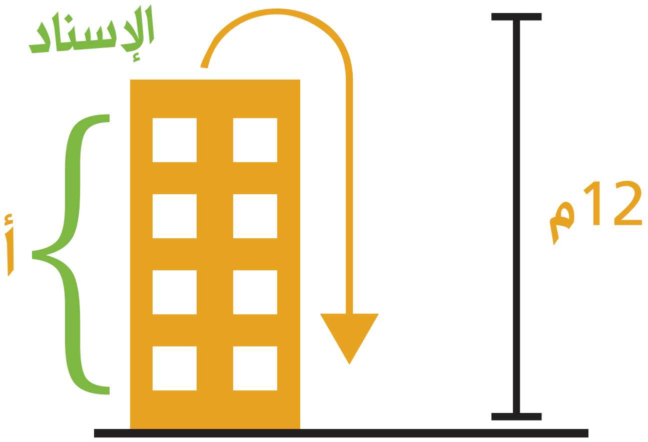
الرياضيات

تطبيقات التفاضل (1)

(الفصل الأول)



د.محمود الكسجي **محمد صالح** عمر الجبر

مركز زهرة الإتحاد الثقافي الوحدات : 4752403	الأكاديمية الأولى صويلح: 0791461143
أكاديمية صناع المعرفة المدينة الرياضية: 0796667058	مركز المدثر الثقافي الجبيهة: 5330430
أكاديمية العصر الجديد ابو نصير: 0795651033	Jo Academy.com 0798006679
التقنيات الهاشمي : 5053230	الأذكياء الجاردنز : 0795655900

تطلب من مكتبة بلوبرينت : 0791027000

المسألة الفيزيائية :

هو موضوع يتعلق بحركة الجسيمات وما ينتج عنها من مسافة (ف) وسرعة (ع) وتسارع (ت) حيث العلاقة التي تربط بينهم هي الإشتقاق الضمني بالنسبة للزمن (ن) وذلك كما يلي :-

ف = تعطى في السؤال بدلالة ن

$ع_{لحظية} = \frac{دف}{دن}$ مشتقة المسافة .

$ت_{لحظية} = \frac{د^{٢}ف}{دن^{٢}}$ المشتقة الثانية للمسافة

أو $\frac{دع}{دن}$ المشتقة الأولى للسرعة .

سؤال للتدريب على الاشتقاق:

$$\frac{د}{دن}(ف^{٢}) = ٢ف \times \frac{دف}{دن} = ٢ف \times ع$$

$$\frac{د}{دن}(\sqrt{ع}) = \frac{١ \frac{دع}{دن}}{٢\sqrt{ع}} = \frac{ت}{٢\sqrt{ع}}$$

* ملاحظات مهمة :

- السرعة المتوسطة ($\bar{ع}$) لاعلاقة لها بالاشتقاق بل هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن (ن) في فترة زمنية .

$$\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(ن_{٢}) - ف(ن_{١})}{ن_{٢} - ن_{١}}$$

- السرعة الابتدائية (ع.) نحصل عليها عندما ن = صفر
- أقصى مسافة (ارتفاع) يقطعه الجسم نحصل عليها عندما ع = صفر (تنعدم السرعة)
- في المقذوفات عندما يعود الجسم ويصل الأرض فإنه ف = صفر
- زمن التحليق = ٢× زمن الصعود لأقصى ارتفاع .
- تبديل (تغيير) حركة الجسم أو بداية العودة إلى نقطة الانطلاق (تتابع اشارة ع على الخط) وعندئذ ع = صفر

أمثلة :

١) يتحرك جسم قاطعاً مسافة ف بالأمتار بعد زمن (ن) بالثواني وحسب العلاقة $ف(ن) = ن^{٣} + ٥$ ، احسب

أ) سرعة الجسم عندما ن = ٤

ب) سرعة الجسم عندما تسارعه = ١٢م/ث²

جـ) تسارع الجسم عندما سرعته = ٢٧م/ث

د) السرعة المتوسطة للجسم في الفترة الزمنية [١، ٣]

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{l} ف = ن^{٣} + ٥ \\ ع = ٣ن^{٢} \\ ت = ٦ن \end{array}} \longrightarrow$$

مفتاح الحل لكل الفروع
(ريشة الحل)

أ) $ع = ٣ن^{٢}$ عندما $ن = ٤ \longrightarrow ع = ٣(٤)^{٢} = ٤٨$م/ث

ب) $ع = ٣ن^{٢}$ المشكلة ن ← لكن ت = ١٢م/ث²

$٦ن = ١٢ \longrightarrow ن = ٢$

$ع\Big|_{ن=٢} = ٣(٢)^{٢} = ١٢$م/ث

جـ) $ت = ٦ن$ المشكلة ن ← لكن ع = ٢٧م/ث

$٣ن^{٢} = ٢٧ \longrightarrow ن^{٢} = ٩$

$ن = ٣ ، -٣$ تهمل

$ت\Big|_{ن=٣} = ٦ \times ٣ = ١٨$م/ث²

د) $\bar{ع} = \frac{\Delta ف}{\Delta ن} = \frac{ف(٣) - ف(١)}{٣ - ١} = \frac{٣٢ - ٦}{٢} = ١٣$م/ث

تمرين :

يتحرك جسم في خط مستقيم بحيث يقطع في زمن (ن) ثانية مسافة قدرها $ف(ن) = \frac{ن^{٢}}{ن+١}$ ، احسب سرعة الجسم وتسارعه بعد ثانية واحدة من بدء الحركة .

$$\left(\begin{array}{l} ع = \frac{٣}{٤} \\ ت = \frac{١}{٤} \end{array} \right)$$

٢) يتحرك جسم حسب العلاقة $ف(ن) = ٦ن^{٢} - ن^{٣}$

جد أ) سرعة الجسم عندما ينعدم التسارع .

ب) مجموعة قيم ن التي تجعل السرعة موجبة .

جـ) الفترات الزمنية التي تجعل التسارع موجب .

$$\boxed{\begin{array}{l} ف = ٦ن^{٢} - ن^{٣} \\ ع = ١٢ن - ٣ن^{٢} \\ ت = ١٢ - ٦ن \end{array}}$$

أ) ع = ١٢ن - ٣ن^{2} (ينعدم) ← ت = صفر

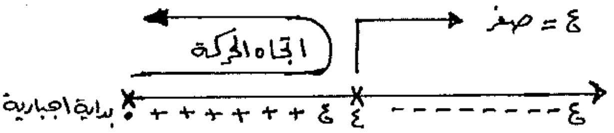
١٢ - ٦ن = ٠ ← ن = ٢

ع$|_{ن=٢}$ = ٢٤ - ١٢ = ١٢ م/ث

ب) المطلوب ن عندما ع > ٠ (اشارة السرعة)
لذلك نستخدم خط الأعداد كي نجد الاشارات .

ع = ١٢ن - ٣ن^{2} = صفر

= ٣ن(٤-ن) = صفر ← ن = صفر ، ن = ٤

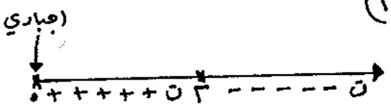


∴ السرعة موجبة في الفترة الزمنية (٠، ٤)

جـ) المطلوب ن عندما ت > ٠ (اشارة التسارع)

ت = ١٢ - ٦ن = صفر ← ن = ٢

التسارع موجب في [٠، ٢)



ملاحظة : في فرع ب لم يتم ادخال (صفر) في الفترة لأنه من أصفار السرعة ولكن تم إدخاله في الفترة في فرع جـ لأن (صفر) ليس من أصفار التسارع .

تمرين ① :

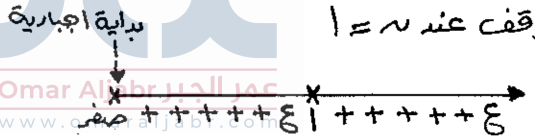
يتحرك جسيم على خط مستقيم وفق المعادلة الزمنية :
ف(ن) = $\frac{1}{4}$(ن+٢)^{4} - ٦ن^{2} حيث ن الزمن بالثواني ،
ف(ن) المسافة بالأمتار ، جد تسارع الجسيم عندما تكون السرعة ٨٩ م/ث . (ت=٦٣)

③ يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{3} - ٣ن^{2} + ٣ن + ٣
اثبت أن الجسيم يتوقف مرة واحدة فقط دون أن يبدل اتجاه الحركة .

ف = ن^{3} - ٣ن^{2} + ٣ن + ٣
ع = ٣ن^{2} - ٦ن + ٣

يتوقف عندما ع = ٠ ← صفر = ٣ن^{2} - ٦ن + ٣
= ن^{2} - ٢ن + ١
= (ن-١)(ن-١)
$\boxed{ن = ١}$

∴ إذن تتوقف عند ن = ١



∴ لن يبدل اتجاه الحركة لأن ع لن تكون سالبة .

تمرين ② :

يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = $\sqrt{ن}$ (٢٧-ن) ،
اثبت أن الجسيم يتوقف عن الحركة مرة واحدة ويغير من اتجاه حركته .

④ يتحرك جسيم حسب العلاقة ف(ن) = جا^{2} $\frac{ن}{2}$ ،
جد تسارع الجسيم عندما سرعته = $\frac{1}{2}$ م/ث .

ف = (جا $\frac{ن}{2}$)^{2}
ع = ٢(جا $\frac{ن}{2}$)^{1} (جتا $\frac{ن}{2}$) ($\frac{1}{2}$) = $\frac{1}{2}$ جان
ت = $\frac{1}{2}$ جتان

ت = $\frac{1}{2}$ جتان المشكلة لكن ع = $\frac{1}{2}$

ت$|_{ن=\frac{\pi}{2}}$ = $\frac{1}{2}$ جتا٩٠ = صفر

$\frac{1}{2}$ جان = $\frac{1}{2}$ ← جان = ١
ن = $\frac{\pi}{2}$

تمرين ③ :

يتحرك جسيم بسرعة تعطى حسب العلاقة
ع(ن) = $\sqrt{٢ن^{2}+٧}$ ، جد سرعته عندما تسارعه $\frac{6}{5}$ م/ث^{2}
(ع = ٥ م/ث)

تمرين محلول :

يتحرك جسيم على خط مستقيم بحيث أن بعده عن نقطة الأصل بالأمتار بعد (ن) ثانية هو ف(ن) = جا^{4}ن ، فجد سرعة الجسيم في اللحظة التي ينعدم فيها تسارعه لأول مرة بعد الحركة .

الحل :

ع = فَ(ن) = ٤جا^{3}ن جتان

ت = فً(ن) = ٤جا^{3}ن × -جان + جتان × ١٢جا^{2}ن جتان

ت = -٤جا^{4}ن + ١٢جا^{2}ن جتا^{2}ن

جد ع عندما ت = ٠ عند أول زمن بعد ن = ٠ .

-٤جا^{٤}ن + ١٢جا^{٢}ن جتا^{٢}ن = ٠

٤جا^{٢}ن (٣جتا^{٢}ن − جا^{٢}ن) = ٠

٤جا^{٢}ن = ٠ ← جان = ٠ ← ن = ٠ ، π ، ٢π

٣جتا^{٢}ن − جا^{٢}ن = ٠ ← جا^{٢}ن = ٣جتا^{٢}ن

ظا^{٢}ن = ٣ ← ظان = ±√٣

ن = $\frac{\pi}{٣}$ ، $\frac{٢\pi}{٣}$ ، $\frac{٤\pi}{٣}$ ، $\frac{٥\pi}{٣}$

∴ ن = $\frac{\pi}{٣}$

ع($\frac{\pi}{٣}$) = ٤جا^{٣} $\frac{\pi}{٣}$ جتا $\frac{\pi}{٣}$

= ٤ × $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^{٣}$ × $\frac{١}{٢}$ = $\frac{٣\sqrt{٣}}{٤}$

---

⑤ ف(ن) = ٥جا٢ن + ٣جتا٢ن ، اوجد التسارع عندما ف(ن) = ٤ .

الحل :

ع = ١٠جتا٢ن − ٦جا٢ن

ت = −٢٠جا٢ن − ١٢جتا٢ن

ت = −٤ $\underbrace{(٥\text{جا}٢ن + ٣\text{جتا}٢ن)}$ ← ف = ٤

ت = −٤ × ٤ = −١٦

---

⑥ يتحرك جسم بسرعة ابتدائية مقدارها ٢م/ث وحسب العلاقة ف(ن) = أن^{٢} + ب ن حيث أ ، ب ثوابت ، احسب المسافة التي يقطعها الجسم عندما ن = ٣ علماً بأنه تسارع الجسم ٨ م/ث^{٢}.

الحل :

$$\boxed{\begin{array}{l} ف = أن^{٢} + ب ن \\ ع = ٢أن + ب \\ ت = ٢أ \end{array}}$$

المطلوب : ف عندما ن = ٣

ف = أن^{٢} + ب ن   المشكلة أ ، ب لكن

ف = ٤(٣)^{٢} + ٢(٣)
ن = ٣
= ٤٢ م

ت = ٨ | ع ابتدائية = ٢
٢أ = ٨ | ٢أ(٠) + ب = ٢
أ = ٤ | ب = ٢

تمرين ① :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = ن^{٣} ، وكانت سرعته المتوسطة في [٠ ، أ] تساوي السرعة اللحظية عندما ن = ٣ ، ماقيمة الثابت أ. (أ = √١٣)

تمرين ② :

يتحرك جسم حسب العلاقة ف(ن) = أن^{٣} + ب ن + ٥ فإذا كانت سرعته بعد ثانية تساوي (١٠م/ث) وسرعته المتوسطة في الفترة [١ ، ٣] تساوي ٣م/ث احسب قيم أ ، ب . (أ = −٠٫٧) / (ب = ١٢٫١)

---

⑦ يتحرك جسم بسرعة تعطى حسب العلاقة ع^{٢}(ن) = ١ − ف^{٣}(ن) حيث ف المسافة بالأمتار ، جد تسارع الجسم عندما تنعدم السرعة .

الحل :

ع^{٢} = ١ − ف^{٣} نشتق بجذر

٢ع × $\frac{دع}{دن}$ = −٣ف^{٢} × $\frac{دف}{دن}$

٢ع × ت = −٣ف^{٢} × ع

∴ ت = $\frac{-٣}{٢}$ ف^{٢} المشكلة ف

عندما تنعدم السرعة
٠ = ١ − ف^{٣}
ف^{٣} = ١
ف = ١

∴ ت = −$\frac{٣}{٢}$ × ١

= $\frac{-٣}{٢}$ م/ث^{٢}

---

⑧ يتحرك جسم بسرعة تعطى ع(ن) = √ف(ن) ، اثبت أنه تسارع الجسم = $\frac{١}{٢}$ حيث ف المسافة ، ع السرعة .

الحل :

ع = √ف   نشتق الجذر

$\frac{دع}{دن}$ = $\frac{١ . \frac{دف}{دن}}{٢\sqrt{ف}}$ ⇐ ت = $\frac{ع}{٢\sqrt{ف}}$ لكن ع = √ف

= $\frac{\sqrt{ف}}{٢\sqrt{ف}}$ = $\frac{١}{٢}$

تمرين ③ :

يتحرك جسم بحيث سرعته ع = أ√ف ، أ > ٠ ، ف المسافة اذا علمت أنه تسارعه ١٢م/ث^{٢} فماقيمة الثابت أ ؟ (أ = √٢٤)

---

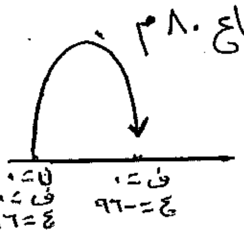
⑨ قذف جسم رأسياً لأعلى من نقطة على سطح الأرض حسب العلاقة ف(ن) = ٩٦ن − ١٦ن^{٢} ، احسب مايلي :

أ) اقصى ارتفاع وصل اليه الجسم .

ب) الزمن اللازم حتى يعود الجسم للأرض .

جـ) السرعة التي قذف بها الجسم .

