{٣(-٢)^٢} = \frac{٩ \times ٤}{١٢} = -٣$

١٠) $ه(س) = (جتا هـ(س)) ق(س)$

$ه'(س) = (جتا هـ(س)) \cdot ق'(س) + ق(س)(- جا هـ(س)) \times هـ'(س)$

$ه'(١) = جتا هـ(١) \times ق'(١) - ق(١) جا هـ(١) \times هـ'(١)$

$= (جتا \frac{\pi}{٣}) \times ٤ - صفر = \frac{١}{٢} \times ٤ = ٢$

١١) $ق(س) = ٣ س^٢ + ٢$ ، $ه(س) = ٦ س$ ، $هـ(س) = ٦ - س$

$(ق ٥ ص)'(س) = ق'(هـ(س)) \cdot هـ'(س)$

$(ق ٥ ص)'(٢) = ق'(هـ(٢)) \cdot هـ'(٢) = ق'(١٢) \times ٢$

$= ٧٦ \times ١٢ = ٨٦٤$

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = ((هـ \circ ص)'(س))'$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص''(س) = ٦$

$= (هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص(س)) \cdot ص'(س) + ص''(س) \cdot هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) + ص''(٢) \cdot هـ'(ص(٢)) \cdot ص'(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ + ١٢ \times ٦ \times ١٢ = ٧٢ \times ٦ + ٤٣٢ \times ٦$

$= ١٦١٢$

(١٢) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٣ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -٥ ص'(١)$ ومنه $ص'(١) = -\frac{٣}{٥}$

(١٣) $\frac{ص}{س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\frac{ص}{س}|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٣ + ٦ = ٤$

(١٤) $ظا ص \cdot ص' = ٢ ظا س$ ومنه $ص' = \frac{٢ ظا س}{ظا ص}$

$ظا ص \times ص' + ص'(-ظا ص) \cdot ص' = ٢ ظا س ظا س$

$ص' ظا ص - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س ظا ص$

بالاستعانة بالعلاقة $ظا ص$

$ص' ظا ص - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س ظا ص$ بالقسمة على $ظا ص$

$ص' - (ص')^٢ ظا ص = ٢ ظا^٢ س ظا ص$

$ظا ص (٢ ظا^٢ س + (ص')^٢) = ص'$. اذن $ظا ص = \frac{ص'}{٢ ظا^٢ س + (ص')^٢}$

(١٥) $هـ'(٣س - ١)(٣) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{٢}{س^٣}$

$هـ'(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{٢}{٤} - \frac{٢}{٨}) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{١٢}$

(١٦) $ظا ص \cdot ص' - (س ص' + ص) = ٢$

$ظا ص \cdot ص'' + ص'(-ظا ص \cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص'' ظا ص + (ص')^٢ ظا ص + س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س + ظا ص) + ص'(٢ + ص' ظا ص) = ٠$

ب) $(هـ \circ ص)''(س) = (هـ' \circ ص)'(س)$ ، $هـ''(س) = ٦$ ، $ص'(س) = ٦$

$= (هـ'(ص س) \cdot ص'(س))'$

$= هـ''(ص س) \cdot ص'(س) + ص'(س) \cdot هـ''(ص س) \cdot ص'(س)$

$(هـ \circ ص)''(٢) = هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢) + ص'(٢) \cdot هـ''(ص(٢)) \cdot ص'(٢)$

$= هـ''(١٢) \times ٦ + ١٢ \times ٦ \times ١٢ = ٧٢ \times ٦ + ٤٣١٢ \times ٦$

$= ١٦١٢$

(٤٢)

١٢) $ل'(س) = هـ'(ص(س)) \cdot ص'(س)$

$ل'(١) = هـ'(ص(١)) \cdot ص'(١)$ ، $٣ = هـ'(٤) \times ص'(١)$

$ص'(١) = -٥$ ، $ص'(١) = -\frac{٣}{٥}$

١٣) $\frac{د ص}{د س} = س ص'(س) + ص(س)$

$\left.\frac{د ص}{د س}\right|_{س=-١} = -١ \times ص'(-١) + ص(-١) = -١ \times ٤ + ٦ = ٢$

١٤) $ظا ص \cdot ص' = قا^٢ س$ ومنها $ص' = \frac{قا^٢ س}{ظا ص}$

$جتا ص \times ص' + ص'(-جا ص) \cdot ص' = قا س قا س ظا س$

$ص'' جتا ص - (ص')^٢ جا ص = قا^٢ س ظا س$

باستبدال جا ص بـ ظا س

$ص'' جتا ص - (ص')^٢ جا ص = قا^٢ س$ جا ص بالقسمة على جتا ص

$ص'' - (ص')^٢ ظا ص = قا^٢ س ظا ص$

$ظا ص (قا^٢ س + (ص')^٢) = ص''$. اذن $ظا ص = \frac{ص''}{قا^٢ س + (ص')^٢}$

١٥) $هـ'(٣س - ١)(٣) = \frac{-٢س}{س^٤} + \frac{١}{س^٢}$

$هـ'(٣س - ١) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{س^٢} - \frac{٢}{س^٣})$ ، $٣س - ١ = ٥$ عندما $س = ٢$

$هـ'(٥) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤} - \frac{٢}{٨}) = \frac{١}{٣}(\frac{١}{٤}) = \frac{١}{١٢}$

١٦) $-$ جا ص $\cdot ص' - (س ص' + ص) = ٢$

$-$ جا ص $\cdot ص'' + ص'(-$ جتا ص $\cdot ص') - (س ص'' + ص' + ص') = ٠$

$ص''$ جا ص $+ (ص')^٢$ جتا ص $+ س ص'' + ٢ ص' = ٠$

$ص''(س +$ جا ص$) + ص'(٢ +$ جتا ص$) = ٠$

(٤٣)

(١٧) $ص = ب جتا س + ب جا س$

$(ص)^2 + ص'^2 = ب^2 جتا^2 س + ب^2 جا^2 س + 2ب جا س جتا س$

$+ ب^2 جا^2 س + ب^2 جتا^2 س - 2ب جا س جتا س$

$= جتا^2 س (ب^2 + ب^2) + جا^2 س (ب^2 + ب^2)$

$= (ب^2 + ب^2)(جتا^2 س + جا^2 س) = ب^2 + ب^2$

(١٨) ب) $3ص^2 ص = هـ(س^3 - س)(3س - 1)$

عندما $س = 2$ يكون $ص^2 = هـ(6) = -8$ ومنه $ص = -2$

$3(-2)^2 ص|_{س=2} = هـ(6) \times -9$

$12 ص|_{س=2} = 4 \times -9 = -36$ ، $ص|_{س=2} = \frac{-36}{12} = -3$

(١٩) ج) $هـ(س) = 3س^2 - 2س$ ، $هـ'(س) = 6س - 2$ ، $هـ''(س) = 6$

$ق(س) = 6س + 1$ ، $ق'(س) = 6$

$(هـ \circ ق)'(1) = هـ'(ق(1)) \cdot ق'(1)$

$= هـ'(4) \times 7 = 22 \times 7 = 154$

ب) $(هـ \circ ق)''(س) = ((هـ \circ ق)')'(س) = (هـ'(ق(س)) \cdot ق'(س))'$

$= هـ''(ق(س)) \cdot ق'(س) + ق'(س)(هـ''(س) \cdot ق'(س))$

$(هـ \circ ق)''(1) = هـ''(ق(1)) \cdot ق'(1) + ق'(1)(هـ''(ق(1)) \cdot ق'(1))$

$= هـ''(4) \times 6 + 7 (هـ''(4) \times 7)$

$= 22 \times 6 + 7 \times 7 \times 6 = 264$

(٢٠) ج) $س = 0$ ، ب) $س = -10$ ، ٦

(٢١) ١) جـ ، ٢) ب ، ٣) د ، ٤) ج

٥) جـ ، ٦) ج ، ٧) د ، ٨) ب

رياضيات / العلمي / ف ١

إجابات أسئلة وتمارين

الوحدة الثالثة

تطبيقات التفاضل

تدريب (١) ص ١٦٢ :

$م(س) = \sqrt{س + ٣}$ عند $(١ ، ٢)$

ميل المماس $= م'(س)|_{س=١} = \frac{١}{٢\sqrt{س+٣}}|_{س=١} = \frac{١}{٢\times ٢} = \frac{١}{٤}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ١)$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -٤(س - ١)$

تدريب (٢) ص ١٦٢ :

$م(س) = \frac{٤}{س}$ ، $د(س) = س$

يتقاطعان عندما $م(س) = د(س) \Leftarrow \frac{٤}{س} = س \Leftarrow ٤ = س^٢ \Leftarrow س = \pm ٢$

ميل المماس لـ $م(س)$ عند $س = -٢$ هو $م'(-٢) = \frac{-٤}{(-٢)^٢} = \frac{-٤}{٤} = -١$

ميل المماس لـ $د(س)$ عند $س = -٢$ هو $د'(-٢) = ١$

وحيث أن $د'(-٢) \times م'(-٢) = ١ \times -١ = -١$ ∴ متعامدان

تدريب (٣) ص ١٦٣ :

$م(س) = جا س$: $س \in [٠ ، ٢\pi]$

ميل المماس الأفقي لـ $م(س) \Leftarrow م'(س) = ٠ \Leftarrow$ جتا $س = ٠$

$س = \frac{\pi}{٢}$ أو $\frac{٣\pi}{٢}$

∴ المماس الأفقي لـ $م(س) = جا س$ عند $س = \frac{\pi}{٢}$ أو $\frac{٣\pi}{٢}$

تدريب (٤) ص ١٦٤ :

$م(س) = ج س^٣ + د س^٢ + ٢$ ، ميل المماس لـ $م(س)$ عند $س = ١$ هو $م'(١) = ٣ج + ٢د$

$م'(١) = ظا ١٣٥°$

$٣ج + ٢د = -١ \Leftarrow ٥ص = -١ \Leftarrow ص = \frac{-١}{٥} = -٠,٢$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٥) ص ١٦٥

$ق(س) = ٥ - س^٢$ ، النقطة $(٣، ١-)$ لا تقع على منحنى $ق(س)$

افرض أن النقطة $(س_١، ص_١)$ نقطة تماس لمنحنى $ق(س)$ $\Leftarrow ص_١ = ٥ - س_١^٢$

ميل المماس عند $(س_١، ص_١) = ق'(س_١) = -٢س_١$

معادلة المماس: $ص - ٠ = -٢س_١(س - ٣)$

$ق(س_١) = ص_١ \Leftarrow ٥ - س_١^٢ = -٢س_١(س_١ - ٣)$

$٥ - س_١^٢ = -٢س_١^٢ + ٦س_١ \Leftarrow س_١^٢ - ٦س_١ + ٥ = ٠ \Leftarrow (س_١ - ١)(س_١ - ٥) = ٠$

$س_١ = ١$ أو $س_١ = ٥$

نقطة التماس الأولى $(١، ٤)$ ومعادلة المماس الأولى: $ص - ٤ = -٢(س - ١)$

" " الثانية $(٥، -٢٠)$ " " الثانية: $ص + ٢٠ = -١٠(س - ٥)$

تمارين ومسائل

ص ١٦٦

١) $ق(س) = س^٢ + ٦س + ٥$ ، $ق'(س) = ٢س + ٦$

ميل المماس عند $(١، ٢) = ق'(١) = ٨$

٢) $ق(س) = س^٣$ يتقاطع مع المستقيم $ص = س + ٦$ عندما

$ق(س) = ص \Leftarrow س^٣ = س + ٦ \Leftarrow س^٣ - س - ٦ = ٠ \Leftarrow س = ٢$

ميل المماس $|_{س=٢} = ق'(٢) = ٣(٢)^٢ = ١٢$

معادلة المماس: $ص - ٨ = ١٢(س - ٢)$

عند $(٢، ٨)$

٣) $ق(س) = س^٣ - ٣س + ٣$ ، $ق'(س) = ٣س^٢ - ٣$

ميل المماس $= ق'(س) = ظا\frac{\pi}{٤} = ١ \Leftarrow ٣س^٢ - ٣ = ١ \Leftarrow ٣س^٢ = ٤ \Leftarrow س = ١$

النقطة $(١، ١)$

٤) $(ص - ٤)^٢ = س + ٢ \Leftarrow ٢(ص - ٤) \times \frac{دص}{دس} = ١ \Leftarrow \frac{دص}{دس} = \frac{١}{٢ص - ٨}$