د) سرعة الجسم وهو أعلى ارتفاع ٨٠ م



$$\boxed{\begin{array}{r}ف = ٩٦ن - ١٦ن^{٢} \\ ع = ٩٦ - ٣٢ن\end{array}}$$

أ) ف = ٩٦ن − ١٦ن^{٢}

ف$_{ن=٣}$ = ٩٦(٣) − ١٦(٣)^{٢}

= ٢٨٨ − ١٤٤ = ١٤٤م

المشكلة ن لكن من كلمة

أقصى ⇐ ع = صفر

٩٦ − ٣٢ن = صفر

ن = ٣

ب) الزمن اللازم = ٢ × [زمن أقصى ارتفاع]

٢ × ٣ = ٦ ثواني .

حل آخر: عندما يعود الجسم لسطح الأرض فإن ف = صفر

٩٦ ن − ١٦ن^{٢} = صفر

١٦ن(٦−ن) = صفر ← ن = صفر ، ن = ٦

تهمل (عند الانطلاق) .

جـ) السرعة التي قذف بها الجسم هي ع$_٠$ (السرعة الابتدائية)

ع$_٠$ = ٩٦ − ٣٢ن   لكن ن = صفر

ع$_٠$ = ٩٦ م/ث

د) ع = ٩٦ − ٣٢ن

ع$_{ن=١}$ = ٩٦ − ٣٢

= ٦٤م/ث (صاعد)

ع$_{ن=٥}$ = ٩٦ − ١٦٠

= −٦٤م/ث (هابط)

المشكلة ن لكن

ف = ٨٠

٩٦ن − ١٦ن^{٢} = ٨٠

١٦ن^{٢} − ٩٦ن + ٨٠ = ٠

ن^{٢} − ٦ن + ٥ = ٠

(ن−١)(ن−٥) = ٠

ن = ١ ، ن = ٥

تمرين محلول :

قذف جسم رأسياً إلى الأعلى من نقطة على سطح الأرض فإذا كانت المسافة التي يقطعها بعد (ن) ثانية من بدء الحركة معطى بالاقتران ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} اثبت أن الجسم يفقد نصف سرعته الابتدائية على ارتفاع ٤٨م

الحل :

المطلوب : اثبت أن ع$_{ف=٤٨}$ = $\frac{١}{٢}$ ع(٠)

ع(ن) = فَ(ن) = ٦٤ − ٣٢ن

ع(٠) = فَ(٠) = ٦٤

نجد ن عندما ف = ٤٨

٦٤ن − ١٦ن^{٢} = ٤٨

(١٦ن^{٢} − ٦٤ن + ٤٨ = ٠) ÷ ١٦

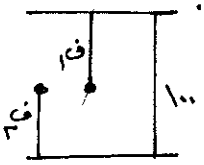
ن^{٢} − ٤ن + ٣ = ٠

(ن−١)(ن−٣) = ٠ ← ن = ١ ، ٣

ع(١) = فَ(١) = ٦٤ − ٣٢ = ٣٢ = $\frac{١}{٢}$ ع(٠)

ع(٣) = فَ(٣) = ٦٤ − ٩٦ = −٣٢ = $\frac{١}{٢}$ ع(٠)

⑩ أسقط جسم من ارتفاع (١٠٠ متر) عن سطح الأرض حيث أن المسافة المقطوعة بالأمتار ف$_١$(ن) = ٥ن^{٢} وفي نفس الوقت أطلق جسم من سطح الأرض للأعلى حيث أن المسافة التي يقطعها هي ف$_٢$(ن) = ٥٠ن − ٥ن^{٢} جد سرعة كل منها وهما على نفس الارتفاع .



ف$_١$ = ٥ن^{٢} ف$_٢$ = ٥٠ن − ٥ن^{٢}

ع$_١$ = ١٠ن   ع$_٢$ = ٥٠ − ١٠ن

المشكلة ن عندما يكون لهما نفس الارتفاع

فإن ف$_١$ + ف$_٢$ = ١٠٠

٥ن^{٢} + ٥٠ن − ٥ن^{٢} = ١٠٠ ← ٥٠ن = ١٠٠ ← ن = ٢

∴ ع$_١$ = ٢٠م/ث ، ع$_٢$ = ٥٠ − ١٠(٢) = ٣٠م/ث .

⑪ من ارتفاع (١٢٥م) سقط جسم سقوطاً حراً حسب العلاقة ف$_١$(ن) = ٥ن^{٢} ، وبعد ثانية قذف جسم رأسياً لأعلى من سطح الأرض بسرعة ابتدائية (٥٠م/ث) وحسب العلاقة ف$_٢$(ن) = ٥٠ن − ٥ن^{٢} ، جد سرعة كل منهما عندما يكون لهما نفس الارتفاع عن سطح الأرض

ف$_١$ = ٥ن^{٢} ف$_٢$ = ٥٠ن − ٥ن^{٢}

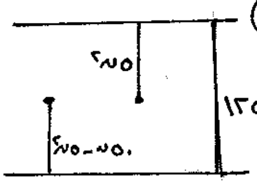
ع$_١$ = ١٠ن   ع$_٢$ = ٥٠ − ١٠ن

المشكلة ن عندما يكون لهما نفس الارتفاع فإن

ف$_١$ + ف$_٢$ = ١٢٥ (انتبه لفرق الزمن)

نفرض (ن+١) زمن الجسم الأول ف$_١$

نفرض (ن) زمن الجسم الثاني



ف$_{١}$(ن+١) + ف$_{٢}$(ن) = ١٢٥

٥(ن+١)^{٢} + ٥٠ن − ٥ن^{٢} = ١٢٥

$\cancel{٥ن^{٢}}$ + ١٠ن + ٥ + ٥٠ن − $\cancel{٥ن^{٢}}$ = ١٢٥

٦٠ن = ١٢٠ ⟸ ن = ٢

∴ زمن الأول ن+١ = ٣ث / زمن الثاني ن = ٢ث

∴ ع$_{١}$ = ٣٠ م/ث ، ع$_{٢}$ = ٥٠ − ٢٠ = ٣٠ م/ث .

---

⑫ أسقط شخص جسماً من نقطة على سطح بناية سقوطاً حراً بحيث أن المسافة بالأقدام التي يقطعها بعد ن ثانية هي ف$_{١}$(ن) = ١٦ن^{٢} ، في اللحظة نفسها رمى شخص ثان جسماً عمودياً إلى أسفل بحيث أن المسافة بالأقدام التي يقطعها بعد (ن) ثانية هي ف$_{٢}$(ن) = ٤٠ن + ١٦ن^{٢} ، فإذا ارتطم الجسم الأول بالأرض بعد ثانية واحدة من ارتطام الجسم الثاني بالأرض فجد :

أ) سرعة الجسم الثاني لحظة ارتطامه بالأرض .

ب) ارتفاع البناية .

الحل :

أ) نفرض (ن+١) زمن الجسم الأول

ن زمن الجسم الثاني

ع = ٤٠ + ٣٢ن

ف$_{٢}$(ن) = ف$_{١}$(ن+١)

٤٠ن + ١٦ن^{٢} = ١٦(ن+١)^{٢}

٤٠ن + ١٦ن^{٢} = ١٦ن^{٢} + ٣٢ن + ١٦

٨ن = ١٦ ← ن = ٢

ع$_{٢}$(٢) = ٤٠ + ٦٤ = ١٠٤

ب) ارتفاع البناية = ف$_{٢}$(٢) = ٨٠ + ٦٤ = ١٤٤

---

⑬ قذف جسم رأسياً لأعلى وحسب العلاقة ف(ن) = أن − ٥ن^{٢} ، جد قيمة الثابت أ علماً بأن أقصى ارتفاع وصل اليه الجسم يساوي ٨٠ م (حيث أ السرعة الابتدائية)

الحل : ف = أن − ٥ن^{٢} ، ع = أ − ١٠ن

نحتاج معادلتين وهما ف = ٨٠ عندما ع = ٠

أن − ٥ن^{٢} = ٨٠ ..... ①

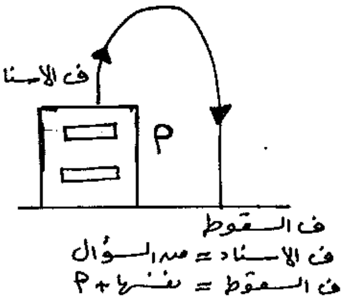
أ − ١٠ن = ٠ ⟸ أ = ١٠ن ..... ②

نعوض في ① ← ١٠ن^{٢} − ٥ن^{٢} = ٨٠

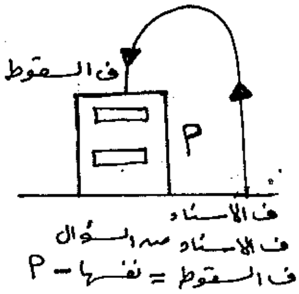
٥ن^{٢} = ٨٠

ن^{٢} = ١٦ ← ن = ٤ ، −٤
تهمل

∴ أ = ١٠(٤) = ٤٠



ف الاسناد = من السؤال
ف السقوط = نفسها + P



ف الاسناد من السؤال
ف السقوط = نفسها − P

---

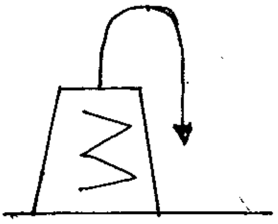
⑭ قذف جسم رأسياً لأعلى من قمة برج ارتفاعه ٨٠م وحسب العلاقة ف(ن) = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} ، جد

أ) اقصى ارتفاع للجسم عن سطح الأرض .

ب) سرعة الجسم وهو على ارتفاع ١٢٨م من سطح الأرض .

جـ) الزمن اللازم حتى يعود الجسم للأرض .

د) قيم ن التي تجعل السرعة سالبة .



ف$_{البرج}$ = ٦٤ن − ١٦ن^{٢}

ف$_{الأرض}$ = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} + ٨٠

ع = ٦٤ − ٣٢ن

أ) ف$_{الأرض}$ = ٦٤ن − ١٦ن^{٢} + ٨٠

ف$_{ن=٢}$ = ١٢٨ − ٦٤ + ٨٠ = ١٤٤

المشتقة ← ع = ٠

٦٤ − ٣٢ن = ٠ ← ن = ٢

ب) ع = ٦٤ − ٣٢ن

ع$_{ن=١}$ = ٣٢م/ث

ع$_{ن=٣}$ = −٣٢م/ث

المشتقة ن حيث ف$_{الأرض}$ = ١٢٨

٦٤ − ١٦ن^{٢} + ٨٠ = ١٢٨

١٦ن^{٢} − ٦٤ + ٤٨ = ٠

ن^{٢} − ٤ن + ٣ = ٠

(ن−١)(ن−٣) = ٠

ن = ١ ، ن = ٣

صاعد هابط

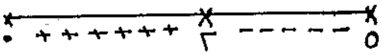
جـ) ف$_{الأرض}$ = ٠ ← ٦٤ن − ١٦ن^{٢} + ٨٠ = ٠

ن^{٢} − ٤ن − ٥ = ٠

(ن−٥)(ن+١) = ٠

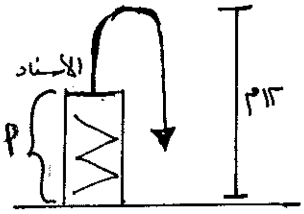
$\boxed{ن=٥}$ ، $\boxed{ن=-١}$ ← تهمل

د) ع = ٠ ← ن = ٢



∴ ن ∈ (٢ ، ٥]

١٥) قذف جسيم رأسياً لأعلى من سطح بناية حسب العلاقة ف(ن) = ١٠ن - ٥ن^{٢} ، احسب ارتفاع البناية علماً بأن أقصى ارتفاع للجسيم عن سطح الأرض ١٣م .



ف$_{\text{الأسناد}}$ = ١٠ن - ٥ن^{٢}

ف$_{\text{الأرض}}$ = ١٠ن - ٥ن^{٢} + م

ع = ١٠ - ١٠ن

أقصى ارتفاع عن سطح الأرض = ١٣ عندما ع = ٠

صفر = ١٠ - ١٠ن ← ن = ١ عن سطح الأرض

١٣ = ١٠ - ٥ + م

$\boxed{م = ٧}$

تمرين ع

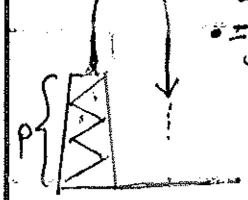
من نقطة على علو (٥٥) متر من سطح الأرض قذف جسيم رأسياً إلى أعلى حيث أن المسافة المقطوعة بعد (ن) ثانية من قذف الجسيم تعطى بالعلاقة ف(ن) = ٦٠ن - ٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسيم لحظة وصوله مستوى سطح الأرض .

(ع = -٥٠ ، ٥٠)

تمرين محلول ع

قذف جسيم رأسياً لأعلى من قمة برج حسب العلاقة ف(ن) = ٤٨ن - ٦ن^{٢} جد ارتفاع البرج علماً بأن سرعة الجسيم عند ارتطامه بالأرض = -٦٠م/ث

الحل :



لاحظ المطلوب م عندما ف$_{\text{ارض}}$ = ٠

ف$_{\text{الأرض}}$ = ٤٨ن - ٦ن^{٢} + م

ع = ٤٨ - ١٢ن = -٦٠

$\frac{-١٢ن}{-١٢} = \frac{-١٠٨}{-١٢}$

ن = ٩

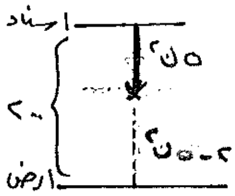
ف(٩) = ٠ ← ٤٨ × ٩ - ٦ × ٩^{٢} + م = ٠

٤٣٢ - ٤٨٦ + م = ٠

م = ٥٤

١٦) سقط جسيم من ارتفاع ٢٠٠م ، سقوطاً حراً حسب العلاقة ف(ن) = ٥ن^{٢} ، جد سرعة الجسيم وهو على ارتفاع ١٢٠ م عن سطح الأرض .

الحل ع



ف$_{\text{اسناد}}$ = ٥ن^{٢} ، ف$_{\text{الأرض}}$ = ٢٠٠ - ٥ن^{٢}

ع = ١٠ن

المطلوب ع عندما ف$_{\text{الأسناد}}$ = ٢٠٠ - ١٢٠ = ٨٠

المقطوع

٥ن^{٢} = ٨٠ ← ن^{٢} = ١٦

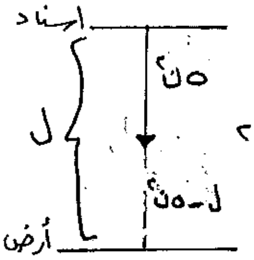
ن = ٤

ع$_{ن=٤}$ = ١٠ × ٤ = ٤٠

تمرين محلول ع

سقط جسم من ارتفاع معين حسب العلاقة ف(ن) = ٥ن^{٢} ، وفي لحظة ما كان ارتفاعه عن سطح الأرض = ١٦٠م ، وبعد (٢) ثانية من تلك اللحظة اصبح ارتفاعه = ١٠٠م ، جد سرعة الجسم عند ارتطامه بالأرض .

الحل ع نفرض الارتفاع ل



ف$_{\text{اسناد}}$ = ٥ن^{٢} ، ف$_{\text{ارض}}$ = ل - ٥ن^{٢}

ع = ١٠ن

ف(ن) = ل - ٥ن^{٢} = ١٦٠ .... ①

ف(ن + ٢) = ل - ٥(ن + ٢)^{٢} = ١٠٠

ل - ٥ن^{٢} - ٢٠ن - ٢٠ = ١٠٠ ..... ②

بحل المعادلتين ← -٢٠ن = -٤٠ ← ن = ٢

بالتعويض في ① ل = ١٨٠

∴ ف$_{\text{ارض}}$ = ١٨٠ - ٥ن^{٢}

١٨٠ - ٥ن^{٢} = ٠

ن^{٢} = ٣٦

ن = ٦

ع$_{ف_{\text{ارض}} = ٠}$ = ١٠ × ٦ = ٦٠

"المسألة الهندسية"

* مراجعة لأنواع الخطوط :

① الخط الأفقي :

* ميله = صفر
* معادلته ص = عدد (مقطع الصادات)

② الخط العمودي :

* ميله = عدد (غيرمعرف)
* معادلته س = عدد (يقطع السينات)

③ الخط المائل :

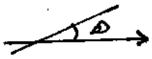
أ) صاعد : ميله = +

ب) هابط : ميله = −

* معادلته : ص = م س + ب

يجب ميله بمعرفة أو معلومية

* نقطتين : $م = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{\Delta ص}{\Delta س}$
* زاوية : م = ظاهـ



مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

* معادلة : م = معامل س أو صَ

توازي مستقيمين : $م_١ = م_٢$

تعامد مستقيمين : $م_١ \times م_٢ = -١$.

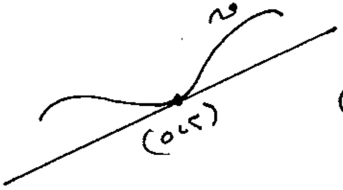
المسألة الهندسية :

هي موضوع يتعلق بالميل و المماس والعمودي عليه حيث يتم ايجاد ميل الخط المستقيم (المماس) و ذلك اذا كان لدينا منحنى معلوم (اقتران) عند نقطة معلومة (التماس) فإن

ميل المماس = مشتقة المنحنى عند التماس

في الشكل المجاور

يكون ميل المماس = فَه(٢)



أمثلة :

١) ما ميل المماس والعمودي عليه لمنحنى فه(س) = $\sqrt{س}$ عند النقطة (٤،٢)

الحل :

لدينا منحنى لذلك نشتق فَه(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس

م = فَه(٤) ← م المماس = $\frac{١}{٢\sqrt{٤}} = \frac{١}{٤}$

∴ ميل العمودي = −٤

---

٢) ما ميل العمودي على المماس لمنحنى العلاقة ص + $\frac{س}{ص}$ = ١ عند النقطة (١،٠)

الحل :

لدينا منحنى لذلك نشتقه .

$\frac{ص^٢ + س}{ص} = ١$ ← ص² + س = ص (ضمني)

$٢ص \cdot \frac{دص}{دس} + ١ = \frac{دص}{دس}$ نعوض التماس (١،٠)

$٢ \cdot \frac{دص}{دس} + ١ = \frac{دص}{دس}$ ← $\frac{دص}{دس} = -١$

∴ ميل المماس = −١ ← ميل العمودي = ١

تمرين :

فه(س) = س² − ١ ، هـ(س) = $\frac{٣}{س + ١}$

ما ميل المماس لمنحنى (فه ∘ هـ)(س) عندما س = ٢ .

($م = \frac{-٢}{٣}$)

"إيجاد معادلة المماس والعمودي عليه"

لإيجاد المعادلة يلزمنا (س١، ص١) ، م ثم نطبق المعادلة العامة.

نقطة التماس

حيث معادلة المماس ص − ص١ = م (س − س١)

معادلة العمودي ص − ص١ = $\frac{-١}{م}$ (س − س١)

< تقسم اسئلة ايجاد المعادلة إلى

قسمين

مباشرة — غير مباشرة

المباشرة : يكون لدينا نقطة التماس أو جزء منها او انها تتقاطع مع السينات أو الصادات أو مع منحنى آخر .

* نقطة التقاطع مع السينات $(\text{س}، ٠)$ ← $\text{ص} = ٠$

* نقطة التقاطع مع الصادات $(٠، \text{ص})$ ← $\text{س} = ٠$

* نقطة تقاطع منحنيات مع بعضها نعوض أحدهما في الآخر

صريحين ← مساواة

صريح مع ضمني ← تعويض

ضمنيه ← حذف وتعويض

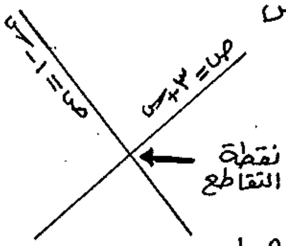
توضيح تقاطع صريحين:

$\text{ص} = ٣ + \text{س}$ ، $\text{ص} = ١ - \text{س}$

$٣ + \text{س} = ١ - \text{س}$

$٢\text{س} = -٢$

$\text{س} = -١$



نجد ص بالتعويض في أحدهما.

∴ $\text{ص} = ١ - (-١) = ٢$ ∴ نقطة التقاطع $(-١، ٢)$

أمثلة:

١) ما معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٢ - ٣\text{س}$ ، عندما $\text{س}_١ = ١$.

الحل:

* نقطة التماس $(١، \text{ص})$ ← ص نجدها $\text{ق}(١) = ١ - ٣ = -٢$

$(١، -٢)$

∴ ميل المماس $= \text{قَ}(١)$ حيث $\text{قَ}(\text{س}) = ٢\text{س} - ٣$

$\text{م}_{\text{المماس}} = -١$

* معادلة المماس ← $\text{ص} + ٢ = -١(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = -\text{س} - ١$

* معادلة العمودي ← $\text{ص} + ٢ = ١(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = \text{س} - ٣$

٢) ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى العلاقة $\text{س}^٣\text{ص} = ٣$ عند النقطة $(١، ٣)$

الحل:

* نقطة $(١، ٣)$ هي نقطة التماس لأنها تحقق المنحنى ⟸ $١ \times ٣ = ٣$

* ميل المماس $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $(١، ٣)$

(اشتقاق ضمني) أو نجهز ثم عادي

$$\text{س}^٣ \times \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} + \text{ص} \times ٣\text{س}^٢ = ٠$$

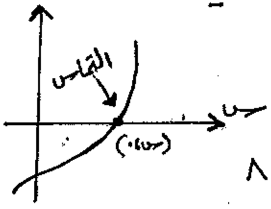
$$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{-٣\text{س}^٢\text{ص}}{\text{س}^٣} = \frac{-٣\text{ص}}{\text{س}}$$

$$\text{م}_{\text{المماس}} = \frac{-٣(٣)}{١} = -٩$$

$$\therefore \text{م}_{\text{العمودي}} = \frac{١}{٩}$$

* معادلة العمودي ← $\text{ص} - ٣ = \frac{١}{٩}(\text{س} - ١)$

٣) ما معادلة المماس لمنحنى $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ - ٨$ عند نقطة تقاطعه مع محور السينات .



الحل:

نقطة التماس $(\text{س}، ٠)$

لـ نجدها $٠ = \text{س}^٣ - ٨$

$٨ = \text{س}^٣ \leftarrow \text{س} = ٢$

← نقطة التماس $(٢، ٠)$

* ميل المماس ← $\text{قَ}(٢)$ حيث $\text{قَ}(\text{س}) = ٣\text{س}^٢$

$\text{م}_{\text{المماس}} = ١٢$

معادلة المماس ← $\text{ص} - ٠ = ١٢(\text{س} - ٢)$

$\text{ص} = ١٢\text{س} - ٢٤$

٤) ما معادلة المماس والعمودي عليه لمنحنى العلاقة $\text{جاص} = ٢\text{س}$ عندما $\text{س}_١ = \frac{١}{٢}$ ، حيث $\text{ص} \in [٠، \pi]$

الحل:

نقطة التماس $(\frac{١}{٢}، \text{ص})$

لـ نجدها $\text{جاص} = ٢ \times \frac{١}{٢} = ١$

$\text{ص} = \frac{\pi}{٢}$

← $(\frac{١}{٢}، \frac{\pi}{٢})$

* ميل المماس $= \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ عند $(\frac{١}{٢}، \frac{\pi}{٢})$

الاشتقاق ضمني

$\text{جتاص} \cdot \frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = ٢$

$\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}} = \frac{٢}{\text{جتاص}}$

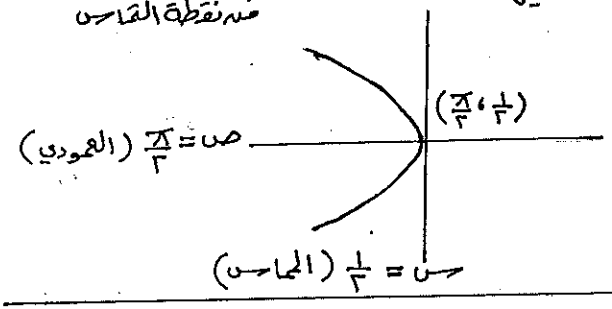
$\text{م}_{\text{المماس}} = \frac{٢}{\text{جتا}\frac{\pi}{٢}} = \frac{٢}{٠}$

معادلة المماس $\text{ص} - \frac{\pi}{٢} = \frac{٢}{٠}(\text{س} - \frac{١}{٢}) \leftarrow \text{س} = \frac{١}{٢}$

معادلة العمودي $\text{ص} - \frac{\pi}{٢} = ٠ . (\text{س} - \frac{١}{٢}) \leftarrow \text{ص} = \frac{\pi}{٢}$

ملاحظة :

اذا كان الميل عدد فإن المعادلات تكون س = عدد ، ص = عدد
او الميل = ٠
من نقطة التماس



تمرين :

اذا كان المماس لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢،٣) أفقياً فما معادلة العمودي على المماس عند تلك النقطة .

أ) س = ٢
ب) ص = ٣
ج) س = صفر
د) ص = صفر

⑤ ما معادلة المماس لمنحنى ق(س) = $\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٧$ عند نقطة تقاطعه مع المستقيم ص − ٣س + ١ = ٠ .

الحل :

* نقطة التماس هي نقطة التقاطع ونجدها بتعويض أحدهما في الآخر .

ق(س) = $\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٧$ ، ص − ٣س + ١ = ٠

$\text{س}^٢ - ٦\text{س} + ٧ - ٣\text{س} + ١ = ٠$

$\text{س}^٢ - ٩\text{س} + ٨ = ٠ \leftarrow (\text{س} - ١)(\text{س} - ٨) = ٠$

س = ١ ، س = ٨

النقطة الأولى (١، ق(١))	النقطة الثانية (٨ ، ق(٨))
← (١، ٢)	← (٨ ، ٢٣)
م المماس = ق′(١) حيث	م المماس = ق′(٨)
ق′(س) = ٢س − ٦	ق′(٨) = ٢ × ٨ − ٦ = ١٠
$\text{م}_١ = -٤$	$\text{م}_٢ = ١٠$
المعادلة الأولى :	المعادلة الثانية :
ص − ٢ = −٤(س − ١)	ص − ٢٣ = ١٠(س − ٨)

⑥ اثبت أن المماسين المرسومين لمنحنى العلاقتين $٤\text{س}^٢ + ٩\text{ص}^٢ = ٤٥$ ، $\text{س}^٢ - ٤\text{ص}^٢ = ٥$ عند نقطة تقاطع المنحنيين في الربع الأول متعامدان .

الحل :

نجد نقطة تقاطعهما في الربع الأول

$٤(٥ + ٤\text{ص}^٢) + ٩\text{ص}^٢ = ٤٥ \longrightarrow \text{ص}^٢ = ١$

ص = ١ ، −١ تهمل

نجد س ← $\text{س}^٢ = ٩ \longrightarrow$ س = ٣ ، −٣ تهمل

∴ نقطة التقاطع (٣،١)

نجد المشتقات كي نجد الميل لكل منهما

$٨\text{س} + ١٨\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠ \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(٣،١)} = \frac{-٤}{٣}$

$٢\text{س} - ٨\text{ص} \cdot \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = ٠ \longleftarrow \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\Big|_{(٣،١)} = \frac{٣}{٤}$

$\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = \frac{-٤}{٣} \times \frac{٣}{٤} = -١$ ∴ متعامدان

⑦ اذا كان ق(س) = $\sqrt{٢ - \text{س}}$ ، هـ(س) = $\text{س}^٢$ جد النقطة التي يكون عندها مماسا منحنيي ق، هـ متعامدين ثم جد معادلة المماس لمنحنى ق(س) عند تلك النقطة .

الحل :

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{-١}{٢\sqrt{٢ - \text{س}}}$ ، $\text{هـ}'(\text{س}) = ٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) \times \text{هـ}'(\text{س}) = -١$ لأن $\text{م}_١ \times \text{م}_٢ = -١$

$\frac{-١}{٢\sqrt{٢ - \text{س}}} \times ٢\text{س} = -١ \longleftarrow \text{س} = \sqrt{٢ - \text{س}}$ (تربيع الطرفين)

$\text{س}^٢ = ٢ - \text{س}$

اذا تم تربيع الطرفين افحص الناتج .

$\text{س}^٢ + \text{س} - ٢ = ٠$

$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$

(س = −٢) ✗ (س = ١) ✓

تهمل لأنه لا يحقق المعادلة .

ق(١) = $\sqrt{٢ - ١}$ = ١ ، هـ(١) = $(١)^٢$ = ١

النقطة تقع على المنحنيان ، نقطة تعامد المنحنيين (١،١)

ميل المماس لمنحنى ق = ق′(١) = $\frac{-١}{٢\sqrt{٢ - \text{س}}} = \frac{-١}{٢}$

$\text{ص} - \text{ص}_١ = \text{م}(\text{س} - \text{س}_١)$

$\text{ص} - ١ = \frac{-١}{٢}(\text{س} - ١)$

$\text{ص} = \frac{-١}{٢}\text{س} + \frac{٣}{٢}$

تمرين محلول :

ق(س) = (س^٢ - ٣س)^٣ ، هـ(س) = ٥ / (٢ - س)

ما معادلة المماس لمنحنى (ق∘هـ)(س) عند س١ = -٣

الحل :

ل(س) = (ق∘هـ)(س) ، النقطة (-٣ ، ل(-٣))

ل(-٣) = ق(هـ(-٣)) = ق(١) = -٨ ← (-٣، -٨)

ميل المماس = المشتقة عند التماس

م المماس = ل'(-٣)

ل'(-٣) = ق'(هـ(-٣)) × هـ'(-٣)

ل'(-٣) = ق'(١) × ١/٥

= -١٢ × ١/٥ = -١٢/٥

هـ'(س) = ٥ / (٢ - س)^٢

هـ'(-٣) = ٥/٢٥ = ١/٥

هـ(-٣) = ١

ق'(س) = ٣(س^٢ - ٣س)^٢ (٢س - ٣)

ق'(١) = ٣(-٢)^٢(-١) = -١٢

ص + ٨ = -١٢/٥ (س + ٣)

---

٨) ما مساحة المثلث الذي أضلاعه محوري السينات والصادات والمماس لمنحنى ص = ٦/س عند النقطة (٢،٣)

الحل :

يلزم ايجاد معادلة المماس أولاً .

* النقطة (٢،٣)

* ميل المماس = دص/دس |(٢،٣) ⇐ دص/دس = -٦/س^٢

م = -٦/٤ = -٣/٢

المماس ص - ٣ = -٣/٢ (س - ٢)

ص = -٣/٢ س + ٦

* يلزم تقاطع المماس مع السينات ثم مع الصادات

مع السينات (س،٠)

٠ = -٣/٢ س + ٦

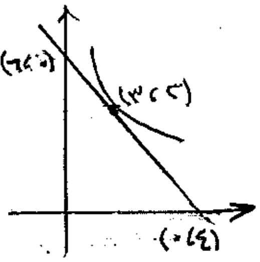
٣/٢ س = ٦ ← س = ٤

(٤،٠)

مع الصادات (٠،ص)

ص = ٠ + ٦

(٠،٦)



م = ١/٢ القاعدة × الارتفاع

= ١/٢ × ٤ × ٦ = ١٢

تمرين محلول :

ما مساحة المثلث الذي أضلاعه محور السينات والمماس والعمودي عليه لمنحنى العلاقة ٤س^٢ + ص^٢ = ٢٠ عند النقطة (١،-٤)

الحل :

سوف نجد أضلاع المثلث وهي السينات والمماس و العمودي

* نجد معادلة المماس

نقطة التماس (١،-٤)

م المماس = دص/دس |(١،-٤)

∴ م المماس = -٤(١) / -٤ = ١

الاشتقاق الضمني

٨س + ٢ص . دص/دس = صفر

٢ص . دص/دس = -٨س

دص/دس = -٨س / ٢ص

= -٤س / ص

معادلة المماس : ص + ٤ = ١(س - ١) ← ص = س - ٥

م العمودي = -١

معادلة العمودي : ص + ٤ = -١(س - ١) ← ص = -س - ٣

* نجد نقاط التقاطع للمستقيمات الثلاث (رؤوس المثلث)

المماس مع محور السينات ← ص = صفر

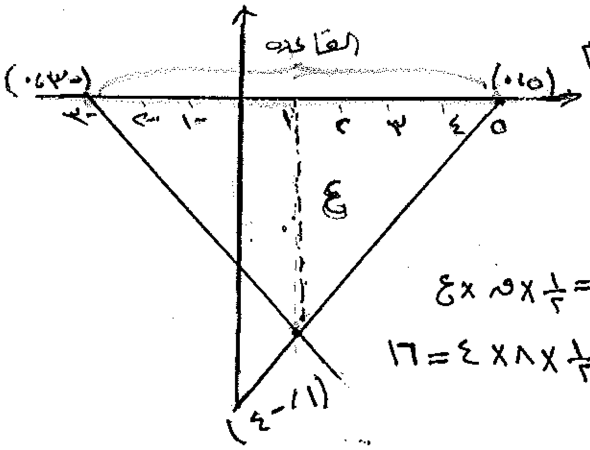
صفر = س - ٥ ← س = ٥ ← (٥،٠)

العمودي مع السينات ← ص = صفر

صفر = -س - ٣ ← س = -٣ ← (-٣،٠)

المماس مع العمودي هي نقطة التماس (١،-٤)

* نرسم



المساحة = ١/٢ × ق × ع

م = ١/٢ × ٨ × ٤ = ١٦

أسئلة غير مباشرة :-

④ في هذا النوع يكون المماس ماراً بنقطة خارجية (خبيثة).