ميل المماس $=$ ميل المستقيم $\Leftarrow \frac{١}{٢ص - ٨} = -\frac{١}{٢} \Leftarrow ٢ص - ٨ = ٦ \Leftarrow ص = ٣$

$\therefore$ النقطة $(-١، ٣)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

٥) $ق(س) = -س^3 - ٤س + ٣$ ، $ق'(س) = -٣س^2 - ٤$ ، ميل المحور $= -٢$

ميل المماس المتجه لأعلى $= ق'(س_١) = -٢ \Leftarrow -٣س_١^2 - ٤ = -٢ \Leftarrow س_١ = ١$

$(١ ، ١)$

معادلة المحور: $ص - ٠ = -٢(س - ١) \Leftarrow ص = -٢س + ٢$

٦) $ق(س) = \frac{س}{س^2}$ عند $(١ ، ٢)$ ، $ق'(س) = \frac{-س^2}{س^4}$

ميل المماس $= ق'(١) = -١$ ، ميل العمودي $= ١$

معادلة المماس: $ص - ٢ = -١(س - ١)$

معادلة العمودي: $ص - ٢ = ١(س - ١)$

٧) $ق(س) = س^3 + ب س + ج$ عند $(٥ ، ٢)$ ، $ق'(س) = ٣س^2 + ب$

$ق(١) = ٢ \Leftarrow \boxed{ج = ٦}$

$ق'(١) =$ ميل المستقيم $= ١ \Leftarrow ق'(١) = ب = ١ \Leftarrow \boxed{ب = ١}$

٨) $ق(س) = \frac{س^3}{٣}$ حيث المستقيم $٢س - ص + ج = ٠$ ، $ق'(س) = \frac{س^2}{٣}$ ، $ص = ٢$

$ق'(س_١) = ص \Leftarrow \frac{س^2}{٣} = ٢ \Leftarrow س^2 = ٦ \Leftarrow س = \pm ٦$

$ق(١) = |ص|_{س=١} \Leftarrow \frac{١}{٣} = ٢ + ج \Leftarrow \boxed{ج = -\frac{٥}{٣}}$

$ق(-١) = |ص|_{س=-١} \Leftarrow ٢ = -٢ + ج \Leftarrow \boxed{ج = ٤}$

٩) العلاقة $س = ص^2 - ٤ص$ تتقاطع مع محور الصادات عندما $س = ٠$

$ص^2 - ٤ص = ٠ \Leftarrow ص(ص - ٤) = ٠ \Leftarrow ص = ٠$ ، $ص = ٤$

النقطة الأولى $(٠ ، ٠)$ ، النقطة الثانية $(٤ ، ٤)$

معادلة المماس الأولى: ميل المماس $= ١ \Leftarrow ٢ص \cdot ص' - ٤ص' = ١ \Leftarrow ص' = \frac{١}{٢ص - ٤}$

$ص - ٠ = -\frac{١}{٤}(س - ٠)$

معادلة المماس الثانية:

$ص - ٤ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

١٠) العلاقة $ص^2 + ٦ص = س^2 + ٤س - ٢$ ، $٢ص\,ص' + ٦ص' = ٢س + ٤$

$ص' = \frac{٢س + ٤}{٢ص + ٦} = \frac{س + ٢}{ص + ٣}$ ميل مماس منحنى العلاقة

$ص' \Big|_{(-١، ١)} = ظا\theta \Leftarrow \frac{٢}{-٢} = ظا\theta \Leftarrow ظا\theta = -١$ ، $\theta = ١٣٥°$

١١) $ص = ٣ جتاس + ٢ قاس$ ، المنحنى $(\frac{\pi}{٤}، ٥)$ عند $س = \frac{\pi}{٤}$

$ص' = -٣ جتاس ظاس + ٢ قاس ظاس$

ميل المماس $= ص'(\frac{\pi}{٤}) = -٣ \times ٢ \times ١ + ٢ \times ٢ = -٢$

ميل العمودي $= \frac{١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ٥ = -٢(س - \frac{\pi}{٤})$

معادلة العمودي : $ص - ٥ = \frac{١}{٢}(س - \frac{\pi}{٤})$

١٢) منحنى $ص = ق(س)$ يمر بـ $(١، ١)$ ، ميل المماس $= ق'(س) = س^2 - \frac{٣}{٢}س + \frac{٣}{٢}$ عند $(١، ١)$

عند $س = ١ \Leftarrow$ ميل المماس $= ١ - \frac{٣}{٢} + \frac{٣}{٢} = ١$

ميل المماس $= ق'(١) = \frac{١}{٢١} \times ٢١ = \frac{١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ١ = \frac{١}{٢}(س - ١)$

١٣) ميل المماس $= ق'(٤) = \frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$ ، معادلة المماس : $ص - ٢ = \frac{١}{٤}(س - ٤)$

$ص = \frac{١}{٤}س + ١$

المماس يقطع السينات عندما $ص = ٠ \Leftarrow س = -٤$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٢ = ٨$ وحدات مربعة

١٤) ميل المماس عند $(٢، ١) = ق'(١) = ٢ - ٢ جتاس = ١ = ٢ \Leftarrow$ ميل العمودي عند $(٢، ١) = -\frac{١}{٢}$

معادلة المماس : $ص - ٢ = ٢(س - ١) \Leftarrow ص = ٢س$ تقطع محور السينات عند $س = ٠$

معادلة العمودي : $ص - ٢ = -\frac{١}{٢}(س - ١) \Leftarrow ص = -\frac{١}{٢}س + \frac{٥}{٢}$ تقطع محور السينات عند $س = ٥$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٥ \times ٢ = ٥$ وحدات مربعة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تطبيقات فيزيائية

تدريب (١) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ٤ جا ٣ن - ٥ جتا ٣ن$

$ف(\frac{\pi}{٤}) = ٤ جا \frac{\pi}{٤} - ٥ جتا \frac{\pi}{٤} = ٤\sqrt{٢} - ٠ = ٤$ متر

$ع(ن) = ١٢ جتا ٣ن + ١٥ جا ٣ن \Rightarrow ع(\frac{\pi}{٤}) = ١٢ جتا \frac{\pi}{٤} + ١٥ جا \frac{\pi}{٤} = ٠ + ١٥ = ١٥$ م/ث

$ج(ن) = -٣٦ جا ٣ن + ٤٥ جتا ٣ن \Rightarrow ج(\frac{\pi}{٤}) = -٣٦ جا \frac{\pi}{٤} + ٤٥ جتا \frac{\pi}{٤} = -٣٦ + ٠ = -٣٦$ م/ث^٢

تدريب (٢) ص ١٦٩ :

$ف(ن) = ن^٣ - ٩ن^٢ + ١٥ن$ ، $ع(ن) = ٣ن^٢ - ١٨ن + ١٥ = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٥) = ٠$

$ن = ١$ ث ، $ن = ٥$ ث

$ج(ن) = ٦ن - ١٨ \Rightarrow ج(١) = ٦ - ١٨ = -١٢$ م/ث^٢ ، $ج(٥) = ٣٠ - ١٨ = ١٢$ م/ث^٢

تدريب (٣) ص ١٧٠ :

$ف(ن) = ٥ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٥ - ١٠ن \Rightarrow ع(٥) = ٥ - ٥٠ = -٤٥$ م/ث

$ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = ٠.٥$ ث حيث تكون الكرة في أعلى ارتفاع

$ف(٠.٥) - ل = ٠ \Rightarrow ١.٢٥ - ٢.٥ - ل = ٠ \Rightarrow ل = ١.٢٥$ م ارتفاع البرج

تمارين ومسائل ص ١٧١

١) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٣$

٢) $ع(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Rightarrow ع(١) = ٩$ م/ث

٣) $ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Rightarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

٤) $ف(١) = ج(١) = ٦ن - ١٢ \Rightarrow ج(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ج(٣) = ٦$ م/ث^٢

٥) $ف(ن) = ٢ جا(\frac{\pi}{٤}ن) + \frac{\pi}{٤}ن$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢ جتا \frac{\pi}{٤}ن \times \frac{\pi}{٤} + \frac{\pi}{٤} = جتا \frac{\pi}{٤}ن + \frac{\pi}{٤} \Rightarrow جتا \frac{\pi}{٤}ن = ٠ \Rightarrow \frac{\pi}{٤}ن = \frac{\pi}{٢}$

$ن = ٢$ ث $\Rightarrow ف(٢) = ج(٢) = جتا \pi = -١$ م/ث^٢ $\Rightarrow ع(\frac{\pi}{٤}) = جتا \frac{\pi}{٢} = ٠$ م/ث

٦) $ف(ن) = ١٩.٦ن - ٤.٩ن^٢$ يمثل حركة جسم

$ع(ن) = ف'(ن) = ١٩.٦ - ٩.٨ن \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = \frac{١٩.٦}{٩.٨} = ٢$ ث

$ف(٢) = ١٩.٦ \times ٢ - ٤.٩ \times ٤ = ٣٩.٢ - ١٩.٦ = ١٩.٦$ م

ب) $ع(٢) = ١٩.٦ - ٩.٨ \times ٢ = -١٩.٦$ م/ث

ج) $ع(٤) = ١٩.٦ - ٩.٨ \times ٤ = -١٩.٦$ م/ث

د) $ع(ن) = ج(ن) = -٩.٨$ م/ث^٢

هـ) $ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = ٢$ ث

و) $ف(ن) = ١٢ن - ٢ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ١٢ - ٤ن \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = ٣$ ث

$ف(٣) = ١٢ \times ٣ - ٢ \times ٩ = ١٨$ م

ز) $ع(٣) = ١٢ - ٤ \times ٣ = ٠$

ح) $ع(٤) = ١٢ - ٤ \times ٤ = -٤$ م/ث

ط) $ج(ن) = ف''(ن) = -٤$ م/ث^٢

ي) $ف(٤) = ١٢ \times ٤ - ٢ \times ١٦ = ١٦$ م

ك) $ف(٥) = ١٢ \times ٥ - ٢ \times ٢٥ = ١٠$ م

ل) $ع(٥) = ١٢ - ٤ \times ٥ = -٨$ م/ث

م) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Rightarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

$ف(١) = ١ - ٦ + ٩ = ٤$ م ، $ف(٣) = ٢٧ - ٥٤ + ٢٧ = ٠$

$ج(ن) = ٦ن - ١٢ \Rightarrow ج(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ج(٣) = ٦$ م/ث^٢

ن) $ف(ن) = ن^٣ - ٦ن^٢ + ٩ن + ٣$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٣ن^٢ - ١٢ن + ٩ \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ٣(ن-١)(ن-٣) = ٠ \Rightarrow ن = ١$ ث ، $ن = ٣$ ث

$ف(١) = ١ - ٦ + ٩ + ٣ = ٧$ م ، $ف(٣) = ٢٧ - ٥٤ + ٢٧ + ٣ = ٣$ م

$ج(ن) = ٦ن - ١٢ \Rightarrow ج(١) = -٦$ م/ث^٢ ، $ج(٣) = ٦$ م/ث^٢

س) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢$

$ع(ن) = ف'(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(ن) = ٠ \Rightarrow ن = ٢$ ث

$ف(٢) = ٢٠ \times ٢ - ٥ \times ٤ = ٢٠$ م

ع) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٣) = ٢٠ - ٣٠ = -١٠$ م/ث

ف) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٤) = ٢٠ - ٤٠ = -٢٠$ م/ث

ص) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٥) = ٢٠ - ٥٠ = -٣٠$ م/ث

ق) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٦) = ٢٠ - ٦٠ = -٤٠$ م/ث

ر) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٧) = ٢٠ - ٧٠ = -٥٠$ م/ث

ش) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٨) = ٢٠ - ٨٠ = -٦٠$ م/ث

ت) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(٩) = ٢٠ - ٩٠ = -٧٠$ م/ث

ث) $ف(ن) = ٢٠ن - ٥ن^٢ \Rightarrow ع(ن) = ٢٠ - ١٠ن \Rightarrow ع(١٠) = ٢٠ - ١٠٠ = -٨٠$ م/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

هـ) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢$ ⟸ $ف(ن) = ٨٠$ ⟸ $٩٦ن - ١٦ن^٢ = ٨٠ \Leftarrow ١٦(ن-١)(ن-٥) = ٠$