* اذا كان لدينا نقطة خبيثة (ليست نقطة تماس) نقوم بما يلي مهما كان المطلوب :-

١) نفرض نقطة التماس (س، ص) ونجد الميل من $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$.

٢) نجد المشتقة ونساويها بالميل فتظهر معادلة مختلطة

٣) نتخلص من ص أو س من خلال المنحنى ونحل المعادلة الناتجة فتظهر نقطة التماس ثم نعود للمطلوب.

---

① ما معادلة المماس المرسوم من النقطة (٠، ٢) لمنحنى ق(س) = $\text{س}^٣ + ٤$

الحل

لدينا (٠، ٢) وهي نقطة خبيثة لأنها لا تحقق المنحنى بل هي نقطة خارجية إذن نقطة التماس (س، ص)

نجد الميل = $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٠} = \frac{\text{ص} - ٢}{\text{س}}$ | نجد المشتقة ق'(س) = $٣\text{س}^٢$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س}} = ٣\text{س}^٢ \longleftarrow \text{ص} - ٢ = ٣\text{س}^٣$

نعود للأصل للتخلص من ص

$\longleftarrow \text{س}^٣ + ٤ - ٢ = ٣\text{س}^٣ \longleftarrow ٢ = ٢\text{س}^٣$

$\text{س}^٣ = ١ \longleftarrow \text{س} = ١$

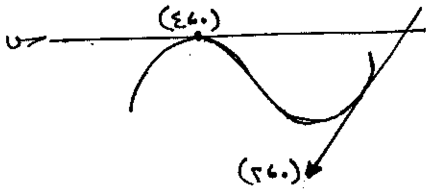
∴ نقطة التماس (١، ق(١))

$١ + ٤ = ٥ \longleftarrow (١، ٥)$

∴ م المماس = ق'(١) حيث ق'(س) = $٣\text{س}^٢$

م المماس = ٣

معادلة المماس : ص − ٥ = ٣(س − ١)



---

② بين أن لمنحنى ق(س) = $\text{س}^٤$ مماسين من النقطة ($\frac{٣}{٤}$، ٠)

الحل :

لدينا النقطة ($\frac{٣}{٤}$، ٠) وهي خبيثة لذلك نفرض نقطة التماس (س، ص)

م المماس = $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - \frac{٣}{٤}}$ | نجد المشتقة ق'(س) = $٤\text{س}^٣$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{\text{ص}}{\text{س} - \frac{٣}{٤}} = ٤\text{س}^٣ \longleftarrow \text{ص} = ٤\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٣$

نتخلص من ص بالعودة للأصل

$\text{س}^٤ = ٤\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٣ \longleftarrow \text{صفر} = ٣\text{س}^٤ - ٣\text{س}^٣$

$٣\text{س}^٣(\text{س} - ١) = ٠ \longleftarrow \text{س} = ٠$ أو س = ١

هناك نقطتي تماس هما (٠، ق(٠)) ، (١، ق(١))

لذلك يوجد مماسين هما ص = ٠ ، ص = ٤س − ٣

تمرين محلول :

ما مجموعة قيم س التي يكون عندها المماس لمنحنى ق(س) = $\text{س}^٢$ ماراً بالنقطة (١، ٠).

الحل :

لدينا نقطة خبيثة (١، ٠) لذلك نفرض نقطة التماس (س، ص)

ميل المماس = $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} - ١}$ | نجد المشتقة ق'(س) = ٢س

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{\text{ص}}{\text{س} - ١} = ٢\text{س} \longleftarrow \text{ص} = ٢\text{س}^٢ - ٢\text{س}$

نتخلص من ص بالعودة للأصل

$\text{س}^٢ = ٢\text{س}^٢ - ٢\text{س} \longleftarrow ٢\text{س}^٢ - \text{س}^٢ - ٢\text{س} = ٠$

$\text{س}^٢ - ٢\text{س} = ٠ \longleftarrow \text{س}(\text{س} - ٢) = ٠$

س = ٠ أو س = ٢ ⟸ قيم س هي {٠، ٢}

---

③ اوجد معادلة المماس للمنحنى $٤\text{س}^٢ + \text{ص}^٢ = ٤$ والمرسوم من النقطة الخارجية عنه (−٢، ٠)

الحل : نقطة (−٢، ٠) خارجية

نقطة التماس (س، ص)

م المماس = $\frac{\text{ص} - ٠}{\text{س} + ٢}$ | نجد المشتقة

$٨\text{س} + ٢\text{ص}\,\text{ص}' = ٠$

$\text{ص}' = \frac{-٨\text{س}}{٢\text{ص}} = \frac{-٤\text{س}}{\text{ص}}$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{\text{ص}}{\text{س} + ٢} = \frac{-٤\text{س}}{\text{ص}}$

$ص^٢ = -٤س^٢ - ٨س$

$ص^٢ + ٤س^٢ = -٨س \leftarrow \frac{٤}{-٨} = \frac{\cancel{-٨}س}{\cancel{-٨}} \Leftarrow س = -\frac{١}{٢}$

لكن $٤س^٢ + ص^٢ = ٤ \leftarrow ∴ ١ + ص^٢ = ٤ \leftarrow ص^٢ = ٣$

$ص = \sqrt{٣}، -\sqrt{٣}$

نقط التماس $(\frac{-١}{٢}، \sqrt{٣})$ ، $(\frac{-١}{٢}، -\sqrt{٣})$

$م_١ = \frac{٢}{\sqrt{٣}}$ ، $م_٢ = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

معادلة المماس١ : $ص - \sqrt{٣} = \frac{٢}{\sqrt{٣}}(س + \frac{١}{٢})$

معادلة المماس٢ : $ص + \sqrt{٣} = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}(س + \frac{١}{٢})$

④ جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(٢، \frac{١}{٢})$ بحيث يكون عمودياً على منحنى $ق(س) = س^٢$

الحل النقطة $(٢، \frac{١}{٢})$ خبيثة للعمودي

نقطة التماس (س، ص) | نجد المشتقة

م العمودي $= \frac{ص - \frac{١}{٢}}{س - ٢}$ | $ق'(س) = ٢س$

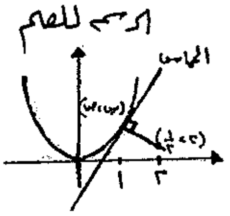
م المماس $= \frac{-س + ٢}{ص - \frac{١}{٢}}$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{-س + ٢}{ص - \frac{١}{٢}} = ٢س$ (عوّض بدل ص من السؤال $ص = س^٢$)

$\frac{٢ - س}{س^٢ - \frac{١}{٢}} = ٢س \leftarrow ٢ = ٢س^٣$

$س^٣ = ١ \Leftarrow س = ١$



نقطة التماس (١، ق(١)) ← $(١)^٢ = ١$

$\Leftarrow (١، ١)$

م المماس = ق'(١) = ٢

م العمودي $= \frac{-١}{٢}$

معادلة العمودي هي $ص - ١ = \frac{-١}{٢}(س - ١)$

تمرين محلول ①

رسم مماس لمنحنى $ق(س) = س^٣ + ١$ عند النقطة $(س_١، ص_١)$ فقطع المنحنى في نقطة ثانية هي النقطة (٢، ٩) جد معادلة المماس .

الحل

م المماس $= \frac{ص_١ - ٩}{س_١ - ٢}$ | نجد المشتقة $ق'(س) = ٣س^٢$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{ص_١ - ٩}{س_١ - ٢} = ٣س_١^٢$

$\frac{س_١^٣ + ١ - ٩}{س_١ - ٢} = ٣س_١^٢$

$\frac{\cancel{(س_١ - ٢)}(س_١^٢ + ٢س_١ + ٤)}{\cancel{س_١ - ٢}} = ٣س_١^٢$

$٠ = ٢س_١^٢ - ٢س_١ - ٤ \leftarrow ٠ = س_١^٢ - س_١ - ٢$

$٠ = (س_١ + ١)(س_١ - ٢)$

$س_١ = -١$ ، $\boxed{س_١ = ٢}$ ← معطاة من السؤال

نقطة التماس (−١، ق(−١)) ← $(-١)^٣ + ١ = ٠ \Leftarrow (-١، ٠)$

م المماس عند س = −١ = ق'(−١) حيث $ق'(س) = ٣س^٢$

$= ٣(-١)^٢ = ٣$

معادلة المماس: $ص - ٠ = ٣(س + ١)$

تمرين محلول ②

رسم مماس من النقطة $(س_١، ص_١)$ الواقعة على منحنى العلاقة $ص^٢ = ٤س$ فقطع محور السينات في النقطة ك، اثبت ان بُعد النقطة ك عن نقطة الأصل يساوي $س_١$

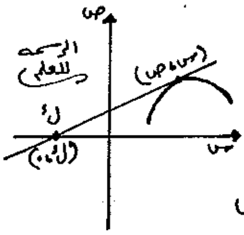
الحل

نقطة التماس $(س_١، ص_١)$ ، (ك، ٠) نقطة خارجية .

م المماس $= \frac{ص_١ - ٠}{س_١ - ك}$ | نجد المشتقة

$٢ص \cdot \frac{دص}{دس} = ٤$

$\frac{دص}{دس} = \frac{٤}{٢ص} = \frac{٢}{ص}$



$\frac{ص_١}{س_١ - ك} = \frac{٢}{ص_١}$ مهمة لأنها من نقطة التماس

$ص_١^٢ = ٢س_١ - ٢ك$ (نعود للأصل)

$٤س_١ = ٢س_١ - ٢ك \leftarrow ٢س_١ = -٢ك$

$∴ س_١ = -ك$ ← النقطة التي تقع على السينات هي $(-س_١، ٠)$

∴ بُعد ك عن نقطة الأصل $= س_١$ (البُعد موجب دائماً)

⑤ من النقطة م (١، ٢) رسم مماسان لمنحنى $ق(س) = ٢س - س^٢$ فمسّاه في النقطتين ك، هـ جد مساحة المثلث (م ك هـ) .

الحل ←

م المماس = $\frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$ = $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ١}$

نجد المشتقة
قَ(س) = ٢ - ٢س

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ١}$ = ٢ - ٢س

$\frac{٢\text{س} - \text{س}^٢ - ٢}{\text{س} - ١}$ = ٢ - ٢س

٢س - س^٢ - ٢ = ٤س - ٢س^٢ - ٢

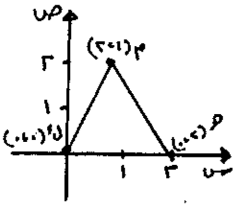
س^٢ - ٢س = ٠ ← س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

نقطة التماس الأولى (ك) ← (٠ ، ق(٠))
↳ ٠ - ٠ = ٠ ← (٠ ، ٠)

نقطة التماس الثانية (هـ) ← (٢ ، ق(٢))
↳ ٤ - ٤ = ٠ ← (٢ ، ٠)

← نرسم في المستوى الديكارتي



مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ × ق × ع
= $\frac{١}{٢}$ × ٢ × ٢
= ٢

* ب) أسئلة غير مباشرة :

في هذا النوع تكون المعلومات عن المماس لذلك نقوم بما يلي :

أ) نجد ميل المماس ب) نجد المشتقة

جـ) نساوي الميل بالمشتقة .

عند ذلك ينتج س أو ص أو كلاهما ونجد نقطة التماس .

مراجعة ...

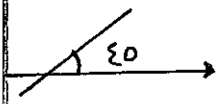
حساب ميل المستقيم وزاوية الميل

مثال للتدريب : ما ميل المستقيم في كل حالة :

١) يمر بالنقطتين (١،٢) ، (-١،٣)

الحل : م = $\frac{\text{ص}_٢ - \text{ص}_١}{\text{س}_٢ - \text{س}_١}$ = $\frac{٣ - ٢}{-١ - ١}$ = $\frac{١}{-٢}$

٢) يصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .



الحل : م = ظاهـ = ظا٤٥ = ١

٣) يوازي المستقيم الذي ميله ٣

الحل : م$_١$ = م$_٢$ = ٣ (التوازي)

٤) معادلته ٣ص - ٥س = ٧

الحل : م = معامل س ← ص = $\frac{٥\text{س}}{٣}$ + $\frac{٧}{٣}$

م = $\frac{٥}{٣}$

أو م = صَ ← ٣صَ - ٥ = ٠ ← م = $\frac{٥}{٣}$

٥) يعامد المستقيم الذي يصنع زاوية ٤٥° مع الاتجاه السالب لمحور السينات .

الحل : م × م$_ع$ = -١ ← م$_ع$ = ظا١٣٥° = -١
م × -١ = -١ ← م = ١ (التعامد)

مثال للتدريب ① :

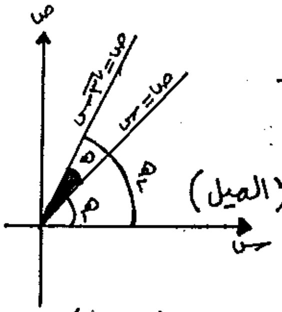
ما زاوية ميل المستقيم الذي معادلته ص = $\sqrt{٣}$ س - ١

الحل : ظاهـ = م = $\sqrt{٣}$

∴ هـ = ٦٠° = $\frac{\pi}{٣}$.

مثال للتدريب ② :

من الشكل المجاور جد الزاوية هـ



الحل :

المستقيم ص = س ← ظاهـ$_١$ = ١ (الميل)

∴ هـ$_١$ = ٤٥

المستقيم ص = $\sqrt{٣}$ س ← ظاهـ$_٢$ = $\sqrt{٣}$ (الميل)

∴ هـ$_٢$ = ٦٠ ← هـ = ٦٠ - ٤٥ = ١٥°

أمثلة :

١) ما معادلة المماس الأفقي لمنحنى ق(س) = س^٢ - ٢س ثم جد معادلة العمودي عليه .

الحل :

* نجد الميل = صفر (من كلمة أفقي) | نجد المشتقة قَ(س) = ٢س - ٢

ميل المماس = المشتقة عند التماس

صفر = ٢س - ٢ ← ٢ = ٢س ← س = ١

* نقطة التماس (١ ، ق(١))
↳ من المنحنى ١ - ٢ = -١ ← (١ ، -١)

* ميل المماس = صفر (جاهز) أو من المشتقة قَ(١)

* معادلة المماس : ص + ١ = صفر (س - ١)
ص = -١

* معادلة العمودي : س = ١ فوراً من نقطة التماس .

٢) ما معادلة العمودي على المماس لمنحنى ق(س) = $س^{٢}$ + ٣س عند النقطة التي يصنع عندها المماس زاوية قياسها ٤٥° مع محور السينات الموجب .

* ميل المماس = ظاهـ = ظا٤٥ = ١ | نجد المشتقة

ميل العمودي = -١ | قَ(س) = ٢س + ٣

ميل المماس = المشتقة عند التماس

١ = ٢س + ٣ ← -٢ = ٢س ← س = -١

* نقطة التماس (-١، ق(-١))

كـ من المنحنى $(-١)^{٢}$ + ٣(-١) = -٢

← (-١، -٢)

∴ معادلة العمودي : ص + ٢ = -١ (س + ١)

تمرين محلول

جد معادلة المماس للمنحنى ق(س) = $س^{٣}$ + س عند النقطة التي يكون ميل المماس عندها يساوي ٤ .

الحل

نجد ميل المماس وهو جاهز من السؤال = ٤ | نجد المشتقة قَ(س) = ٣$س^{٢}$ + ١

ميل المماس = المشتقة عند التماس

٤ = ٣$س^{٢}$ + ١ ← ٣ = ٣$س^{٢}$ ← $س^{٢}$ = ١ ← س = ١، -١

نقطة التماس الأولى (١، ق(١))

كـ من المنحنى ١ + ١ = ٢ ← (١، ٢)

* الميل = ٤ (من السؤال) ← معادلة المماس: ص - ٢ = ٤(س - ١)

نقطة التماس الثانية (-١، ق(-١))

كـ من المنحنى -١ - ١ = -٢ ← (-١، -٢)

* الميل = ٤ (من السؤال) ← معادلة المماس: ص + ٢ = ٤(س + ١)

٣) جد نقطة على منحنى الاقتران ص = ظاس ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$) بحيث أن المماس عندها يوازي المستقيم ص = ٢س

الحل

نجد ميل المماس = ميل المستقيم الوازي = ٢ (معامل س) | نجد المشتقة قَ(س) = $قا^{٢}$س

ميل المماس = المشتقة عند التماس

٢ = $قا^{٢}$س ← قاس = $\sqrt{٢}$ ، -$\sqrt{٢}$ تهمل في الربع الثاني

← $\frac{١}{جتاس}$ = $\sqrt{٢}$ ← جتاس = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ← س = $\frac{\pi}{٤}$

∴ نقطة التماس ($\frac{\pi}{٤}$، ق($\frac{\pi}{٤}$))

ظا٤٥ = ١ (نعوض في المنحنى لإيجاد ق($\frac{\pi}{٤}$))

← ($\frac{\pi}{٤}$، ١)

ملاحظة على المثال: اذا كان لدينا معادلة الموازي أو العمودي على المماس نأخذ منها الميل فقط (شاهد زور) .

٤) جد نقطة على منحنى $\sqrt{س}$ + $\sqrt{ص}$ = ٦ بحيث يكون عندها المماس عمودياً على المستقيم ٣ص - ٦س = ٧

الحل

نجد ميل المماس = $\frac{-١}{\text{ميل العمودي}}$

نجد ميل العمودي ← ص = $\frac{٦}{٣}$س + $\frac{٧}{٣}$

م العمودي = ٢ ← ميل المماس = $\frac{-١}{٢}$

نجد المشتقة

$\frac{١}{٢\sqrt{س}}$ + $\frac{١}{٢\sqrt{ص}}$. $\frac{دص}{دس}$ = ٠

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-٢\sqrt{ص}}{٢\sqrt{س}}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{-١}{٢}$ = $\frac{-\sqrt{ص}}{\sqrt{س}}$ (نعود للأصل للتخلص من $\sqrt{ص}$ أو $\sqrt{س}$ حيث $\sqrt{ص}$ = ٦ - $\sqrt{س}$)

$\frac{١}{٢}$ = $\frac{٦ - \sqrt{س}}{\sqrt{س}}$ ← $\sqrt{س}$ = ١٢ - ٢$\sqrt{س}$

٣$\sqrt{س}$ = ١٢ ← $\sqrt{س}$ = ٤ .

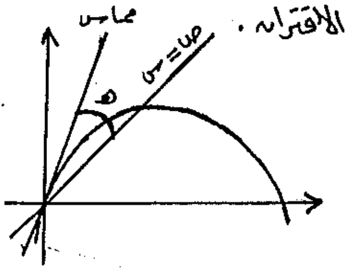
س = ١٦

∴ $\sqrt{ص}$ = ٦ - $\sqrt{١٦}$ ← $\sqrt{ص}$ = ٢ ← ص = ٤

∴ نقطة التماس (١٦، ٤) .

تمرين

من الشكل اوجد قياس الزاوية المحصورة بين المستقيم ص = س ومماس منحنى الاقتران .



ق(س) = $\sqrt{٣}$س - $س^{٢}$ عند (٠،٠)

(هـ = ١٥)

العملية العكسية

حساب قَ(م) بمعلومية المماس أو العمودي حيث (م، ق(م)) نقطة التماس .

المشتقة عند التماس = ميل المماس

١) اذا كان المستقيم ٣ص = ٢س - ١ مماساً لمنحنى ق(س) عند النقطة (٢،١) جد قَ(٢) أو $\underset{\text{س}\to ٢}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق(س)}-١}{\text{س}-٢}$

الحل: لدينا مماس لذلك نجد ميله

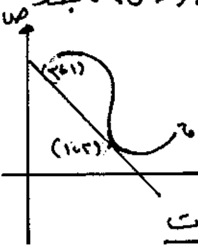
$\text{ص} = \frac{٢}{٣}\text{س} - \frac{١}{٣}$ ← الميل = $\frac{٢}{٣}$

لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{٢}{٣}$ = قَ(٢) .

---

٢) الشكل المجاور يمثل المماس لمنحنى ق(س)، جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(٢+\text{هـ})-١}{\text{هـ}}$



الحل: المطلوب قَ(٢)

لدينا المماس لذلك نجد ميله = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}}$

$= \frac{٣-١}{١-٢} = \frac{٢}{-١} = -٢$

لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس ← -٢ = قَ(٢)

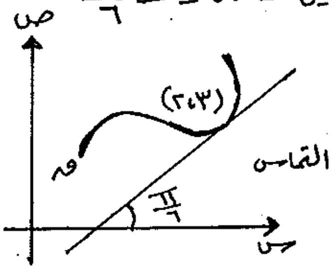
---

٣) الشكل المجاور يمثل المماس لمنحنى ق(س) جد قَ(٣)

الحل

لدينا المماس مع الزاوية لذلك ميل المماس = ظا $\frac{\pi}{٦}$

م = ظا ٣٠ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$



لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = قَ(٣)

---

٤) اذا كان العمودي على المماس لمنحنى ق(س) يصنع زاوية قياسها ٦٠° مع محور السينات السالب وذلك عند النقطة (١،٣) جد $\underset{\text{هـ}\to ٠}{\text{نهـا}}\ \frac{\text{ق}(١+\text{هـ})-٣}{\text{هـ}}$

الحل: المطلوب قَ(١)

لدينا زاوية ميل العمودي وهي ١٢٠° (المكملة) "السبب هو محور السينات السالب"

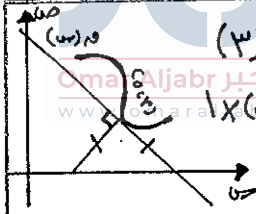
∴ ميل العمودي = ظا ١٢٠° = -ظا ٦٠ = $-\sqrt{٣}$

لكن ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{١}{\sqrt{٣}}$ = قَ(١)

---

٥) من الشكل المجاور جد (س.ق)َ(٣)



(س.ق)َ(س) = س.قَ(س) + ق(س)×١

(س.ق)َ(٣) = ٣قَ(٣) + ق(٣)

(س.ق)َ(٣) = ٣(-١) + ٥

= ٢

*ملاحظة ميل المماس = -ظا٤٥° = -١

---

٦) اذا كان هـ(س) اقتراناً قابلاً للاشتقاق عند س=٠ وكانت معادلة المماس المرسوم لمنحنى هـ(س) عند س=٠ هي ٢ص - ٣س = ٦ ، جد قَ(٠) حيث ق(س) = هـ(س) - $\frac{١}{\text{هـ}^{٢}\text{(س)}}$.

الحل

لدينا المماس (الحامي) لذلك نجد

هـ(٠) = $\text{ص}|_{\text{س}=٠}$ ، هـَ(٠) = معامل س

٢ص = ٦ + ٣س ← ص = ٣ + $\frac{٣}{٢}$س

هـ(٠) = ٣ ، هـَ(٠) = $\frac{٣}{٢}$

← قَ(س) = هـَ(س) + $\frac{١\times ٢\text{هـ(س)}\times \text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٤}}$

قَ(س) = هـَ(س) + $\frac{٢\text{هـَ(س)}}{(\text{هـ(س)})^{٣}}$

قَ(٠) = هـَ(٠) + $\frac{٢\text{هـَ(٠)}}{(\text{هـ(٠)})^{٣}}$

$= \frac{٣}{٢} + \frac{\cancel{٢}\times\frac{٣}{\cancel{٢}}}{٢٧} = \frac{٣}{٢} + \frac{١}{٩} = \frac{٢٩}{١٨}$

تمرين ①

اذا كان المستقيم ٤س - ٢ص - ٨ = ٠ يمس منحنى ق(س) عند (٣،٢) وكان المستقيم ٩ص + ٣س = ٠ عمودياً على المماس لمنحنى ل عند (٣،-١) فجد (ق×ل)َ(٣)

الجواب (٤)

تمرين ②

ق(س) = $\frac{\text{س}+\text{هـ}^{٢}\text{(س)}}{\text{ل(س)}}$ ، ل(س) ≠ ٠ ، جد قَ(٣) علماً بأن هنالك مماساً أفقياً مشتركاً للمنحنيين هـ(س)، ل(س) عند النقطة (٣،٤) الواقعة على المنحنيين

الجواب ($\frac{١}{٤}$)

تمرين ③

ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية ويمر بالنقطة (٠،٢) وله مماسان الأول عند س = -١ ويصنع زاوية قياسها $\frac{٣\pi}{٤}$ مع محور السينات الموجب، والثاني عند س = ٢ ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع محور السينات الموجب، جد قاعدة الاقتران.

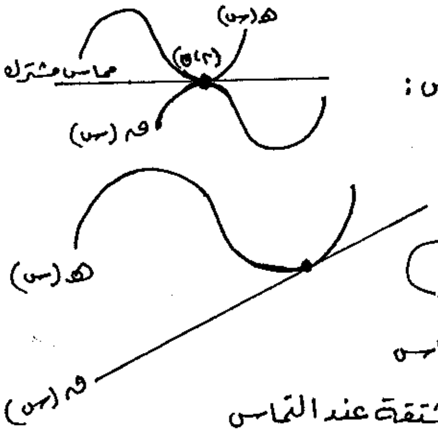
(الجواب ق(س) = $\frac{١}{٣}$ $س^{٢}$ − $\frac{١}{٣}$ س + ٢)

أسئلة الثوابت

تكون معادلات بعدد الثوابت حيث نقطة التماس تحقق المماس وتحقق المنحنى عند نقطة التماس يكون:

الاقتران = الاقتران & المشتقة = المشتقة

أقسام أسئلة الثوابت:



* مباشرة:

١) لدينا نقطة التماس:

ق(٢) = ٥

هـ(٢) = ٥

قَ(٢) = هـَ(٢)

(ميل المماس نفسه)

٢) لدينا معادلة المماس

- ميل المماس = المشتقة عند التماس
- الاقتران = الاقتران (عند التماس)

* غير مباشرة:

لدينا معلومات عن المماس:

نجد معادلة المماس فوراً فيصبح مباشر

أمثلة:

١) عين الثوابت أ، ب، جـ في المنحنيين

ق(س) = جـ س − $س^{٢}$ ، هـ(س) = أ$س^{٢}$ + ب س + جـ

بحيث هناك مماس مشترك للمنحنيين عند النقطة (٢،٠) الواقعة على المنحنيين.

الحل

نحتاج ٣ معادلات

* (٢،٠) ← يحقق ق(س) ← صفر = ٢جـ − ٤ ← جـ = ٢

* (٢،٠) ← يحقق هـ(س) ← صفر = ٤أ + ٢ب + جـ

٤أ + ٢ب + ٢ = ٠ ← ٢أ + ب = -١ ——— ①

من معلومات هذا الدرس وكلمة مماس مشترك فإن

المشتقة = المشتقة (عند التماس)

قَ(٢) = هـَ(٢) | قَ(س) = جـ − ٢س

جـ − ٤ = ٤أ + ب | هـَ(س) = ٢أس + ب

٢ − ٤ = ٤أ + ب ← ٤أ + ب = -٢ ——— ②

بحل المعادلتين أ = $\frac{-١}{٢}$ ، ب = صفر

٢) اذا كان ص = ٤س + أ مماساً لمنحنى ق(س) = $س^{٢}$ + ٢

جد الثابت أ.

الحل

م المماس = ٤ (معامل س) | نجد المشتقة قَ(س) = ٢س

ميل المماس = المشتقة عند التماس

٤ = ٢س ← س = ٢

أيضاً الاقتران = الاقتران

٤س + أ = $س^{٢}$ + ٢

٨ + أ = ٤ + ٢ ← أ = -٢

أو نجد نقطة التماس ثم نعوض

٣) اذا كان المستقيم المار بالنقطتين (٠،-٢) ، (٢،٦) يمس منحنى ق(س) = أ$س^{٢}$ + ٢س − ١ ، جد الثابت أ

الحل

لاحظ أن النقطتين خبيثين

م المماس = $\frac{\Delta ص}{\Delta س}$

= $\frac{٦-(-٢)}{٢} = \frac{٨}{٢} = ٤$

نجد المشتقة قَ(س) = ٢أس + ٢

ميل المماس = المشتقة عند التماس

٤ = ٢أس + ٢ ← ٢ = ٢أس

أ = $\frac{١}{س}$ ——— ①

نحتاج معادلة أخرى حيث تكون الاقتران = الاقتران (عند التماس)

لذلك نجد معادلة المماس ← ص + ٢ = ٤(س − ٠)

ص = ٤س − ٢

∴ ٤س − ٢ = أ$س^{٢}$ + ٢س − ١ ——— ②

بحل المعادلتين ينتج أن ⟸ أ = ١

٤) اذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = أس^{٢} + ١$ يمر بنقطة الأصل ويصنع زاوية قياسها $\frac{\pi}{٤}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات، جد الثابت أ .

الحل

م المماس = ظا $\frac{\pi}{٤} = ١$ { $قَ(س) = ٢أس$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$١ = ٢أس \leftarrow أ = \frac{١}{٢س}$

نجد معادلة المماس

$ص - ٠ = ١(س - ٠) \leftarrow ص = س$

الاقتران = الاقتران

$س = أس^{٢} + ١$

$س = \frac{١}{٢س} \times س^{٢} + ١$

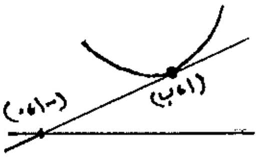
$\frac{١}{٢}س = ١ \leftarrow س = ٢$

* $\frac{١}{٢س} = أ \leftarrow \frac{١}{٤} = أ$

تمرين محلول

رسم مماس لمنحنى $ق(س) = س^{٢} + أ$ من النقطة (١، ب) الواقعة على المنحنى فقطع المماس محور السينات عند $س = -١$ جد الثوابت أ، ب

الحل



لدينا نقطة تماس هي (١، ب)

لدينا نقطة خبيثة هي (−١، ٠)

م المماس $= \frac{ب - ٠}{١ - (-١)} = \frac{ب}{٢}$ } نجد المشتقة $قَ(س) = ٢س$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

$\frac{ب}{٢} = ٢(١) \leftarrow ب = ٤$

∴ نقطة التماس هي (١، ٤) وتحقق المنحنى

$(١، ٤) \leftarrow ٤ = ١ + أ \leftarrow أ = ٣$

تمرين ①

اذا كان المماس لمنحنى $ق(س) = س^{٢} + ٥س$ عند $س = س_{١}$ يصنع زاوية قياسها $(\frac{\pi}{٤})$ مع محور السينات الموجب جد نقطة التماس. الجواب (−٣، −٦)

تمرين ②

عيّن الثابت أ في المنحنى $ق(س) = أس^{٢}$ بحيث قياس زاوية ميل المماس تساوي ٤٥° عندما $س = ١$

الجواب $(\frac{١}{٢})$

تمرين محلول

$ق(س) = س^{٢} - أس - (١ - أ)$ حيث أ ثابت، اكتب قاعدة الاقتران ق من أجل قيمة أ التي تجعل محور السينات مماساً للمنحنى .