$ن = ٥$ ، $ن = ١$ ⟸ $ع(١) = ٦٤$ م/ث ، $ع(٥) = -٦٤$ م/ث

و) $ف(ن) = ٩٦ن - ١٦ن^٢$ ⟸ $ع(ن) = ٩٦ - ٣٢ن$ ⟸ $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ن = \frac{٩٦}{٣٢} = ٣$ ث

ف $(٣) = ٩٦(٣) - ١٦(٣)^٢ = ١٤٤$ م

ز) $ف(ن) = ٨٠ \Leftarrow ٩٦ن - ١٦ن^٢ = ٨٠ \Leftarrow ن = ٥$ ، $ن = ١$

ح) $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٩٦ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ن = ٣$ ث ، زمن الصعود + زمن الهبوط $= ٦$ ث

ط) $ع(ن) = ٠ \Leftarrow ٩٦ - ٣٢ن = ٠ \Leftarrow ن = ٣$ ث ، زمن الصعود $= ٣$ ث

ي) $ف(ن) = ٤٠ن - ٥ن^٢$ ، $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$

ك) $ف(٣) = ٤٠(٣) - ٥(٣)^٢ = ١٢٠ - ٤٥ = ٧٥$ م

ل) $ف(ن) = ٨٠ \Leftarrow ٤٠ن - ٥ن^٢ = ٨٠ \Leftarrow ن^٢ - ٨ن + ١٦ = ٠ \Leftarrow (ن-٤)^٢ = ٠ \Leftarrow ن = ٤$ ث

م) $ف(ن) = ٠ \Leftarrow ٤٠ن - ٥ن^٢ = ٠ \Leftarrow ن = ٨$ ث

ن) $ع(٣) = ٤٠ - ١٠(٣) = ١٠$ م/ث

س) $ع(٨) = ٤٠ - ١٠(٨) = -٤٠$ م/ث

ع) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ت = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ت(٠) = ٤٠$ م/ث ، $ت(٨) = -٤٠$ م/ث

ف) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ت = -١٠$ م/ث^٢

ص) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٠) = ٤٠$ م/ث ، $ع(٨) = -٤٠$ م/ث

ق) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٣) = ١٠$ م/ث ، $ع(٥) = -١٠$ م/ث

ر) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٤) = ٠$ م/ث

ش) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٣) = ١٠$ م/ث ، $ع(٥) = -١٠$ م/ث

ت) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٤) = ٠$ م/ث

ث) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٣) = ١٠$ م/ث ، $ع(٥) = -١٠$ م/ث

خ) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٤) = ٠$ م/ث

ذ) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٣) = ١٠$ م/ث ، $ع(٥) = -١٠$ م/ث

ض) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٤) = ٠$ م/ث

ظ) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٣) = ١٠$ م/ث ، $ع(٥) = -١٠$ م/ث

غ) $ع(ن) = ٤٠ - ١٠ن$ ⟸ $ع(٤) = ٠$ م/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

المعدلات المرتبطة بالزمن

تدريب (١) صـ١٧٥ :

$\frac{ds}{dt} = -10$ م/ث ،

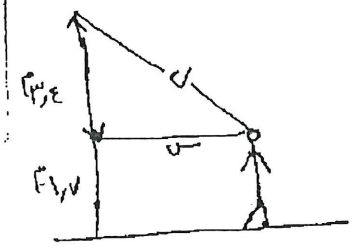
$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{ds} \times \frac{ds}{dt}$ ⇐ $A = \pi r^2$ ، $\frac{dA}{ds} = 2\pi r$

$\left|\frac{dA}{dt}\right|_{r=10} = 2\pi \times 10 \times -10 = -200\pi$ سم^2/ث

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ ⇐ $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ، $\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$

$\left|\frac{dV}{dt}\right|_{r=10} = 4\pi \times 10^2 \times -10 = -400\pi$ سم^3/ث

تدريب (٢) صـ١٧٥ :



$\frac{ds}{dt} = 2$ م/ث ، $\frac{dL}{dt} = ?$ عندما $s = 3$ م

$L = \sqrt{s^2 + (3,4)^2}$ ⇐ $\frac{dL}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt} \times s}{\sqrt{s^2 + (3,4)^2}}$

$\left|\frac{dL}{dt}\right|_{s=3} = \frac{2 \times 3}{\sqrt{3^2 + (3,4)^2}} = \frac{6}{\sqrt{20,56}}$ م/ث

تدريب (٣) صـ١٧٧

$\frac{d\theta}{dt} = 0,5$ ق/د

م $= \frac{1}{2} \times 8 \times 12 \times \sin\theta$ ⇐ $\frac{dA}{dt} = 24 \sin\theta \times \frac{d\theta}{dt}$

$\left|\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=60°} = 24 \times \sin 60° \times 0,5 = 10,4$ سم^2/د

ب) $\left|\frac{dA}{dt}\right|_{\theta=150°} = 24 \times \sin 30° \times 0,5 = -6$ سم^2/د

تمرين (١) صـ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = -1000$ سم/ث ، حيث س بالسم :

$V = s^3$ ⇐ $\frac{dV}{dt} = 3s^2 \times \frac{ds}{dt}$

$\left|\frac{dV}{dt}\right|_{s=10} = 3 \times 100 \times -1000 = -300000$ سم^3/ث

$A = 6s^2$ ⇐ $\frac{dA}{dt} = 12s \times \frac{ds}{dt}$

$\left|\frac{dA}{dt}\right|_{s=10} = 12 \times 10 \times -1000 = -120000$ سم^2/ث

تمرين (٥) صـ١٧٩

$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}$ م/ث ، $\left|\frac{dx}{dt}\right|_{x=2\sqrt{3}}$ = ؟

$s^2 + x^2 = 25 \Rightarrow x = \sqrt{25 - s^2}$ ⇐ $\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \frac{-2s}{2\sqrt{25-s^2}}$ ⇐ $\frac{dx}{dt} = \frac{-s}{\sqrt{25-s^2}} \times \frac{1}{2}$

$\left|\frac{dx}{dt}\right|_{x=2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{4}$ م/ث

٣) تدريب (٣) :

$\frac{dV}{dt} = 12\pi$ سم^3/ث ، $\left|\frac{dr}{dt}\right|_{h=6}$ = ؟

$\frac{r}{h} = \frac{4}{12}$ ⇐ $\frac{r}{h} = \frac{1}{3}$

$r = \frac{1}{3}h$

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times \frac{1}{9}h^2 \times h = \frac{\pi}{27}h^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{9}h^2 \times \frac{dh}{dt} \Rightarrow 12\pi = \frac{\pi}{9} \times 36 \times \frac{dh}{dt}$ ⇐ $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \times 3h^2 \times \frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{12}{4\pi}$ سم/ث $= \frac{3}{\pi}$ سم/ث ⇐ $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\pi}$ سم/ث

$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \times \frac{dr}{dt}$ ⇐ $\left|\frac{dA}{dt}\right| = 2\pi \times 3 \times \frac{1}{\pi} = 6$ سم^2/ث

$r = 3$ سم
$h = 6$ سم

تدريب (٤) :

$\frac{ds}{dt} = 3$ كم/ساعة ، $\frac{dx}{dt} = 4$ كم/ساعة

$\frac{dz}{dt}$ = ؟
$x = 4$ كم
$s = 3$ كم

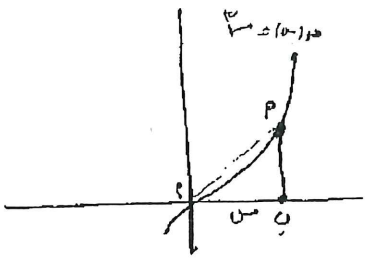
$z = \sqrt{s^2 + x^2 - 2sx\cos\theta} = \sqrt{s^2 + x^2 - sx}$

$\frac{dz}{dt} = \frac{2s\frac{ds}{dt} + 2x\frac{dx}{dt} - s\frac{dx}{dt} - x\frac{ds}{dt}}{2\sqrt{s^2+x^2-sx}}$

$\left|\frac{dz}{dt}\right| = \frac{2\times3\times3 + 2\times4\times4 - 3\times4 - 4\times3}{2\sqrt{9+16-12}} = \frac{18+32-12-12}{2\sqrt{13}} = \frac{26}{2\sqrt{13}} = \sqrt{13}$ كم/ساعة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٥)



$\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث ، $\left|\frac{dV}{dt}\right|_{N=\text{ثابت}} = ?$

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times س^2 \times س = \frac{1}{3} \pi س^3$

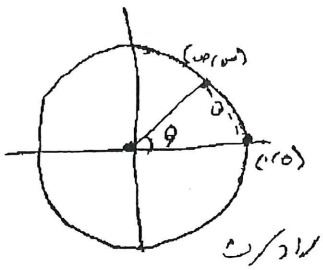
$\frac{dV}{dt} = \pi س^2 \frac{ds}{dt}$ ، س = ٣ سم ، $\frac{ds}{dt} = 2$ سم/ث

$\left|\frac{dV}{dt}\right|_{\substack{N=1 \\ س=3}} = \pi \times 3^2 \times 2 = 18\pi$ سم³/ث

$ل^2 = س^2 + ص^2 = س^2 + (س^3)^2 = س^2 + س^6$ ⟸ $ل = \sqrt{س^2 + س^6}$

$\frac{dل}{dt} = \frac{(2س + 6س^5)}{2\sqrt{س^2 + س^6}} \frac{ds}{dt}$ ⟸ $\left|\frac{dل}{dt}\right|_{\substack{N=1 \\ س=2}} = \frac{(2 + 6)\times 2}{2\sqrt{4 + 64}} = \frac{16}{\sqrt{68}} = \frac{16}{2\sqrt{17}}$

تمرين (٦)



$\frac{dص}{dt} = -0.1$ سم/ث ، $\left|\frac{dθ}{dt}\right|_{θ=\frac{\pi}{6}} = ?$

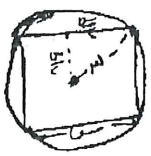
$ل = 1$ ⟸ $ل = 2$ جتا θ ⟸ $\frac{dل}{dt} = 0$ ⟸ $\frac{dص}{dt} = -\frac{dθ}{dt}$ ⟸ $\frac{dθ}{dt} = \frac{0.1}{0.5} = 0.2$ راد/ث

$ب = \sqrt{5 + 4 - 2 \times 2 \times 0.5 \times \text{جتا}\theta} = \sqrt{5 - 2\text{جتا}\theta}$

$\frac{dب}{dt} = \frac{2\text{جا}\theta \times \frac{dθ}{dt}}{2\sqrt{5 - 2\text{جتا}\theta}}$ ⟸ $\frac{dب}{dt} = \frac{\text{جا}\theta \times \frac{dθ}{dt}}{\sqrt{5 - 2\text{جتا}\theta}}$

$\left|\frac{dب}{dt}\right|_{θ=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} \times 0.2}{\sqrt{5 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{0.1}{\sqrt{5 - \sqrt{3}}}$ ⟸ $\frac{0.1}{\sqrt{3.27}} = 0.055$ م/ث

تمرين (٧) :



$\frac{dس}{dt} = 3$ سم/ث ، $\left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=10} = ?$

$ح = \text{نهـ}\pi - س^3$

$\frac{dح}{dt} = 3\pi$ هـ$^{\pi - س^3} \frac{dس}{dt} = 3\pi$ هـ$^{\pi - س^3}$ ⟸ $\left|\frac{dح}{dt}\right|_{س=10} = 3\pi$ هـ$^{\pi - 1000} = 3\pi$ هـ$^{-999}$ سم³/ث

$ح = \frac{1}{3} \pi س^3$ ⟸ $\frac{dح}{dt} = \pi س^2 \frac{dس}{dt}$

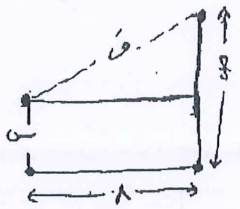
$\left|\frac{dس}{dt}\right|_{ح=36\pi} = ?$

$ح = \frac{1}{3} \pi س^3$ ⟸ $36\pi = \frac{1}{3} \pi س^3$ ⟸ $س^3 = 108$ ⟸ $س = 3\sqrt[3]{4}$

$\frac{dح}{dt} = \pi س^2 \frac{dس}{dt}$ ⟸ $\left|\frac{dس}{dt}\right|_{\substack{ح=36\pi \\ س=3\sqrt[3]{4}}} = \frac{\frac{dح}{dt}}{\pi س^2} = \frac{3\pi}{\pi \times 9\sqrt[3]{16}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{16}}$ سم/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٩):