الحل

كان المطلوب جد الثابت أ

لدينا محور السينات كمماس ← ميله = صفر

لدينا $قَ(س) = ٢س - أ$

ميل المماس = المشتقة عند التماس

صفر $= ٢س - أ \leftarrow أ = ٢س$ ——— ①

تذكر معادلة محور السينات هي ص = صفر

الاقتران = الاقتران (عند التماس)

$س^{٢} - أس - (١ - أ) =$ صفر ——— ②

نعوض ① في ② ← $س^{٢} - ٢س(س) - (١ - ٢س) =$ صفر

$س^{٢} - ٢س^{٢} + ٢س - ١ = ٠$

$-س^{٢} + ٢س - ١ = ٠ \leftarrow (-س + ١)(س - ١) = ٠$

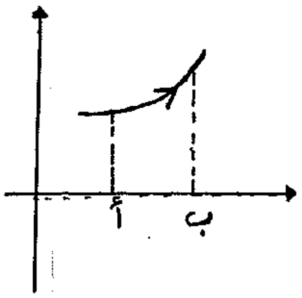
$س = ١$ ، $س = ١$

∴ $أ = ٢س \leftarrow أ = ٢(١) = ٢$

∴ قاعدة الاقتران $ق(س) = س^{٢} - ٢س + ١$

خصائص المنحنيات

[مجالات التزايد]



بالنظر لـ ق(س) من اليسار إلى اليمين نلاحظ أن ق(س) متزايد في [أ، ب]

تعريف التزايد

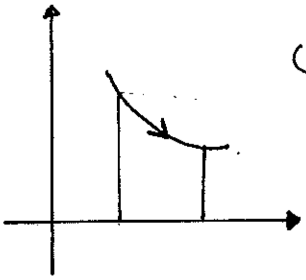
لكل $س_{١}، س_{٢} \in [أ، ب]$

بحيث $س_{٢} > س_{١}$ فإن

$ق(س_{٢}) > ق(س_{١})$

⇐ عندها يكون متزايد في [أ، ب] .

[٢] مجالات التناقص :-



بالنظر نلاحظ أنه ق(س) متناقص في [أ، ب] .

تعريف التناقص :

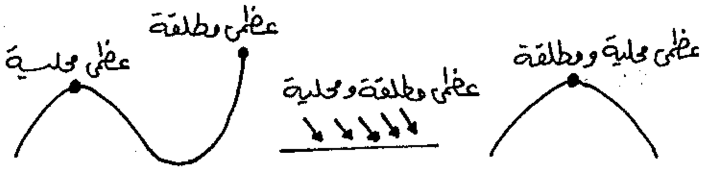
لكل س١ ، س٢ ∈ [أ، ب]

بحيث س٢ > س١ ، فإنه

ق(س٢) < ق(س١)

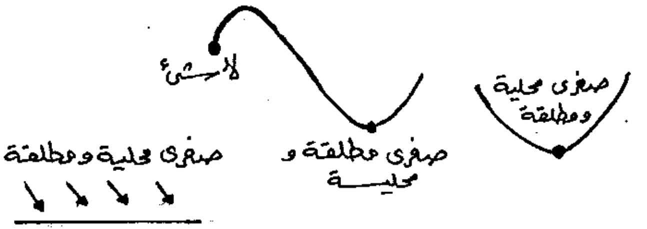
[٣] القيم القصوى وتقسم إلى

أ) عظمى وهي نوعان محلية ومطلقة .



* كل مطلقة محلية وليست كل محلية مطلقة ماعدا الأطراف .

ب) صغرى وهي نوعان محلية ومطلقة .

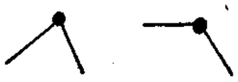


[٤] النقطة الحرجة :-

هي النقطة التي تكون عندها المشتقة = صفر أو غير موجودة وتكون معرفة .

روافد الحرجة من الرسم هي :-

- الأطراف المغلقة
- نقاط عدم الاتصال
- جميع قيم الخط الثابت
- الرؤوس المدببة



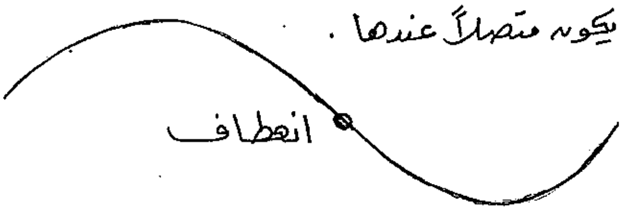
[٥] مجالات التقعر وتقسم إلى :

أ) ق مقعر للأعلى اذا كان منحناه واقعاً فوق جميع مماساته.

ب) ق مقعر للأسفل اذا كان منحناه واقعاً تحت جميع مماساته

* نقطة الانعطاف :-

هي النقطة التي يبدل الاقتران من تقعره حولها و يكون متصلاً عندها .



أمثلة :-

① الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) في الفترة [١، ٥] أوجد الخصائص (٨)

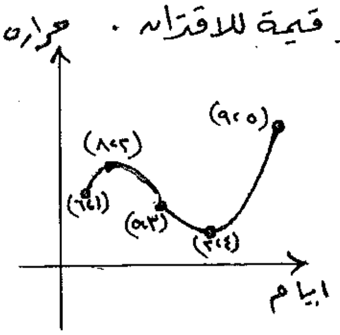
١) فترات التزايد ٢) فترات التناقص

٣) النقط القصوى ٤) القيم القصوى

٥) قيم س الحرجة ٦) مجالات التقعر للأعلى

٧) مجالات التقعر للأسفل ٨) نقط الانعطاف

٩) أكبر قيمة للاقتران واصغر قيمة للاقتران .



الحل :

١) ق متزايد في [١، ٢]، [٤، ٥]

٢) ق متناقص في [٢، ٤]

٣) النقط القصوى

(٢، ٨) عظمى محلية

(٥، ٩) عظمى مطلقة

(٤، ٢) صغرى محلية مطلقة

④ القيم القصوى يوجد قيمة عظمى مطلقة عند س=٥ هي ٩ ، يوجد قيمة عظمى محلية عند س=٢ هي ٨ يوجد قيمة صغرى مطلقة ومحلية عند س=٤ هي ٢ .

٥) قيم س هي {٣ ، ٤ ، ١، ٥}

قمة   قاع   أطراف الفترة الكلية

٦) [٣، ٥]

٧) [١، ٣]

٨) (٣، ٥)

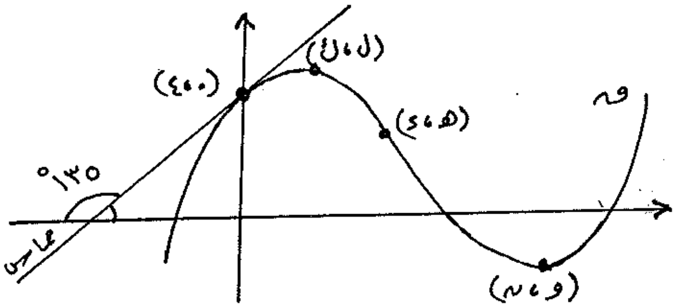
٩) أكبر قيمة للاقتران هي ٩ وتحدث عند س = ٥

أصغر قيمة للاقتران هي ٣ وتحدث عند س = ٤

③ الشكل المجاور يمثل منحنى الاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الثالثة المعرف على ح أوجد:

١) مجالات تزايد ق   ٢) النقط القصوى لـ ق

٣) التقعر للأسفل لـ ق   ٤) ق'(ل) ، ق'(و) ، ق'(٠)



١- ق متزايد (-∞، ل] ، [و، ∞)

٢- عظمى محلية (ل، ك) ، صغرى محلية (و، م)

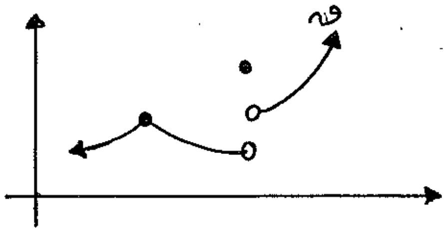
٣- ق مقعر للأسفل (-∞، هـ]

٤- ق'(ل) = ٠ (مماس أفقي)

ق'(و) = ٠ (مماس أفقي)

ق'(٠) = ظا ٤٥ = ١

③ الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) أوجد قيم س الحرجة



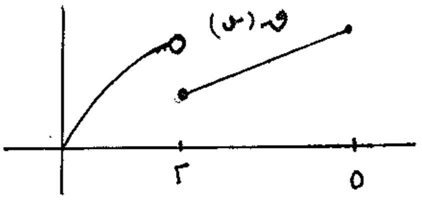
الحل:

س = ٣ المشتقة غير موجودة (لا نستطيع رسم مماس وحيد)

س = ٤ المشتقة غير موجودة لأن ق غير متصل عند س = ٤

∴ قيم س = {٣، ٤}

تمرين) اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) المعرف على [٠، ٥] فإن النقطة (٣، ق(٣)) هي نقطة



أ) انعطاف

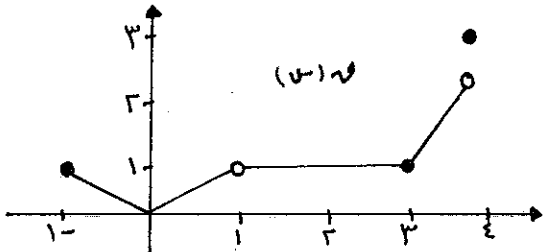
ب) قيمة عظمى محلية

ج) قيمة صغرى محلية

د) قيمة صغرى مطلقة

تمرين محلول:

يمثل الشكل منحنى ق(س) معتمداً عليه أجب عما يليه:



① قيم س الحرجة للاقتران ق .

② فترات تزايد ق

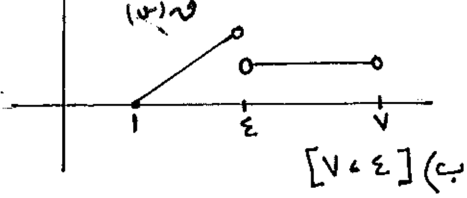
الحل:

① س = (١، ٣] ، {-١، ٠، ٤}

② تزايد ق [٠، ١) ، [٣، ٤]

تمرين)

يمثل الشكل منحنى ق(س) معرف على مجاله فإن قيم س الحرجة للاقتران ق هي:



أ) [٤، ٧)   ب) [٤، ٧]

ج) (٤، ٧) ∪ {١}   د) (٤، ٧)

روافد الحرجة:

* الأطراف المغلقة.
* جذور بسط ومقام المشتقة الأولى.
* التحول قد يؤدي إلى حرجة.

اشارة المشتقة الأولى

نستفيد من اشارة المشتقة الأولى في ايجاد

أ) مجالات التزايد والتناقص .

ب) القيم القصوى .

جـ) النقط الحرجة .

خطوات الحل

* نجد المشتقة الأولى .
* نجد قيم س الحرجة .
* نرسم خط اعداد ، ونضع عليه الحرجة (مع الانتباه للفترة وأطراف الفترة)
* نعوض في قَ(س) للحصول على اشارة قَ(س)
* نرسم خطوط التزايد و التناقص للحصول على صورة ق(س) الأصلي .

أمثلة :

جد كلاً مما يلي :-

١) قيم س الحرجة

٢) مجالات التزايد والتناقص .

٣) القيم القصوى مع تحديد نوعها {ع ، ص}

لكل من الاقترانات التالية

① ق(س) = $س^٢$ − ٦س + ١١

الحل : ق متصل وقابل للاشتقاق على ح

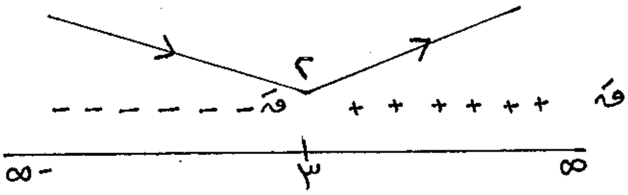
قَ(س) = ٢س − ٦

٢س − ٦ = ٠ ← س = ٣

الحرجة

أطراف : لايوجد جذور : ٣

١) قيم س الحرجة {٣}



٢) ق(س) متزايد في [٣ ، ∞) ، متناقص في (−∞ ، ٣]

٣) يوجد قيمة صغرى مطلقة محلية عند س = ٣ وهي ق(٣) = ٢

② ق(س) = $س^٢$ − ٦س + ١١ ، س ∈ [١ ، ٥]

الحل ق متصل على [١ ، ٥] وقابل للاشتقاق على (١ ، ٥) لانه كثير حدود

قَ(س) = ٢س − ٦

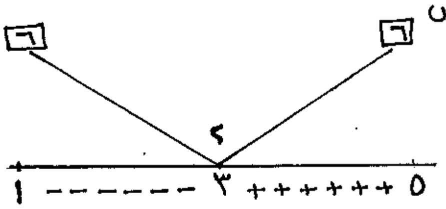
٢س − ٦ = ٠ ← س = ٣ ∈ (١ ، ٥)

١) قيم س الحرجة

أطراف {١ ، ٥} جذور : ٣

٢) ق(س) متناقص في [١ ، ٣]

ق(س) متزايد في [٣ ، ٥]



٣) يوجد قيمة صغرى مطلقة عند س = ٣ هي ق(٣) = ٢

يوجد قيمة عظمى مطلقة عند س = ١ هي ق(١) = ٦

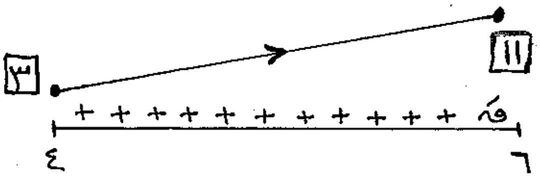
يوجد قيمة عظمى مطلقة عند س = ٥ هي ق(٥) = ٦

③ ق(س) = $س^٢$ − ٦س + ١١ س ∈ [٤ ، ٦]

الحل ق متصل على [٤ ، ٦] وقابل للاشتقاق على (٤ ، ٦) لأنه كثير حدود .

قَ(س) = ٢س − ٦

٢س − ٦ = ٠ ← س = ٣ ∉ (٤ ، ٦)



١) قيم س الحرجة

أطراف {٤ ، ٦} جذور ٣ ∉ (٤ ، ٦)

٢) ق متزايد في [٤ ، ٦] لاتناقص

٣) للاقتران قيمة صغرى مطلقة عند س = ٤ هي ق(٤) = ٣

للاقتران قيمة عظمى مطلقة عند س = ٦ هي ق(٦) = ١١

تمرين محلول ①

اذا كان الاقتران ق(س) متصلاً على الفترة [أ، ب] وقابلاً للاشتقاق على (أ، ب) وكانت جميع المماسات المرسومة لمنحنى ق في الفترة (أ، ب) تصنع زاوية حادة مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فأي العبارات الآتية صحيحة بالنسبة للاقتران ق(س)؟

أ) ق(س) متزايد في الفترة [أ، ب]

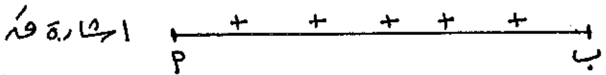
ب) ق(س) متناقص في الفترة [أ، ب]

جـ) ق(س) مقعر للاسفل على الفترة [أ، ب]

د) ق(س) مقعر للأعلى على الفترة [أ، ب]

الحل

ق′(س) = ظاهـ = + لأن (هـ حادة)



ق(س) متزايد على [أ، ب] ⟵ (العبارة أ) ✓

تمرين محلول ②

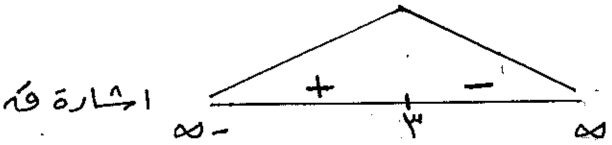
اوجد فترات التزايد والتناقص للاقتران ق(س) = ٦س − $س^{٢}$

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود .

ق′(س) = ٦ − ٢س

٦ − ٢س = ٠ ⟵ س = ٣



تزايد (−∞، ٣] ، تناقص [٣، ∞)

④ ق(س) = $س^{٣}$ − ١٢س + ٥

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − ١٢

٣$س^{٢}$ − ١٢ = ٠ ⟵ $س^{٢}$ = ٤ ⟵ س = ٢، −٢

① قيم س الحرجة ⟵ اطراف : لايوجد
⟵ جذور : ٢، −٢

٢) تزايد (−∞، −٢) ، [٢، ∞)

تناقص [−٢، ٢]

٣) يوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = −١١ والنقطة (٢، −١١)

٤) يوجد عظمى محلية عند س = −٢ هي ق(−٢) = ٢١

⑤ ق(س) = $س^{٣}$ − ١٢س ، س ∈ [−٥، ٧]

الحل

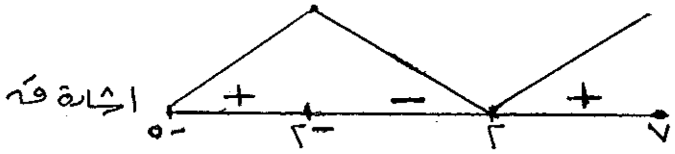
ق متصل على [−٥، ٧] وقابل للاشتقاق على (−٥، ٧) لأنه كثير حدود

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ − ١٢

٣$س^{٢}$ − ١٢ = ٠ ⟵ $س^{٢}$ = ٤ ⟵ س = ٢، −٢

١) قيم س الحرجة ⟵ اطراف : −٥، ٧
⟵ جذور : −٢، ٢

س = {−٥، −٢، ٢، ٧}



٢) تناقص [−٢، ٢] ، تزايد [−٥، −٢] ، [٢، ٧]

٣) يوجد صغرى محلية عند س = ٢ هي ق(٢) = −١٦

يوجد صغرى مطلقة عند س = −٥ هي ق(−٥) = −٦٥

يوجد عظمى محلية عند س = −٢ هي ق(−٢) = ١٦

يوجد عظمى مطلقة عند س = ٧ هي ق(٧) = ٢٥٩

تمرين محلول

اوجد القيم القصوى للاقتران ق .

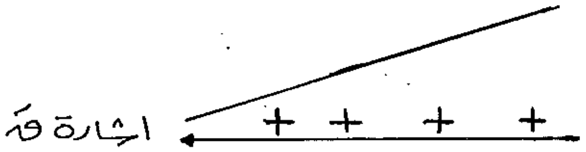
ق(س) = $س^{٣}$ + ١٢س + ٥

ق متصل على ح وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود

ق′(س) = ٣$س^{٢}$ + ١٢

٣$س^{٢}$ + ١٢ = ٠ ⟵ لاجذور

الحرجة ⟵ اطراف : لايوجد
⟵ جذور : لايوجد



لايوجد قيمة قصوى

⑥ ما الكبرقمية للاقتران ق(س) = س^{٣} − ٦س^{٢} ،
س ∋ [١، ٦) .

الحـــل :

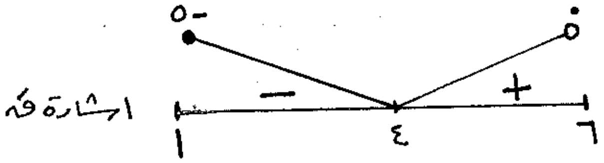
ق متصل على [١، ٦) وقابل للاشتقاق على (١، ٦) كثير حدود .

قَ(س) = ٣س^{٢} − ١٢س

٣س^{٢} − ١٢س = ٠ ⟵ ٣س (س − ٤) = ٠

س = ٠، ٤

الحرجة ⟵ اطراف : ١
الحرجة ⟵ جذور : ٤



١) قيم س الحرجة = {١، ٤}

٢) تزايد [٤، ٦) ، تناقص [١، ٤]

٣) صغرى محلية ومطلقة عند س = ٤ والقيمة ق(٤) = −٣٢

لا يوجد عظمى مطلقة ∴ لايوجد الكبرقمية .

---

⑦ ق(س) = س^{٤} − ٨س^{٢}

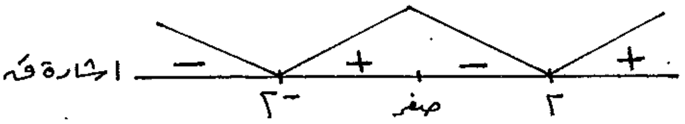
ق متصل على ح وقابل للاشتقاق على ح كثير حدود

قَ(س) = ٤س^{٣} − ١٦س

٤س^{٣} − ١٦س = ٠ ⟵ ٤س (س^{٢} − ٤) = ٠

س = ٠، ٢، −٢

الحرجة ⟵ أطراف لايوجد
الحرجة ⟵ جذور −٢، ٠، ٢



١) قيم س الحرجة = {−٢، ٠، ٢}

٢) تزايد ق [−٢، ٠]، [٢، ∞) ، تناقص ق (−∞، −٢]، [٠، ٢]

٣) يوجد صغرى محلية ومطلقة عند س = −٢ هي ق(−٢) = −١٦

يوجد صغرى محلية ومطلقة عند س = ٢ هي ق(٣) = −١٦

يوجد عظمى محلية عند س = ٠ والقيمة = ق(٠) = ٠

تمرين محلول) اذا كان ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣} جد

① قيم س الحرجة للاقتران ق

② فترات التزايد و التناقص للاقتران ق

---

③ القيم القصوى للاقتران ق وحدد نوعها .

الحـــل :

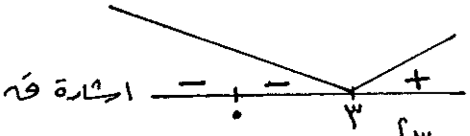
ق(س) = س^{٤} − ٤س^{٣}

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح كثير الحـدود

قَ(س) = ٤س^{٣} − ١٢س^{٢}

٤س^{٣} − ١٢س^{٢} = ٠ ⟵ ٤س^{٢} (س − ٣) = ٠

س = ٠ ، س = ٣



١ـ س الحرجة = {٠، ٣}

٢ـ تزايد ق [٣، ∞) ، تناقص ق (−∞، ٣]

٣ـ صغرى محلية ومطلقة عند س = ٣ والقيمة ق(٣) = −٢٧

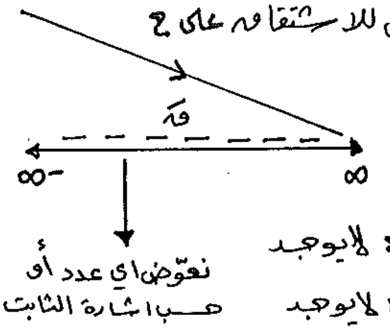
---

⑧ ق(س) = ٨ − ٣س

الحـــل ق متصل وقابل للاشتقاق على ح

قَ(س) = −٣

٠ ≠ −٣



الحرجة ⟵ أطراف : لايوجد
الحرجة ⟵ جذور : لايوجد

* قيم س الحرجة ∅

* ق(س) متناقص على ح

لايوجد قصوى .

تمرين ①

ق(س) = ٤ ، س ∋ [−١، ٥) فإن قيم س الحرجة للاقتران ق هي :

أ) (−١، ٥) ب) ∅ ج) [−١، ٥) د) [−١، ٥] ،

تمرين ②

ق(س) = [$\frac{س}{٢}$ + ١] ، س ∋ (٢، ٧] فإن قيم س الحرجة للاقتران ق هي :

أ) (٢، ٧) ب) [٢، ٧] ج) (٢، ٧] د) [٢، ٧) .

⑨ $\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}-٢)^{٥}$

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح

$\text{ق}'(\text{س}) = ٥\,(\text{س}-٢)^{٤}$

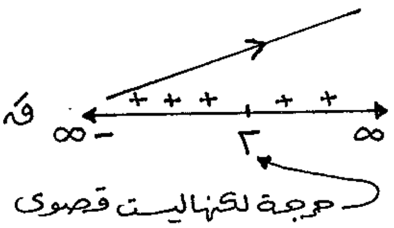
$٥ \neq ٠$ ، $\text{س}-٢ = ٠ \leftarrow \text{س} = ٢$

الحرجة ← أطراف : لايوجد
الحرجة ← جذور : ٢

قيم س الحرجة $\{٢\}$

ق متزايد على ح

لايوجد قصوى



تمرين محلول

$\text{ق}(\text{س}) = (\text{س}-٢)^{٤}(\text{س}+١)^{٣}$

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح لأنه كثير حدود .

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}-٢)^{٤}\left(٣(\text{س}+١)^{٢}(١)\right) + (\text{س}+١)^{٣}\left(٤(\text{س}-٢)^{٣}(١)\right)$

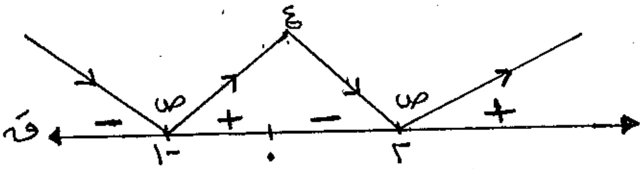
$= ٣(\text{س}-٢)^{٤}(\text{س}+١)^{٢} + ٤(\text{س}+١)^{٣}(\text{س}-٢)^{٣}$

$\underbrace{٣(\text{س}-٢)^{٣}(\text{س}+١)^{٢}}_{\text{اخراج عامل مشترك}}\left[٣(\text{س}+١) + \text{س}-٢\right] = ٠$

$\Leftarrow ٣(\text{س}-٢)^{٣}(\text{س}+١)(٣\text{س}) = ٠$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{س} = -١$ ، $\text{س} = ٠$

الحرجة ← أطراف X
الحرجة ← جذور ٢ ، -١ ، ٠



قيم س الحرجة $\{-١، ٠، ٢\}$

ق متزايد في $[-١، ٠]$ ، $[٢، \infty)$

ق متناقص في $(-\infty، -١]$ ، $[٠، ٢]$

* عظمى محلية عند س = ٠ وهي ق(٠) = ١٦
* صغرى محلية عند س = -١ وهي ق(-١) = ٠
* صغرى محلية عند س = ٢ وهي ق(٢) = ٠

ومطلقة

تمرين محلول

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} + ٢\text{س}^{٣} - ١٠\text{س} + ٥$

الحل

ق متصل وقابل للاشتقاق على ح كثير حدود

$\text{ق}'(\text{س}) = ٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ١٠$

$٤\text{س}^{٣} + ٦\text{س}^{٢} - ١٠ = ٠ \leftarrow ٢\text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٥ = ٠$

تجريب الاصفار النسبية للعدد (٥) وهي ± ١ ، ٥

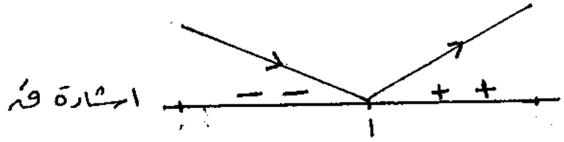
س = ١ ، تقسم

	$\text{س}^{٣}$	$\text{س}^{٢}$	س	عدد
	٢	٣	٠	-٥
$\boxed{١}$		٢	٥	٥
	٢	٥	٥	٠

$\text{ق}'(\text{س}) = (\text{س}-١)(٢\text{س}^{٢} + ٥\text{س} + ٥) = ٠$

س = ١ ، المميز سالب ← لايوجد لها حل حقيقي.

الحرجة ← أطراف X
الحرجة ← جذور س = ١



ق متزايد في $[١، \infty)$ ، ق متناقص في $(-\infty، ١]$

يوجد صغرى مطلقة عند س = ١ هي ق(١) = -٢

تمرين ①

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الرابعة معرف على ح فإن أكبر عدد ممكن من النقط الحرجة للاقتران ق هي:

أ) ٥ ب) ٦ جـ) ٣ د) ٤

تمرين ②

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٤} - ٦\text{س}^{٢} - ٨\text{س} + ٣$ جد

١) قيم س الحرجة ٢) مجالات التناقص

تمرين ③

$\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٥\text{س} + ١$ ، $\text{س} \in [-٣، ٢]$ جد

١) مجالات التزايد والتناقص ٢) النقط الصغرى المحلية ونوعها.

تمرين ④

ق(س) = $س^٤ - ٨س^٢ + ٣$ ، س ∈ [−٤، ٤] جد

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران

٢) القيم القصوى للاقتران (إن وجدت) وبيّن نوعها .

---

⑩ ق(س) = $\frac{س-١}{س^٢+٣}$

الحل

ق متصل على ح

ق'(س) = $\frac{(س^٢+٣)×١ - (س-١)×٢س}{(س^٢+٣)^٢}$

ق'(س) = $\frac{-س^٢+٢س+٣}{(س^٢+٣)^٢}$

الأصفار ← بسط : $-س^٢+٢س+٣ = ٠$

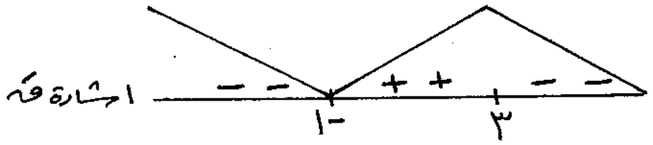
$(-س+٣)(س+١) = ٠$

س = ٣ ، س = −١

الأصفار ← مقام : لا يوجد

الحرجة ← أطراف : لا يوجد

الحرجة ← جذور : −١ ، ٣



١) قيم س الحرجة = {−١، ٣}

٢) ق متزايد في [−١، ٣] ، ق متناقص في (−∞، −١]، [٣، ∞)

٣) قيمة صغرى محلية عند س = −١ هي ق(−١) = $\frac{-١}{٢}$

عظمى محلية عند س = ٣ هي ق(٣) = $\frac{١}{٦}$

---

⑪ ق(س) = س + $\frac{٤}{س}$ ، س ≠ ٠ .

الحل

ق متصل على ح − {٠}

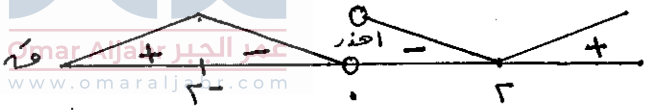
ق'(س) = ١ − $\frac{٤}{س^٢}$ = $\frac{س^٢-٤}{س^٢}$

الأصفار ← بسط : $س^٢-٤ = ٠$ ← س = ٢، −٢

الأصفار ← مقام : س = ٠

الحرجة ← اطراف : لا يوجد

الحرجة ← جذور : −٢، ٢



١) تزايد (−∞، −٢] ، [٢، ∞)

تناقص [−٢، ٠) ، (٠، ٢]

٢) س الحرجة = {−٢، ٢}

٣) عظمى محلية عند س = −٢ والقيمة ق(−٢) = −٤

صغرى محلية عند س = ٢ والقيمة ق(٢) = ٤

تمرين ①

ق(س) = $\frac{١}{س^٢-٤}$ ، س ≠ −٢ ، ٢ أوجد كل المطاليب عدا اشارة ق' .

تمرين ②

ق(س) = س + $\frac{١٦}{س}$ ، س ∈ [−٧، ٧] − {٠}

أوجد كل المطاليب عدا اشارة ق' .