$\frac{ك ص}{ك ن} = ٢م/ث$ ، $\frac{ك س}{ك ن} = ١م/ث$ ، $\left|\frac{ك ف}{ك ن}\right|$ = ؟ عندما ن = ٢ ثانية

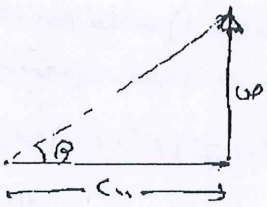
$ف = \sqrt{(ص - ٥)^٢ + ٣٤}$ ⇐ $\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{٢(ص - ٥)(\frac{ك ص}{ك ن} - \frac{ك س}{ك ن})}{٢\sqrt{(ص - ٥)^٢ + ٣٤}}$

$\frac{ك ف}{ك ن} = \frac{(٨ - ٣)(٢ - ١)}{\sqrt{٣٦ + ٣٤}} = \frac{٦}{١٠} = ٠,٦$ م/ث

$س = \frac{ك س}{ك ن} \times ٢ = ١ \times ٢ = ٢$ م

$ص = \frac{ك ص}{ك ن} \times ٤ = ٢ \times ٤ = ٨$ م

تمرين (٦):



$\frac{ك ص}{ك ن} = ١٠$م/ث ، $\left|\frac{ك ه}{ك ن}\right|$ = ؟ عندما ص = ٤

$ظا ه = \frac{ص}{١٠}$

$\frac{ك}{ك ن}(ظا ه) = \frac{ك}{ك ن}(\frac{١}{١٠} ص)$

$ق^٢ ه \frac{ك ه}{ك ن} = \frac{١}{١٠} \frac{ك ص}{ك ن}$

$ق^٢ ه \frac{ك ه}{ك ن} = \frac{١}{١٠} \times ١٠ = \frac{١}{٢}$

$\frac{ك ه}{ك ن} = \frac{١}{٢ ق^٢ ه}$ راديان/ث

$ق ه = \sqrt{ظا^٢ ه + ١}$

$ظا ه = \frac{٤}{١٠} = \frac{٢}{٥}$

$ق ه = \sqrt{\frac{٤}{٢٥} + ١} = \frac{٥}{٥}$

$\frac{ك ه}{ك ن} = \frac{١}{٢ \times \frac{٢٩}{٢٥}} = \frac{٥}{٤}$ راديان/ث

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

النقط الحرجة

تدريب (١)

$م(س) = س^3 - 12س + 1$; $س \in [-3, 3]$

$م'(س) = 3س^2 - 12$

$م'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0 \Leftarrow س = \pm 2$

$م'(س)$ غير موجودة عندما $س = \pm 3$

∴ النقط الحرجة هي

$(-3, 10)$ ، $(3, -8)$ ، $(-2, 17)$ ، $(2, -15)$

تدريب (٢)

$م(س) = جتاس - جا^2 س$; $س \in [0, 2\pi]$

$م'(س) = -جاس - 2جاس جتاس$

$م'(س) = 0 \Leftarrow -جاس(1 + 2جتاس) = 0 \Leftarrow جاس = 0$ ، $جتاس = -\frac{1}{2}$

$س = 0, \pi, 2\pi$ ، $س = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

$م'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0, 2\pi$

النقط الحرجة $(0, 1)$ ، $(\pi, 0)$ ، $(\frac{2\pi}{3}, -\frac{1}{4})$ ، $(\frac{4\pi}{3}, -\frac{1}{4})$

تدريب (٣)

$م(س) = \sqrt[3]{س^2}$; $س \in [-2, 8]$

$م'(س) = \frac{2}{3} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{س}}$

$م'(س) = 0$ لا يوجد قيم لـ $س$

$م'(س)$ غير موجودة عندما $س = 0$

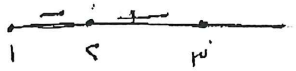
∴ النقط الحرجة $(-2, \sqrt[3]{4})$ ، $(0, 0)$ ، $(8, 4)$

تدريب (٤)

$م(س) = |س^2 - 3س|$; $س \in [-1, 4]$

$م(س) = \begin{cases} س^2 - 3س & ، س \leq 0 \text{ أو } س \geq 3 \\ -س^2 + 3س & ، 0 < س < 3 \end{cases}$

$م'(س) = \begin{cases} 2س - 3 & ، س < 0 \text{ أو } س > 3 \\ -2س + 3 & ، 0 < س < 3 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 0 \text{ أو } س = 3 \end{cases}$



$م'(س) = 0 \Leftarrow س = \frac{3}{2} \notin (1, 2)$

$س = 1 \notin (2, 3)$

$م(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

لأن $م'(2^+) \neq م'(2^-)$

كذلك عند اطراف الفترة عند $س = 1, 3$

∴ النقط الحرجة هي

$(1, 1)$ ، $(2, 0)$ ، $(3, 0)$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (1)

د) $\text{مد}(س) = |س^2 - 4س + 1|$ ، $س \in [-2, 4]$

$\text{مد}(س) = |(س-2)^2 - 3|$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftrightarrow (س-2)^2 = 3 \Leftrightarrow س = 2 \pm \sqrt{3}$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = 2$

$\text{مد}(-2) = 9$ ، $\text{مد}(2) = 1$ ، $\text{مد}(4) = 1$

∴ النقط الحرجة هي $(-2, 9)$ ، $(2, 1)$ ، $(4, 1)$

هـ) $\text{مد}(س) = \begin{cases} س^2 + 1 & ، س \leq 1 \\ 3 - س & ، س > 1 \end{cases}$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow$ لا يوجد $س$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = 1$

∴ النقطة الحرجة هي $(1, 1)$

و) $\text{مد}(س) = \begin{cases} \text{جتا } س & ، س \leq \frac{\pi}{4} \\ -\text{جا } س & ، س > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}$ ، $\text{جا } س = 0$ ، $س > \frac{\pi}{4}$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = \frac{\pi}{4}$

$\text{مد}(\frac{\pi}{2}) = 0$ ، $\text{مد}(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $\text{مد}(\pi) = 0$

∴ النقط الحرجة هي $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ، $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ، $(\pi, 0)$

ز) $\text{مد}(س) = |\text{جتا } س| = \overline{\text{جتا } س}$ ، $س \in [0, 2\pi]$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow \text{جتا } س = 0 \Leftarrow س = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $\text{جتا } س = 0$

$\text{مد}(0) = 1$ ، $\text{مد}(\pi) = 1$ ، $\text{مد}(2\pi) = 1$

∴ النقط الحرجة هي $(0, 1)$ ، $(\frac{\pi}{2}, 0)$ ، $(\pi, 1)$ ، $(2\pi, 1)$

ح) $\text{مد}(س) = \begin{cases} س^2 - 3س & ، س \leq 1 \text{ أو } س \geq 4 \\ 3س - س^2 & ، 1 < س < 4 \end{cases}$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = 3$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = 1$ ، $س = 4$

$\text{مد}(-1) = 4$ ، $\text{مد}(2) = 2$ ، $\text{مد}(5) = 10$

∴ النقط الحرجة هي $(-1, 4)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(3, 0)$ ، $(4, 4)$ ، $(5, 10)$

ط) $\text{مد}(س) = |س - 1|$ ، $س \in [-3, 2]$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = -3$

$\text{مد}(-3) = 4$ ، $\text{مد}(2) = 1$

∴ النقط الحرجة هي $(-3, 4)$ ، $(1, 0)$ ، $(2, 1)$

ي) $\text{مد}(س) = \begin{cases} س^3 - 3س & ، س \leq 1 \text{ أو } س \geq 2 \\ 3س - 3س^2 & ، 1 < س < 2 \end{cases}$

$\text{مد}(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = \pm\sqrt{3}$ ، $س = 1$

$\text{مد}(س)$ غير موجودة عندما $س = 1$ ، $س = 2$

$\text{مد}(-\sqrt{3}) = 0$ ، $\text{مد}(0) = 0$ ، $\text{مد}(\sqrt{3}) = 0$

∴ النقط الحرجة هي $(-\sqrt{3}, 0)$ ، $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(\sqrt{3}, 0)$ ، $(2, 2)$

(2)

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمرين (٢):

$ق(س) = س^3 + أ س^2 + ب س + ج$ تقطع محور السينات عند $س = -1$ ، $س = 3$

$ق'(س) = 3س^2 + 2أ س + ب$

$ق'(-1) = 0 \Leftarrow 3 - 2أ + ب = 0 \Leftarrow -2أ + ب = -3$

$ق'(3) = 0 \Leftarrow 27 + 6أ + ب = 0 \Leftarrow 6أ + ب = -27$

$8أ = -24 \Leftarrow أ = -3$ ، $ب = -9$

تمرين (٣)

$ق(س) = 0 \Leftarrow س = 0$ ، $س = -2$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = -3$ ، $س = 3$

∴ النقط الحرجة $(-3، ق(-3))$ ، $(-2، ق(-2))$ ، $(0، ق(0))$ ، $(1، ق(1))$ ، $(3، ق(3))$

تمرين (٤)

$ق(س) = \frac{س^3 - 1}{س^3 + 1} \Leftarrow ق'(س) = \frac{(3س^2)(س^3+1) - (س^3-1)(3س^2)}{(س^3+1)^2} = \frac{(3س^2)(س^3+1-س^3+1)}{(س^3+1)^2}$

$ق'(س) = \frac{6س^2}{(س^3+1)^2} \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow 6س^2 = 0 \Leftarrow س = 0$

$ق(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س^3 + 1 = 0 \Leftarrow س = -1$ لا ينتمي للمجال

النقطة الحرجة $(0، -1)$

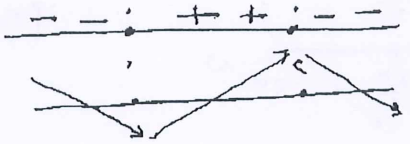
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

التزايد والتناقص

تدريب (١)

$$ق'(س) = ٣س^{٤} - س^{٣} - ٢ \Rightarrow ق'(س) = ٦س - ٣س^{٢} \Rightarrow ق'(س) = ٠ \Rightarrow (٣س)(٢ - س) = ٠$$

$$س = ٠ ، س = ٢$$

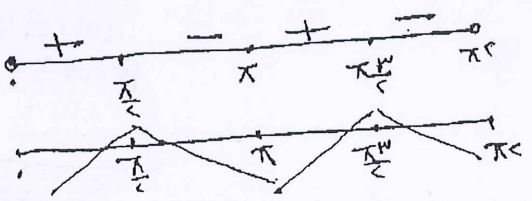


ومنه الاقتران ق(س) متزايد في الفترة $[٠ ، ٢]$ ومتناقص في $(-\infty ، ٠] \cup [٢ ، \infty)$

تدريب (٢):

$$ق(س) = جا^{٢} س ، س \in [٠ ، ٢\pi] \Rightarrow ق'(س) = ٢ جا س جتا س = جا ٢س ، ٢س \in (٠ ، ٤\pi)$$

$$ق'(س) = ٠ \Rightarrow جا ٢س = ٠ \Rightarrow ٢س = ٠ ، \pi ، ٢\pi ، ٣\pi ، ٤\pi \Rightarrow س = ٠ ، \frac{\pi}{٢} ، \pi ، \frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi$$

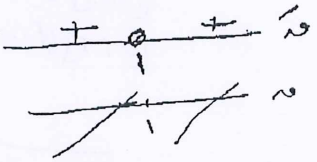


ق متزايد في $[٠ ، \frac{\pi}{٢}] \cup [\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

ق متناقص في $[\frac{\pi}{٢} ، \pi] \cup [\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi]$

تدريب (٣):

$$ق(س) = \sqrt[٣]{س - ١} \Rightarrow ق'(س) = \frac{١}{٣} \times \frac{١}{\sqrt[٣]{(س-١)^{٢}}}$$



ق متزايد في $ح$

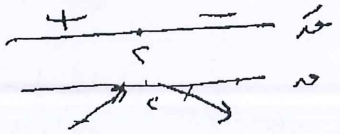
تمارين ومسائل

(١)

أ) $ق(س) = ٤س - س^{٤} \Rightarrow ق'(س) = ٤ - ٤س^{٣} = ٠ \Leftarrow س = ١$

ق(س) متزايد في $(-\infty ، ١]$

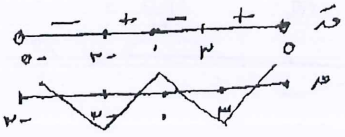
ق(س) متناقص في $[١ ، \infty)$



ب) $ق(س) = |س^{٢} - ٩| = \begin{cases} س^{٢} - ٩ & س \le -٣ \text{ أو } س \ge ٣ \\ ٩ - س^{٢} & -٣ \le س \le ٣ \end{cases}$

$$ق'(س) = \begin{cases} ٢س & س < -٣ \\ -٢س & -٣ < س < ٣ \\ ٢س & س > ٣ \end{cases}$$

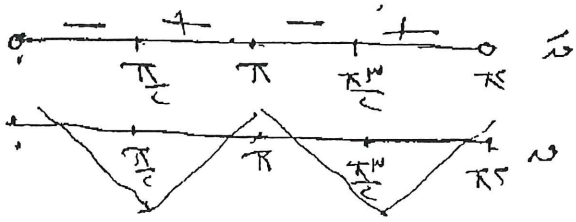
(غير موجود) $س = -٣ ، ٠ ، ٣$



ق(س) متزايد في $[-٣ ، ٠] \cup [٣ ، \infty)$

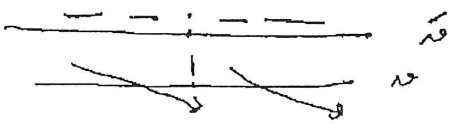
ق(س) متناقص في $(-\infty ، -٣] \cup [٠ ، ٣]$

ق

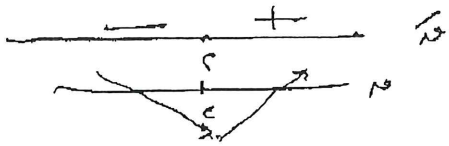


د متزايدة في $[0, \frac{\pi}{2}] \cup [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$

د متناقصة في $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

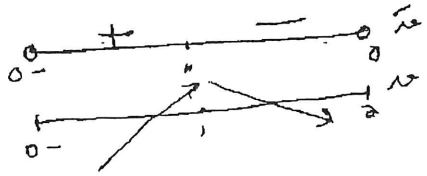


د متناقصة في $\mathbb{R}$



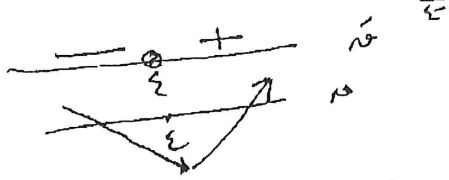
د متزايدة في $[2, \infty)$

د متناقصة في $(-\infty, 2]$



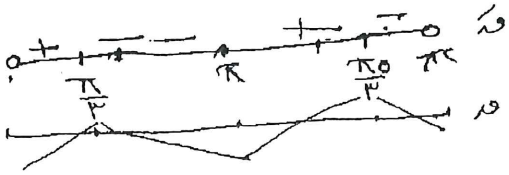
د متزايدة في $[-5, 0]$

د متناقصة في $[0, 5]$



د متزايدة في $[4, \infty)$

د متناقصة في $(-\infty, 4]$



د متزايدة في $[0, \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{5\pi}{3}, 2\pi]$

د متناقصة في $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}]$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (١)

$ق(س) = س^4 - 6س^2 + 8س + 1$ ، $س \in [-1, 5]$

$ق'(س) = 4س^3 - 12س^2 + 8 = 4(س^3 - 3س^2 + 2) = 4(س-2)(س-1)(س+1)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = -1$ أو $س = 1$ أو $س = 2$

$س$	-1		1		2		5
$ق'(س)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$ق(س)$	-8	↘	4	↗	-3	↘	121

$ق(-1) = -8$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = -1$

$ق(2) = -3$ قيمة صغرى محلية عند $س = 2$

$ق(1) = 4$ قيمة عظمى محلية عند $س = 1$

$ق(5) = 121$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = 5$

تدريب (٢)

$ق(س) = |س^2 - 4|$ ، $س \in [-3, 4]$

$$ق(س) = \begin{cases} س^2 - 4 & س \le -2 \\ -س^2 + 4 & -2 < س < 2 \\ س^2 - 4 & س \ge 2 \end{cases}$$

$ق'(س) = \begin{cases} 2س & س < -2 \\ -2س & -2 < س < 2 \\ 2س & س > 2 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

$ق'(س)$ غير موجودة عند $س = -2$ ، $س = 2$

$س$	-3		-2		0		2		4
$ق'(س)$		$-$		$+$	0	$-$		$+$	
$ق(س)$	5	↘	0	↗	4	↘	0	↗	12

$ق(0) = 4$ قيمة عظمى محلية عند $س = 0$

$ق(-3) = 5$ ، $ق(4) = 12$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = 4$

$ق(-2) = 0$ ، $ق(2) = 0$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = \pm 2$

تدريب (٣)

$ق(س) = س^3 + س^2 - 8س + 1$ ، $س \in [-4, 3]$

$ق'(س) = 3س^2 + 2س - 8 = (3س - 4)(س + 2)$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = \frac{4}{3}$ أو $س = -2$

$س$	-4		-2		$\frac{4}{3}$		3
$ق'(س)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$ق(س)$	-15	↗	11	↘	$-\frac{121}{27}$	↗	13

$ق(3) = 13$ قيمة عظمى مطلقة عند $س = 3$

$ق(-4) = -15$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = -4$

$ق(-2) = 11$ قيمة عظمى محلية عند $س = -2$

$ق(\frac{4}{3}) = -\frac{121}{27}$ قيمة صغرى محلية عند $س = \frac{4}{3}$

$ق(1) = 0$ قيمة صغرى مطلقة عند $س = 1$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تمارين وسائل

أ) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س$

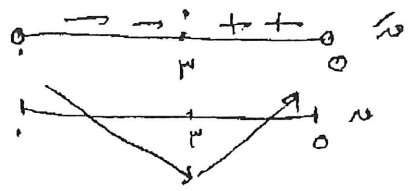
$م'(س) = 3س^2 - 12س + 9$

$م'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12س + 9 = 0$

$س^2 - 4س + 3 = 0$

$(س - 3)(س - 1) = 0$

$س = 3$ أو $س = 1$



للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 3$ فإن $م(3) = 0$

قيمة عظمى محلية عندما $س = 1$ فإن $م(1) = 4$

ب) $م(س) = س^3 - 12س$

$م'(س) = 3س^2 - 12$

$م'(س) = 0 \Leftarrow 3س^2 - 12 = 0$

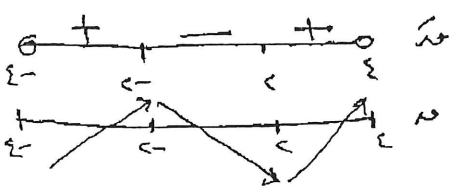
$س^2 = 4$

$س = \pm 2$

للاقتران $م(س)$:

قيمة عظمى محلية عندما $س = -2$ فإن $م(-2) = 16$

قيمة صغرى محلية عندما $س = 2$ فإن $م(2) = -16$



جـ) $م(س) = (س - 2)^3$ ، $س \in [0, 4]$

$م'(س) = 3(س - 2)^2 = 0 \Leftarrow س = 2$

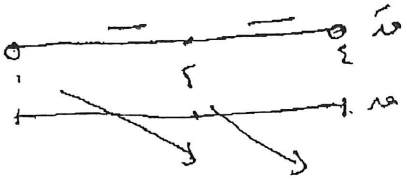
$س = 2$ عندما $م'(س)$ لا تغير إشارتها

للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 2$ فإن $م(2) = 0$

قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 4$ فإن $م(4) = 8$

قيمة صغرى مطلقة عندما $س = 0$ فإن $م(0) = -8$

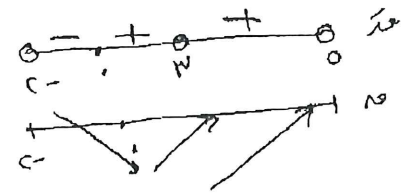


د) $م(س) = \begin{cases} 4 - س^2 & ، 0 \le س < 3 \\ 3س + 1 & ، 3 \le س \le 5 \end{cases}$

$م'(س) = \begin{cases} -2س & ، 0 < س < 3 \\ 3 & ، 3 < س < 5 \\ \text{غير موجودة} & ، س = 3 \end{cases}$

$م'(س) = 0 \Leftarrow -2س = 0$

$س = 0$



للاقتران $م(س)$:

قيمة صغرى محلية عندما $س = 0$ فإن $م(0) = 1$

قيمة عظمى مطلقة عندما $س = 5$ فإن $م(5) = 16$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

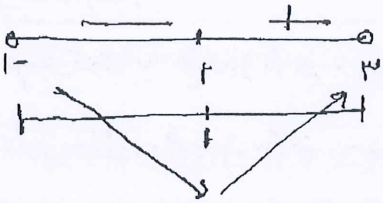
د) $د(س) = |(س-1)^3| = \begin{cases} (1-س)^3 & ، س < 1 \\ (س-1)^3 & ، س \geq 1 \end{cases}$

$د'(س) = \begin{cases} -3(1-س)^2 & ، س < 1 \\ 3(س-1)^2 & ، س > 1 \end{cases}$ ، $د'(1)$ غير موجودة

للاقتران $د(س)$:

قيمة حرجة محلية عند $س = 1$ لأن $د(1) = 0$ وغير موجودة

نوع خط مماس غير موجود (أ)



هـ) $د(س) = \frac{1}{4}س^4 - \frac{1}{3}س^3 : س \in [0, 3]$

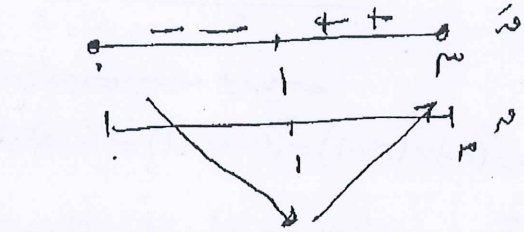
$د'(س) = س^3 - س^2 = س^2(س-1) = 0 \Leftarrow س = 0$ أو $س = 1$

للاقتران $د(س)$:

قيمة حرجة محلية عند $س = 1$ لأن $د(1) = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$

قيمة صغرى مطلقة هي $-\frac{1}{12}$

قيمة عظمى مطلقة هي $د(3) = \frac{27}{4}$



و) $د(س) = \sqrt[3]{س^4}$ ، $س \in [-8, 1]$

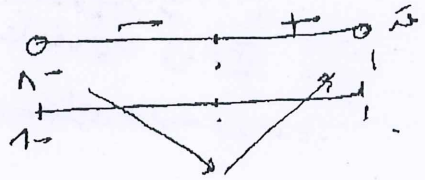
$د'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{س}}$

للاقتران $د(س)$:

قيمة حرجة محلية عند $س = 0$ لأن $د(0) = 0$

قيمة صغرى مطلقة هي $د(0) = 0$

قيمة عظمى مطلقة هي $د(-8) = 16$



ز) $د(س) = س + جاس \Leftarrow د'(س) = 1 + جتاس = 0 \Leftarrow جتاس = -1 \Leftarrow س = \pi$

$د(0) = 0 \Leftarrow$ قيمة حرجة

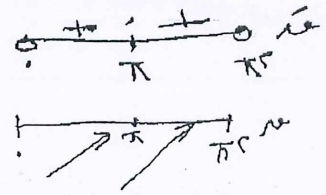
للاقتران $د(س)$:

قيمة صغرى محلية عند $س = 0$ لأن $د(0) = 0$

قيمة عظمى محلية عند $س = \pi$ لأن $د(\pi) = \pi$

نوع خط مماس غير موجود

عند $س = 2\pi$ لأن $د(2\pi) = 2\pi$



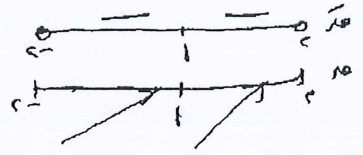
ح) $د(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-2, 2] \Leftarrow د'(س) = -3(1-س)^2 \Leftarrow د'(1) = 0 \Leftarrow س = 1$

للاقتران $د(س)$:

قيمة حرجة

صغرى مطلقة $د(2) = -1$

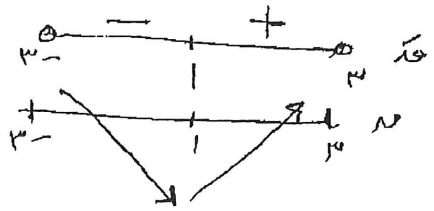
عظمى مطلقة $د(-2) = 27$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $ق(س) = (1-س)^3$ ، $س \in [-3, 3]$

$ق'(س) = 3(1-س)^2 \Leftarrow ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$

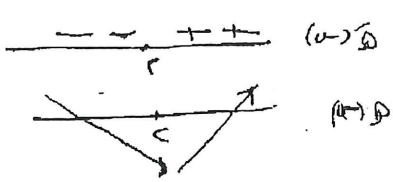


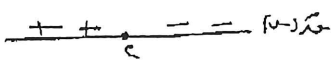
الاقتران $ق$ متناقص في $[-3, 1]$

وله قيمة حرجة عند $س = 1$ وهي $ق(1) = 0$ وهي قيمة صغرى محلية

وقيمة عظمى مطلقة $ق(-3) = 256$

٢) $ك(س) = (1-س)(1-ن س)^3 \Rightarrow ك'(س) = -3ن(1-س)(1-ن س)^2 \Rightarrow ك'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$ أو $س = \frac{1}{ن}$

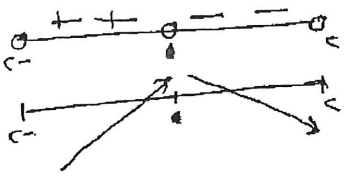




الاقتران $ك(س)$ له قيمة صغرى محلية عند $س = ج$

عند $س = ج \Rightarrow$ في $ك(ج) = (1-ن ج)^3 = (1-3)^3 = (-2)^3 = -8$

٣) مجموعة قيم $س$ التي عندها نقط حرجة للاقتران $ق(س) = \{-2, 0, 2\}$



① الاقتران متزايد في الفترة $[-2, 0]$

② الاقتران متناقص في $[0, 2]$

③ الاقتران له قيمة عظمى محلية عند $س = 0$

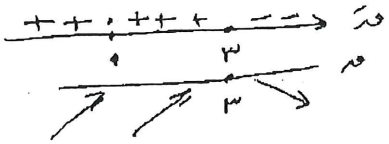
٤) ① الاقتران له نقط حرجة عند $س = 0$ ، $س = 3$

② الاقتران متزايد في $[3, \infty)$

③ الاقتران متناقص في $(-\infty, 3]$

④ الاقتران له قيمة صغرى محلية عند $س = 3$

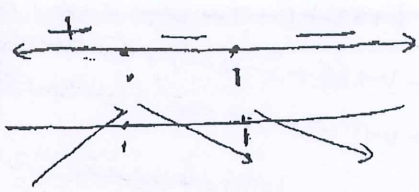
٥)



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) $ق(س) = \begin{cases} 4-س^2 & ، س \leq 1 \\ \frac{3}{س} & ، س > 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -2س & ، س \leq 1 \\ \frac{-3}{س^2} & ، س > 1 \end{cases}$

$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$



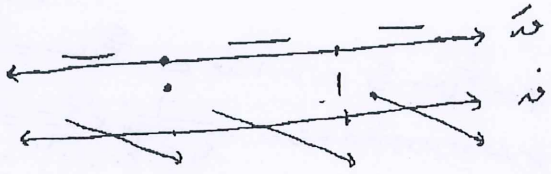
ق(س) متزايدة في $(-\infty, 0]$

ق(س) متناقصة في $[0, \infty)$

جـ) $ق(س) = \begin{cases} 4-س^3 & ، س < 1 \\ \frac{3}{س} & ، س \geq 1 \end{cases}$ $\Leftarrow$ $ق'(س) = \begin{cases} -3س^2 & ، س < 1 \\ \frac{-3}{س^2} & ، س \geq 1 \end{cases}$

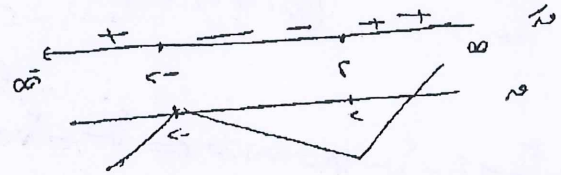
$ق'(س) = 0 \Leftarrow س = 0$

ق(س) متناقصة في ح



د) ق(س) متزايدة في $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

ق(س) متناقصة في $[-2, 2]$

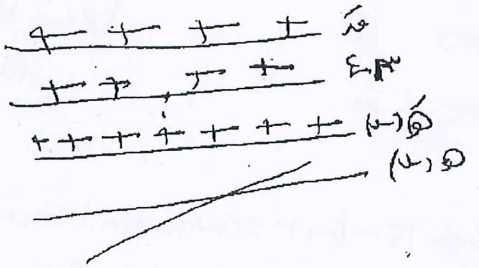


هـ) $ك(س) = ق(س) + س^3$

$ك'(س) = ق'(س) + 3س^2$

بما أن $ك'(س) > 0$

$\therefore$ ك(س) متزايدة في $[0, 2]$



التقعر

تدريب (١)

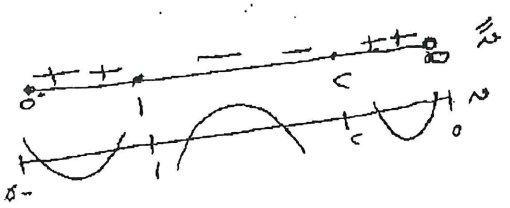
$$\text{د}(س) = س^4 - 6س^3 + 24س + 5 \quad ، \quad [-5 ، 5]$$

$$\text{د}'(س) = 4س^3 - 18س^2 + 24 \Rightarrow \text{د}''(س) = 12س^2 - 36س + 24$$

$$\text{د}''(س) = 0 \Rightarrow 12(س^2 - 3س + 2) = 0 \Rightarrow (س-1)(س-2) = 0 \Rightarrow س = 1 ، س = 2$$

الاقتران مقعر لأعلى في الفترات
$[-5, 1]$ ، $[2, 5]$

الاقتران مقعر لأسفل في الفترة $[1, 2]$

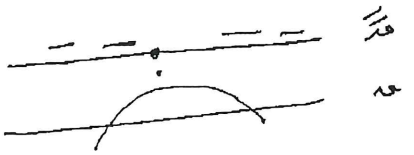


تدريب (٢) :

$$\text{د}(س) = س^{\frac{4}{3}} \Rightarrow \text{د}'(س) = \frac{4}{3}س^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \text{د}''(س) = \frac{4}{9}س^{-\frac{2}{3}}$$

$$\text{د}''(س) = \frac{4}{9} \times \frac{1}{س^{\frac{2}{3}}} \Rightarrow \text{د}''(س) \text{ غير موجودة عندما } س = 0$$

الاقتران مقعر لأسفل في الفترة $(-\infty, \infty)$

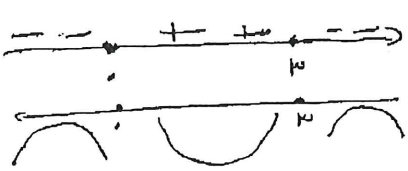


تدريب (٣) :

$$\text{د}(س) = 2س^3 - س^4 \Rightarrow \text{د}'(س) = 18س^2 - 4س^3 \Rightarrow \text{د}''(س) = 36س - 12س^2$$

$$\text{د}''(س) = 0 \Rightarrow (12 - س)(3 - س) = 0 \Rightarrow س = 0 ، س = 3$$

للاقترانين نقطتي انعطاف هما
$(0, 0)$ ، $(3, 81)$



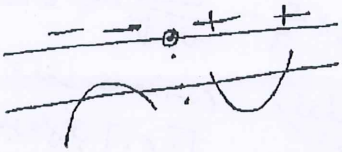
تدريب (٤) :

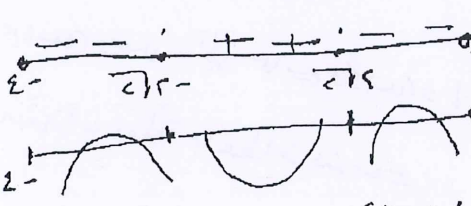
$$\text{د}(س) = س^3 - 12س + 3 \Rightarrow \text{د}'(س) = 3س^2 - 12 \Rightarrow \text{د}''(س) = 6س \Rightarrow س = 0 \Rightarrow \text{د}(0) = 3$$

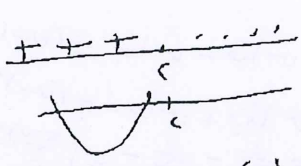
$$\text{د}''(س) = 6س \Rightarrow \text{د}''(-2) = -12 < 0 \quad \therefore \text{د} \text{ تقعر لأسفل عندما } س = -2$$

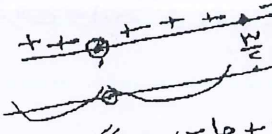
$$\text{د}''(2) = 12 > 0 \quad \therefore \text{د} \text{ تقعر لأعلى عندما } س = 2$$

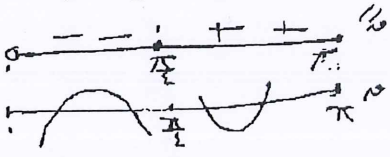
جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم









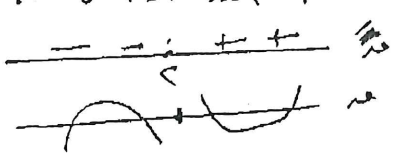


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ج) $م(س) = س^3 - 6س^2 + 9س + 2 \Rightarrow م'(س) = 3س^2 - 12س + 9 \Rightarrow م''(س) = 6س - 12$

$م'(س) = 0 \Leftarrow س = 1$ ، $س = 3$

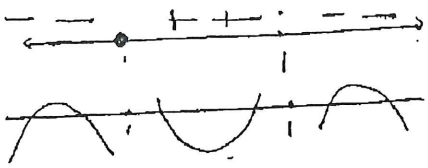
للاختبار نقطة انعطاف عند $س = 2$



د) $م(س) = س^{\frac{5}{3}} - س^{\frac{1}{3}} \Leftarrow م'(س) = \frac{5}{3}س^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{3}س^{-\frac{2}{3}} \Leftarrow م''(س) = \frac{10}{9}س^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9}س^{-\frac{5}{3}}$

$م''(س) = \frac{10}{9}س^{\frac{1}{3}} + \frac{2}{9} \times \frac{1}{س^{\frac{5}{3}}} \Leftarrow م''(س) = 0 \Leftarrow س = -1$

نقطتا انعطاف عند $س = 0$ ، $س = 1$



متحنى الاقتران $م(س)$ ؛ مقعر للأعلى في $[0, 1]$

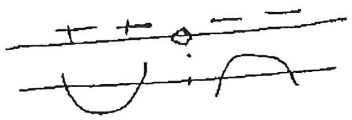
مقعر للأسفل في $(-\infty, 0] \cup [1, \infty)$

هـ) $م(س) = س^{\frac{2}{5}} \Leftarrow م'(س) = \frac{2}{5}س^{-\frac{3}{5}} \Leftarrow م''(س) = -\frac{6}{25}س^{-\frac{8}{5}} = -\frac{6}{25} \times \frac{1}{س^{\frac{8}{5}}}$

متحنى $م(س)$ مقعر للأعلى في $(-\infty, 0)$

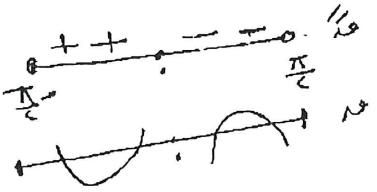
مقعر للأسفل في $(0, \infty)$

نقطة انعطاف عند $س = 0$



و) $م(س) = س - ظاس \Rightarrow م'(س) = 1 - قا^2 س \Rightarrow م''(س) = -2قا^2 س ظاس = -2 \frac{جاس}{جتا^3 س}$

للاختبار نقطة انعطاف عند $س = 0$



ز) $م(س) = جاس - جتاس \Rightarrow م'(س) = جتاس + جاس \Rightarrow م''(س) = -جاس + جتاس$

$م''(س) = 0 \Leftarrow جاس = جتاس \Leftarrow ظاس = 1$

$س = \frac{\pi}{4}$ ، $س = \frac{5\pi}{4}$

$م''(\frac{\pi}{4}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} < 0$

$\Leftarrow$ للاختبار فيها نهاية عظمى محلية عند $س = \frac{\pi}{4}$

$م''(\frac{5\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} > 0$

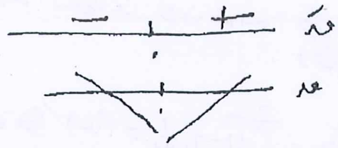
$\Leftarrow$ للاختبار فيها نهاية صغرى محلية عند $س = \frac{5\pi}{4}$

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

ب) ق(س) = س٤ ⇐ ق′(س) = ٤س٣ ⇐ ق″(س) = ١٢س٢ .

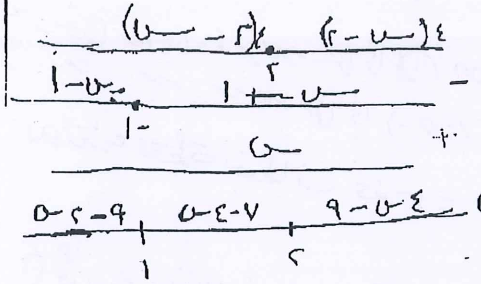
ق′(س) = ٠ ⇐ س = ٠ ، ق″(٠) = ٠ . تفشل ونرجع الى اختبار المشتقة الاولى

∴ الاقتران فيه صغرى محلية عند س = ٠ .



ج) ق(س) = ٤|س − ٢| − |س + ١| + س

ق(س) = { ٩ − ٢س ، س ≤ −١ ؛ ٧ − ٤س ، −١ < س ≤ ٢ ؛ ٤س − ٩ ، س > ٢ }

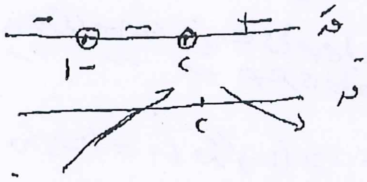


ق′(س) = { −٢ ، س < −١ ؛ −٤ ، −١ < س < ٢ ؛ ٤ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = −١ ، ٢ }

⇐ ق″(س) = { ٠ ، س < −١ ؛ ٠ ، −١ < س < ٢ ؛ ٠ ، س > ٢ }

∴ تفشل الاختبار ونرجع الى اختبار المشتقة الاولى

∴ الاقتران عنده قيمة صغرى محلية عند س = ٢



د) ق(س) = س٢ + ١٢٨/س ، س ≠ ٠ ⇐ ق′(س) = ٢س − ١٢٨/س٢ ⇐ ق′(س) = ٠

(٢س٣ − ١٢٨)/س٢ = ٠ ⇐ س = ٤

ق″(س) = ٢ + ٢٥٦/س٣ ⇐ ق″(٤) = ٢ + ٢٥٦/٦٤ = ٦ > ٠

∴ قيمة صغرى محلية عند س = ٤

٤) ق(س) = أس٣ + بس٢ + جـس + د ، ق′(س) = ٣أس٢ + ٢بس + جـ ، ق″(س) = ٦أس + ٢ب

ق(١) = أ + ب + جـ + د = ٥ ... ①

ق(٢) = ٨أ + ٤ب + ٢جـ + د = ١ ... ②

ق′(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ = −٣ ... ③

ق″(٢) = ١٢أ + ٢ب = ٠ ... ④

⇐ −٧أ − ٣ب − جـ = ٤

١٢أ + ٤ب + جـ = −٣ +

٥أ + ب = ١ × −٢

١٢أ + ٢ب = ٠

٢أ = −٢ ⇐ أ = −١

ب = −٦

جـ = ٣٣

د = ٤١

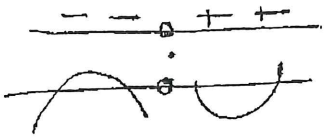
(٤)

٥) $ق(س) = \frac{1}{س^2}$ ، $ق'(س) = \frac{-2}{س^3}$ ، $ق''(س) = \frac{6}{س^4}$

$ق$ متزايد على $(-\infty, 0)$

$ق$ متناقص على $(0, \infty)$

لا يوجد نقطة انعطاف لأن $ق$ غير معرف عند $س = 0$

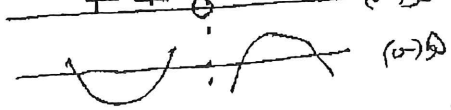


$ق(س) = س^{\frac{5}{3}} \Leftarrow ق'(س) = \frac{5}{3} س^{\frac{2}{3}}$ ، $ق''(س) = \frac{10}{9} س^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9 س^{\frac{1}{3}}}$

$ق$ متزايد على $[0, \infty)$

$ق$ متناقص على $(-\infty, 0]$

للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 0$ ومماس عند $س = 0$



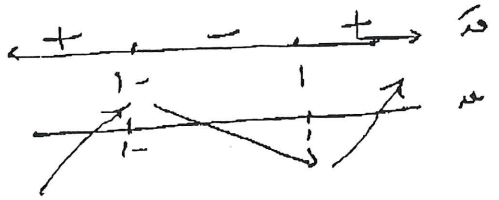
٦) أ) $ق(س)$ متزايد في $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$ق(س)$ متناقص في $[-1, 1]$

ب) $ق'(س) = 0 \Leftarrow س = \pm 1$

ج) للاقتران $ق(س)$ قيمة عظمى محلية عند $س = -1$

قيمة صغرى محلية عند $س = 1$



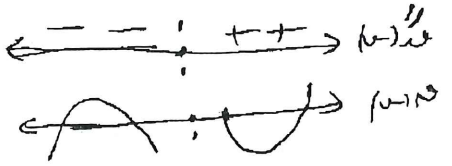
د) $ق(-1) = 0$ ، $ق''(-1) < 0 \Leftarrow$ $ق(-1)$ قيمة عظمى محلية

$ق'(1) = 0$ ، $ق''(1) > 0 \Leftarrow ق(1)$ = قيمة صغرى محلية

هـ) مخطط $ق(س)$ مقعر للأعلى في $[1, \infty)$

مقعر للأسفل في $(-\infty, 1]$

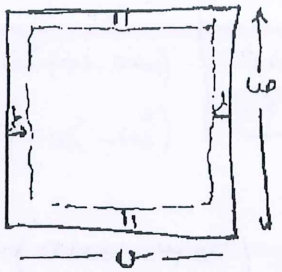
و) للاقتران نقطة انعطاف عند $س = 1$



جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تطبيقات القيم العظمى

تدريب (١):



$$\text{م} = س \times ص = ١٢٨ \Leftarrow \frac{١٢٨}{س} = ص$$

$$\text{م}_{(س)} = (س-٤)(ص-٣) = س ص - ٣س - ٤ص + ١٢$$

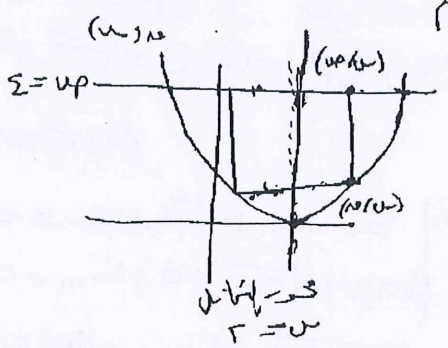
$$\text{م}_{(س)} = ١٣٠ - ٣س - \frac{٤ \times ١٢٨}{س}$$

$$\text{م}'_{(س)} = -٣ + \frac{٥١٢}{س^{٢}} \Leftarrow \text{م}' = ٠ \Leftarrow س^{٢} = ١٦٤ \Leftarrow س = ٤$$

$$\text{م}''_{(س)} = \frac{١٠٢٤}{س^{٣}} \Leftarrow \text{م}''|_{س=٤} = \frac{١٠٢٤}{٦٤} = ١٦ > ٠$$

∴ اكبر مساحة اكون عندما $س = ٤$ ، $ص = ٣٢$ م

تدريب (٢):



$$\text{م}_{\square} = ٢(س-٢)(ص-٣س+١٣)$$

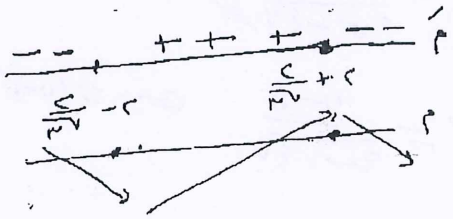
$$\text{م} = ٢(س-٢)(٤-(س^{٢}-٤س+٤)+٣س+١)$$

$$\text{م} = ٢(س-٢)(٣س-س^{٢}-٣) = ٢(-س^{٣}+٥س^{٢}-٧س+٦)$$

$$\text{م}' = ٢(-٣س^{٢}+١٠س-٧) = -٢(٣س^{٢}-١٠س+٧) = ٠ \Leftarrow س = ٢ \pm \frac{٢}{\sqrt{٣}}$$

∴ اكبر مساحة للمستطيل عندما

$$س = ٢\left(\frac{٤}{\sqrt{٣}} + ٢\right) \text{ م}$$



تدريب (٣):

$$\text{م}_{\triangle} = \frac{١}{٢} \times ٨ \times ٨ \times \text{جا}\theta = ٣٢\,\text{جا}\theta$$

$$\text{م}' = ٣٢\,\text{جتا}\theta = ٠ \Leftarrow \theta = \frac{\pi}{٢}$$

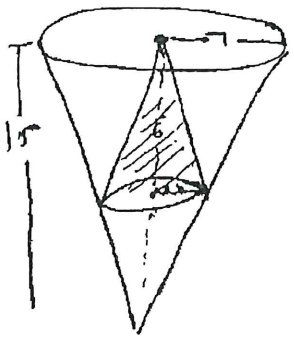
$$\text{م}'' = -٣٢\,\text{جا}\theta$$

$$\text{م}''|_{\theta=\frac{\pi}{٢}} = -٣٢ < ٠ \Leftarrow \text{اكبر مساحة للمثلث عندما } \theta = \frac{\pi}{٢}$$

اي عندما المثلث قائم الزاوية

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم

تدريب (٤) :



من التشابه

$\frac{نق}{٦} = \frac{١٢-ع}{١٢}$

$١٢ نق = ٦(١٢-ع)$

$ع = ١٢ - ٢ نق$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ ع$

$ح = \frac{\pi}{٣} نق^٢ (١٢-٢نق)$

$ح = \frac{\pi}{٣}(٦نق^٢ - ٢نق^٣)$

$ح = ٢\pi(٣نق^٢ - نق^٣)$

$ح' = ٢\pi(٦نق - ٣نق^٢) = ٦\pi نق(٢-نق)$

$ح' = ٠ \Leftarrow نق = ٠ \text{ أو } نق = ٢$

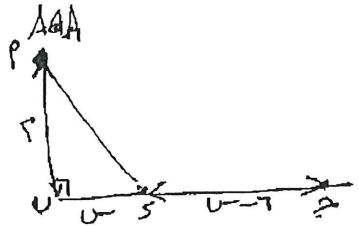
$ح'' = ٦\pi(٢-٢نق)$

$ح''(٠) = ١٢\pi > ٠$ ∴ عند $نق = ٠$ قيمة صغرى محلية

$ح''(٢) = -١٢\pi < ٠$ ، عند $نق = ٢$ قيمة عظمى محلية

∴ أكبر حجم $= ح(٢) = \frac{\pi}{٣}(٢٤-٩٦) = ٣٢\pi$ سم^٣

تدريب (٥)



$ك = ١٠٠٠ + ٣٠٠س + ٥\sqrt{٤٠+س^٢}$

$ك' = ٣٠٠ + ٥(\frac{١}{٢})(٤٠+س^٢)^{-\frac{١}{٢}}(٢س)$

$ك' = ٣٠٠ + \frac{٥س}{\sqrt{٤٠+س^٢}}$

$ك = ١٠٠٠ (٣ - \frac{٥س}{\sqrt{٤٠+س^٢}})$

$س \in [٠,٦]$ ∴ $ك = ٣٠٠س + ٧٠\sqrt{٤٠+س^٢} + ١٠٠٠$

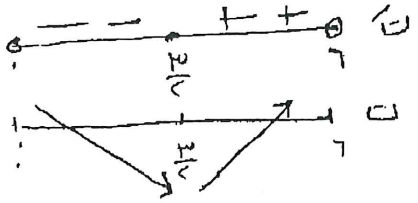
$ك' = ٠ \Leftarrow \frac{٥س}{\sqrt{٤٠+س^٢}} = ٣ \Leftarrow ٥س = ٣\sqrt{٤٠+س^٢}$

$٢٥س^٢ = ٩(٤٠+س^٢)$

$١٦س^٢ = ٣٦٠ \Leftarrow س^٢ = \frac{٣٦٠}{١٦} = \frac{٩٠}{٤} \Leftarrow س = \frac{٣}{٢}$

∴ أقل تكلفة ممكنة عندما $س = \frac{٣}{٢}$

وأكبر تكلفة ممكنة عندما $س = ٦$



(٢)

تمارين ومسائل

تمرين (1) صـ٣٥٩

$$\text{ع} = س + \frac{1}{س} = \frac{س^2+1}{س} \; ; \; س \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{ع}' = 1 - \frac{1}{س^2} \Leftarrow \text{ع} = 0 \Leftarrow \frac{س^2-1}{س^2} = 0 \Leftarrow س = \pm 1$$

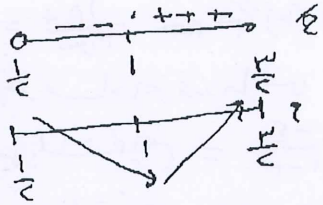
$$س = 1 \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{ع}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

$$\text{ع}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

$$\text{ع}(1) = 1 + 1 = 2$$

∴ أكبر قيمة عندما $س = 1$ ، أصغر قيمة عندما $س = \frac{1}{2}$



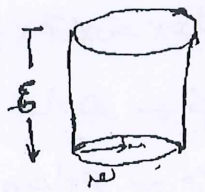
(2) $ع = \pi نق^2 ف$

$$\pi 4 ف = 1100\pi \Leftarrow 4 ف = 1100 \text{ سم}$$

$$ح = 2\pi نق ف + 2\pi نق^2$$

$$= 2\pi \times 10 \times 275 + 2\pi \times 100$$

$$= 5500\pi + 200\pi = 5700\pi \text{ سم}^2$$



$$ك = \frac{\text{ح}}{\text{ن}} + \frac{\text{ع}}{\text{ن}} \Leftarrow ك = \frac{5700\pi}{1000} + \frac{1100\pi}{1000} = 6.8\pi \text{ ريال}$$

$$\text{ك}' = \frac{-5700\pi}{\text{ن}^2} + \frac{2\pi \text{ ع}}{\text{ن}} \Leftarrow 0 = \frac{-5700\pi}{\text{ن}^2} + \frac{2\pi \text{ ع}}{\text{ن}}$$

$$\frac{2\pi \text{ ع}}{\text{ن}} = \frac{5700\pi}{\text{ن}^2} \Leftarrow \text{ع} = \frac{2850}{\text{ن}}$$

$$\pi \text{ ع} \text{ ن} = 2850\pi \Leftarrow \text{ن} = 10 \text{ سم}$$

$$\text{ع} = \frac{2850}{10} = 285 \text{ سم}$$

أقل تكلفة عندما ع = 285 سم ، ن = 10 سم

(3) $ص = \sqrt{(س-18)^2 + (س-0)^2}$

$$ص = \sqrt{(س-18)^2 + س^2}$$

$$ص' = \frac{2(س-18) + 2س}{2\sqrt{(س-18)^2 + س^2}}$$

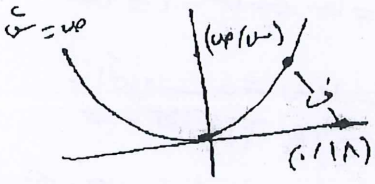
$$ص' = 0 \Leftarrow 2(س-18) + 2س = 0$$

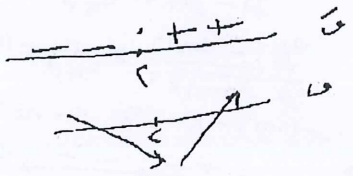
$$4س - 36 = 0 \Leftarrow س = 9$$

س	0		9		18
ص'		−	0	+	
ص		↓	أصغر	↑	

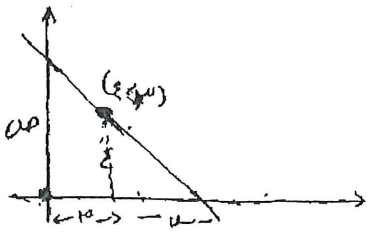
أقل بعد يمكن عندما س = 9 وهي

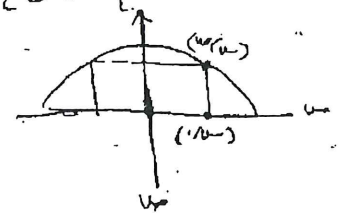
$$ص = \sqrt{(9-18)^2 + 9^2} = \sqrt{81+81} = \sqrt{162} = 9\sqrt{2}$$

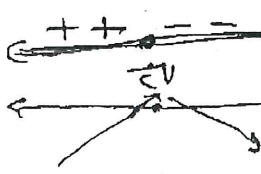


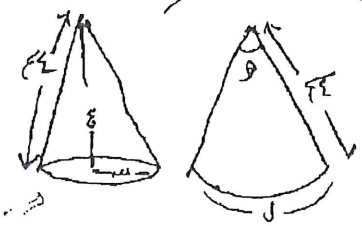


جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم









٨) الربح = البيع − التكلفة ⇐ ر(س) = ٥٠ س − ٠٫١ س٢ − ٥٠ س − ٠٫٢ س٢ − ١٥٠ س − ٥٠

ر(س) = ١٥٠ س − ٠٫٣ س٢ − ٥٠ ⇐ ر′(س) = ١٥٠ − ٠٫٦ س ⇐ ر′(س) = ٠

س = ١٥٠ / ٠٫٦ = ١٥٠ × ١٠ / ٦ = ٢٥٠

ر′ ⟵ + + + + | − − − − ⟶ س
٢٥٠

الربح أكبر ما يمكن تقريباً عندما س = ٢٥٠ قطعة

٩) م = ½ × ٤ × ١ × جاθ + ½ × ٤ × ١ × جاθ + ½ × ٤ × ١ × جاθ

م = جاθ + ٢ جاθ + جاθ

م = ٤ جاθ − جاθ ، 0 < θ < π

م′(θ) = ٤ جتاθ + جاθ

م′(θ) = ٠ ⇐ ٤ جتاθ = −جاθ ⇐ θ = ٣π/٤

م″(θ) = −٤ جاθ + جتاθ ⇐ م″(٣π/٤) = −٤/√٢ + −١/√٢ = −٥/√٢ < ٠

∴ أكبر مساحة ممكنة للشكل عندما θ = ٣π/٤ = ١٣٥°

١٠) م = ½ (س + ٢)(٤ − س) = (س + ٢)(٤ − س)

م′(س) = (س + ٢)(−١) + (٤ − س)(١)

م′(س) = ٢ − ٢س

م″(س) = −٢

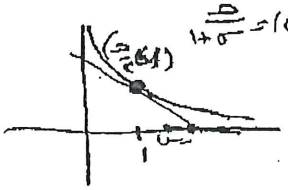
م′(س) = ٠ ⇐ ٢ − ٢س = ٠ ⇐ س = ١

م″(١) = −٢ < ٠

∴ أكبر مساحة ممكنة لشبه المنحرف عندما س = ١

م(١) = ½ (١ + ٢)(٤ − ١) = ٩/٢ وحدة مربعة

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم



١) ميل المماس = $\left|\frac{ص}{س}\right|_{س=٢} = \frac{ق(س)}{(س+١)^{٢}}\Big|_{س=٢} = \frac{٤}{٩}$

معادلة المماس هي: $ص - \frac{٤}{٩} = -\frac{٤}{٩}(س - ١) \Rightarrow ص = -\frac{٤}{٩}س + \frac{٣٤}{٩}$

المماس يقطع محور السينات عندما $ص = ٠ \Leftarrow س = ٣$

المماس يقطع محور الصادات عندما $س = ٠ \Leftarrow ص = \frac{٣٤}{٩}$

$\therefore$ مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٣ \times \frac{٣٤}{٩} = \frac{٥١}{٩}$ وحدة مربعة

٢) $ف(ن) = \frac{ن}{٢} - جتا ن \Rightarrow ف'(ن) = \frac{١}{٢} + ٢ جتا ن جتا ن$

$ف'(ن) = \frac{١}{٢} + جتا ٢ن \Rightarrow ف'(ن) = ٠ \Leftarrow جتا ٢ن = -\frac{١}{٢}$

$٢ن = \frac{٢\pi}{٣} \Leftarrow ن = \frac{\pi}{٣}$ أو $٢ن = \frac{٤\pi}{٣} \Leftarrow ن = \frac{٢\pi}{٣}$

$ف''(ن) = -٢ جتا ٢ن$

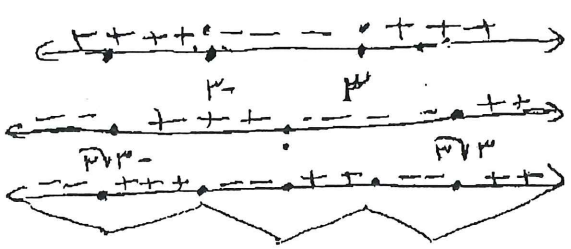
$ف''(\frac{\pi}{٣}) = -٢ جتا \frac{٢\pi}{٣} = -٢ \times -\frac{١}{٢} = ١$ م/ث^{٢}

$ف''(\frac{٢\pi}{٣}) = -٢ جتا \frac{٤\pi}{٣} = -٢ \times -\frac{١}{٢} = ١$ م/ث^{٢}

٣) $ق(س) = \sqrt{س^{٣} - ٢٧س}$ $\Rightarrow ق'(س) = \frac{٣س^{٢} - ٢٧}{٢\sqrt{س^{٣} - ٢٧س}}$

٤) $ق'(س)$ غير موجودة $\Leftarrow س = ٠$ ، $س = \pm ٣\sqrt{٣}$

$ق'(س) = ٠ \Leftarrow ٣س^{٢} - ٢٧ = ٠ \Leftarrow س = \pm ٣$



٥) الاقترانات ق(س)، ك(س) متصلة على $ح$ ، ق(س) $\neq$ ٠ على $ح$

$\therefore$ الاقتران $ل(س) = \frac{ك(س)}{ق(س)}$ متصل على $ح$

$ل(٣) = \frac{ك(٣)}{ق(٣)} = \frac{٣}{٣} = ١$

٦) $ف(س) = ٤س^{٣} + ٥س^{٢} + ٤س + ٧$

$ف(-١) = -٤ + ٥ - ٤ + ٧ = ١١$

$ف(٠) = ٧$

$ف(١) = ٤ + ٥ + ٤ + ٧ = ٢٠$

$ف'(س) = ١٢س^{٢} + ١٠س + ٤$

$ف'(١) = ١٢ + ١٠ + ٤ = ٢٦$

$ف'(-١) = ١٢ - ١٠ + ٤ = ٦$

$ف''(س) = ٢٤س + ١٠$

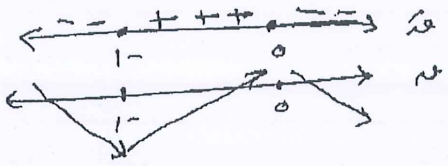
$ف''(١) = ٢٤ + ١٠ = ٣٤ > ٠$ $\Leftarrow$ التقعر لأعلى

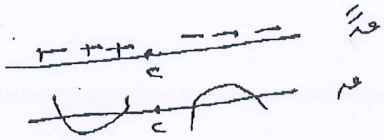
$ف''(س) = ٠ \Leftarrow ٢٤س + ١٠ = ٠ \Leftarrow س = -\frac{٥}{١٢}$

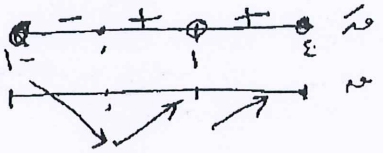
$ف'(-\frac{٥}{١٢}) = ١٢ \times \frac{٢٥}{١٤٤} + ١٠ \times -\frac{٥}{١٢} + ٤ = \frac{٢٥}{١٢} - \frac{٢٥}{٦} + ٤ = \frac{١٣}{١٢}$

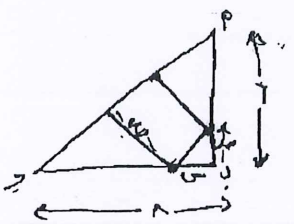
$\therefore$ النقطة $(-\frac{٥}{١٢}، \frac{١٣}{١٢})$ نقطة انقلاب

جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم









جميع الحقوق محفوظة لوزارة التربية والتعليم