تمرين ③

اذا كان ق(س) معرف على [٠، ٣] وقابل للاشتقاق على (٠، ٣) وكان ق'(س) = $\frac{س-٢}{س+١}$ فإن قيم س الحرجة هي :

أ) {٠، ٢، ٣}   ب) {٢}

ج) {٠، −١، ٢، ٣}   د) {−١، ٢}

تمرين ④

ق(س) = $س^٣ + \frac{٣}{س}$ ، س ≠ ٠ ، أوجد

١) فترات التزايد والتناقص للاقتران ق

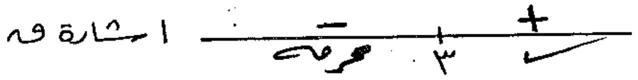
٢) القيم العظمى والصغرى المحلية للاقتران ق إن وجدت

---

⑫ ق(س) = $\sqrt{س-٣}$

الحل

نجد المجال لأنه غير محدد في السؤال

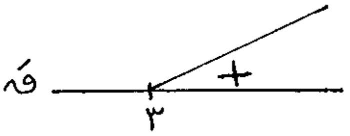


مجال ق [٣، ∞)   ق متصل على [٣، ∞)

$قَ(س) = \frac{١}{٢\sqrt{س-٣}}$ ، ق قابل للاشتقاق على (٣، ∞)

الأصفار ← بسط : لايوجد
← مقام : س = ٣

الحرجة : س = ٣



١) تزايد ق [٣، ∞)
تناقص ق ∅

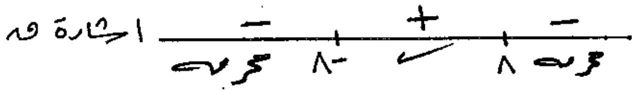
٢) س الحرجة = {٣}

٣) صغرى مطلقة عند س = ٣ والقيمة ق(٣) = ٠
عظمى لايوجد

⑬ $ق(س) = \sqrt{٦٤ - س^{٢}}$

الحل

نجد مجال الاقتران



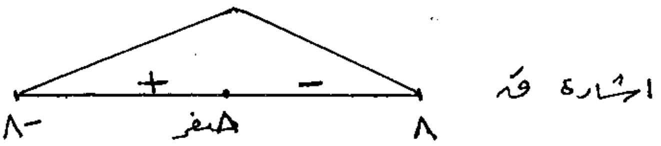
مجال ق [-٨، ٨]

ق متصل على [-٨، ٨] ، $قَ(س) = \frac{-٢س}{٢\sqrt{٦٤ - س^{٢}}}$

ق قابل للاشتقاق على (-٨، ٨)

الاصفار ← بسط : س = ٠
← مقام : س = -٨، ٨

الحرجة س = -٨، ٠، ٨



١) تزايد ق [-٨، ٠] ، تناقص ق [٠، ٨]

٢) قيم س الحرجة = {-٨، ٠، ٨}

٣) عظمى محلية ومطلقة عند س = ٠ هي ق(٠) = ٨
صغرى مطلقة عند س = -٨ هي ق(-٨) = ٠
صغرى مطلقة عند س = ٨ هي ق(٨) = ٠

تمرين ①

$ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٦٤}$ اوجد كل المطاليب من اشارة قَ

تمرين ②

$ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٢س + ٥}$ أوجد فترات التزايد ،

تمرين ③

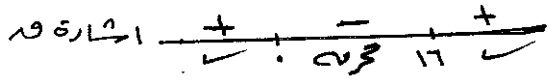
اذا كان $ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ٨س}$ فإن مجموعة قيم س للنقط الحرجة للاقتران ق هي

أ) {٠، ٤، ٨}
ب) {٠، ٨}
جـ) {٤}
د) {٤، ٨}

تمرين محلول

$ق(س) = \sqrt{س^{٢} - ١٦س}$

الحل: نجد المجال س² - ١٦س = ٠ ← س = ٠، ١٦



مجال ق : (-∞، ٠] ، [١٦، ∞)

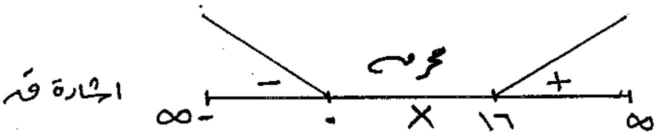
ق متصل عند (-∞، ٠] ، [١٦، ∞)

$قَ(س) = \frac{٢س - ١٦}{٢\sqrt{س^{٢} - ١٦س}}$

ق قابل للاشتقاق على (-∞، ٠) ، (١٦، ∞)

الأصفار ← بسط : س = ٨ ∉ المجال
← مقام : س = ٠، ١٦

الحرجة : س = {٠، ١٦}



١) الحرجة س = {٠، ١٦}

٢) تزايد ق [١٦، ∞) تناقص ق (-∞، ٠]

٣) صغرى مطلقة عند س = ١٦ هي ق(١٦) = ٠
صغرى مطلقة عند س = ٠ هي ق(٠) = ٠

⑭ $ق(س) = \frac{س^{٢}}{\sqrt{س-٢}}$ حيث س > ٢ ، جد

١) مجالات التزايد و التناقص

٢) القيم القصوى مع تحديد نوعها .

الحل

ق متصل على (٢، ∞)

$ق\,'(س) = \frac{\sqrt{س-٢} \times ٢س - س^٢ \times \frac{١}{٢\sqrt{س-٢}}}{(\sqrt{س-٢})^٢}$

قَ = صفر ← البسط = ٠

$٢س\sqrt{س-٢} - \frac{س^٢}{٢\sqrt{س-٢}} = ٠$

$٢س\sqrt{س-٢} = \frac{س^٢}{٢\sqrt{س-٢}}$

$٤س(س-٢) = س^٢ \leftarrow ٤س^٢ - ٨س - س^٢ = ٠$

$\Leftarrow \quad ٣س^٢ - ٨س = ٠$

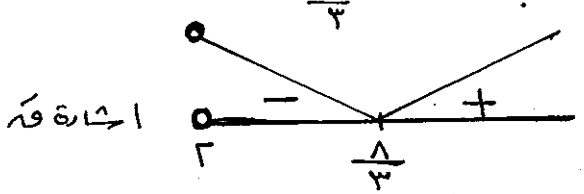
أصفار البسط : $٣س^٢ - ٨س = ٠$

$س(٣س-٨) = ٠ \leftarrow س = ٠ ، \frac{٨}{٣}$

$\downarrow$ تهمل ، $\downarrow$ ✓

المقام : س = ٢ يهمل

الحرجة : $س = \frac{٨}{٣}$



١) تزايد ق في $[\frac{٨}{٣} ، \infty)$ ، تناقص في $(٢ ، \frac{٨}{٣}]$

٢) صغرى مطلقة = $ق(\frac{٨}{٣}) = \frac{٦٤}{٩} \times \sqrt{\frac{٣}{٢}}$

---

(١٥) $ق(س) = \sqrt[٣]{٢س-٤}$

الحل ق متصل على ح

$ق\,'(س) = \frac{٢}{٣\sqrt[٣]{(٢س-٤)^٢}}$

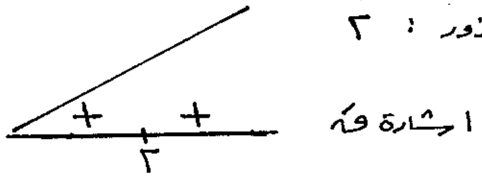
ق قابل للاشتقاق على ح − {٢}

أصفار ← البسط : لايوجد

← المقام : س = ٢

الحرجة ← اطراف : لايوجد

← جذور : ٢



١) تزايد = ح ، تناقص = ∅

٢) قيم س الحرجة = {٢}

٣) لايوجد قيم قصوى .

تمرين ق(س) = $س^{\frac{١}{٣}}(س-٢)^{\frac{٢}{٣}}$ ، س ∈ [−١ ، ٥]

جد كل مطاليب اشارة قَ .

---

(١٦) ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠ ، π]

جد ١) مجالات التزايد والتناقص.

٢) النقط القصوى مع تحديد نوعها .

الحل

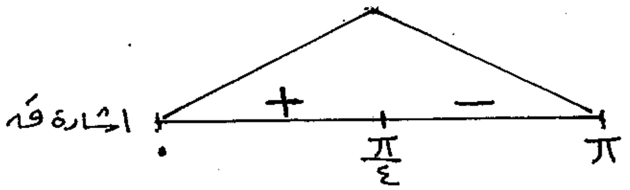
ق متصل على [٠ ، π]

قَ(س) = جتاس − جاس

ق قابل للاشتقاق على (٠ ، π)

جتاس − جاس = ٠

جاس = جتاس ← س = $\frac{\pi}{٤}$ ✓ ، $\frac{٥\pi}{٤}$ تهمل .



١) تزايد ق $[٠ ، \frac{\pi}{٤}]$ ، تناقص ق $[\frac{\pi}{٤} ، \pi]$

٢) قيم س الحرجة = $\{٠ ، \frac{\pi}{٤} ، \pi\}$

٣) النقطة $(\frac{\pi}{٤} ، \frac{٢}{\sqrt{٢}})$ عظمى محلية ومطلقة .

$(\pi ، -١)$ صغرى مطلقة .

---

(١٧) ق(س) = جا٢س ، س ∈ [٠ ، ٢π]

جد نفس المطاليب السابقة .

الحل

ق متصل على [٠ ، ٢π]

قَ(س) = ٢جاس جتاس = جا٢س

ق قابل للاشتقاق على (٠ ، ٢π)

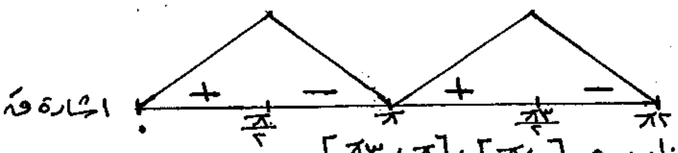
جا٢س = ٠ ← ٢س = ٠ ، π ، ٢π ، ٣π ، ٤π

س = ٠ ، $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$ ، ٢π

انتبه أنه ٢س تحتاج مجال مضاعف

الحرجة ← أطراف : ٠ ، ٢π

← جذور : $\frac{\pi}{٢}$ ، π ، $\frac{٣\pi}{٢}$



١) تزايد ق $[٠ ، \frac{\pi}{٢}]$ ، $[\pi ، \frac{٣\pi}{٢}]$

تناقص ق $[\frac{\pi}{٢} ، \pi]$ ، $[\frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi]$

٢) قيم س الحرجة = $\{٠ ، \frac{\pi}{٢} ، \pi ، \frac{٣\pi}{٢} ، ٢\pi\}$

٣) النقطة القصوى

(٠،٠) صغرى مطلقة ، (π،٠) صغرى محلية مطلقة .

(٢π ،٠) صغرى مطلقة .

($\frac{\pi}{2}$ ،١) عظمى محلية ومطلقة .

($\frac{3\pi}{2}$ ،١) عظمى محلية ومطلقة .

تمرين محلول

ق(س) = س + جتاس اوجد كل المطاليب من اشارة قَ

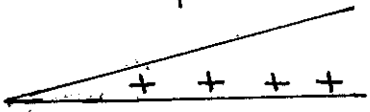
الحل

ق متصل على ح

قَ(س) = ١ − جاس ، ق قابل للاشتقاق على ح

١ − جاس = ٠ ← جاس = ١

جذور س = $\frac{\pi}{2}$ + ٢نπ ، ن ∈ ص



إشارة قَ

١) تزايد ق = ح ، تناقص ق = ∅

٢) حرجة ق = {$\frac{\pi}{2}$ + ٢نπ ، ن ∈ ص}

٣) قيم قصوى لايوجد

⑱ ق(س) = س + جتا٢س ، س ∈ [٠، $\frac{\pi}{2}$]

الحل

ق متصل على [٠، $\frac{\pi}{2}$]

قَ(س) = ١ − ٢جا٢س ، ق قابل للاشتقاق على (٠، $\frac{\pi}{2}$)

١ − ٢جا٢س = ٠ ← جا٢س = $\frac{1}{2}$

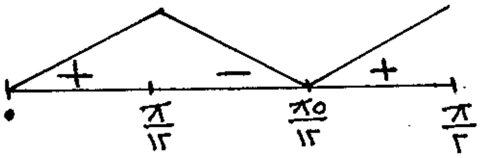
٢س = $\frac{\pi}{6}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ← س = $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{5\pi}{12}$

الحرجة

أطراف ٠، $\frac{\pi}{2}$

جذور $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{5\pi}{12}$

* انتبه الزاوية ٢س تحتاج مجال مضاعف .



إشارة قَ

١) تزايد ق [٠، $\frac{\pi}{12}$] ، [$\frac{5\pi}{12}$ ، $\frac{\pi}{2}$] ، تناقص ق [$\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{5\pi}{12}$]

٢) س الحرجة = {٠، $\frac{\pi}{12}$ ، $\frac{5\pi}{12}$ ، $\frac{\pi}{2}$}

٣) صغرى محلية ومطلقة عند س = $\frac{5\pi}{12}$

ق($\frac{5\pi}{12}$) = $\frac{5\pi}{12}$ − $\frac{\sqrt{3}}{2}$

عظمى محلية ومطلقة عند س = $\frac{\pi}{12}$

ق($\frac{\pi}{12}$) = $\frac{\pi}{12}$ + $\frac{\sqrt{3}}{2}$

تمرين محلول

ق(س) = جاس − جتا٢س ، س ∈ [٠، π] اوجد كل المطاليب من اشارة قَ .

الحل

ق متصل على [٠، π]

قَ(س) = جتاس + ٢جا٢س

ق قابل للاشتقاق على (٠، π)

جتاس + ٢جا٢س = ٠

← متطابقة لاختلاف الزاوية.

جتاس + ٢ × ٢جاس جتاس = ٠

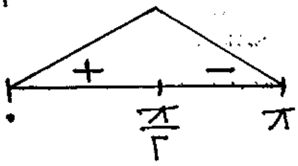
جتاس (١ + ٤جاس) = ٠

جتاس = ٠ ← س = $\frac{\pi}{2}$ ، $\cancel{\frac{3\pi}{2}}$ تهمل

١ + ٤جاس = ٠ ← جاس = $-\frac{1}{4}$ ، س في الربع ٣ أو ٤ ∉ (٠، π)

الحرجة ← أطراف ٠، π

← جذور $\frac{\pi}{2}$



إشارة قَ

١) تزايد ق [٠، $\frac{\pi}{2}$] ، تناقص ق [$\frac{\pi}{2}$ ، π]

٢) قيم س الحرجة = {٠، $\frac{\pi}{2}$ ، π}

٣) عظمى محلية ومطلقة ($\frac{\pi}{2}$ ،٢)

صغرى مطلقة (٠، −١) ، صغرى مطلقة (π، −١)

تمرين

ق(س) = جا² $\frac{1}{2}$س − جتاس ، س ∈ [٠، ٢π]

اوجد كل المطاليب من اشارة قَ .

⑲

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ - ١ ، & \text{س} < ٢ \\ ٥ - \text{س} ، & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

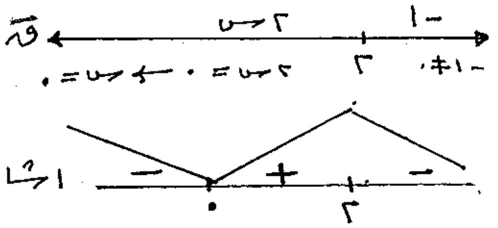
جد مطاليب اشارة قَ .

الحل

ق متصل على ح

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} ٢\text{س} ، & \text{س} < ٢ \\ -١ ، & \text{س} > ٢ \end{cases}$$

ق قابل للاشتقاق على ح − {٢}



الحرجة ← اطراف لايوجد
الحرجة ← جذور ٠
الحرجة ← تحول ٢ لأن قَ(٢) غير موجودة

١) تزايد ق [٠، ٢]

تناقص ق (−∞، ٠] ، [٢، ∞)

٢) صغرى محلية س = ٠ والقيمة هي ق(٠) = −١

عظمى محلية عند س = ٢ والقيمة هي ق(٢) = ٣

٣) قيم س الحرجة = {٠، ٢}

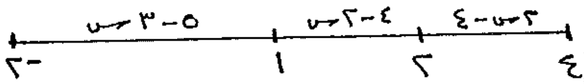
تمرين محلول

$$\text{اذا كان ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ - ٣\text{س} ، & -٢ \leq \text{س} < ١ \\ |٢\text{س} - ٤| ، & ١ \leq \text{س} \leq ٤ \end{cases}$$

اوجد مطاليب اشارة قَ .

الحل

نعيد تعريف |٢س − ٤|



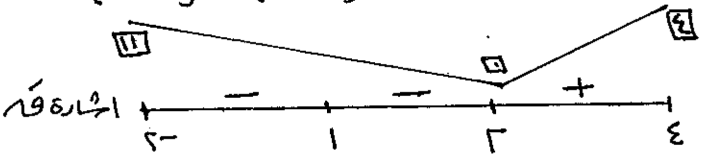
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٥ - ٣\text{س} ، & -٢ \leq \text{س} < ١ \\ ٤ - ٢\text{س} ، & ١ \leq \text{س} < ٢ \\ ٢\text{س} - ٤ ، & ٢ \leq \text{س} \leq ٤ \end{cases}$$

ق متصل على [−٢، ٤]

$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} -٣ ، & -٢ < \text{س} < ١ \\ -٢ ، & ١ < \text{س} < ٢ \\ ٢ ، & ٢ < \text{س} < ٤ \end{cases}$$

غير موجودة ، س = −٢، ١، ٢، ٤

ق قابل للاشتقاق على (−٢، ٤) − {١، ٢}



١) تزايد ق [٢، ٤] ، تناقص ق [−٢، ٢]

٢) صغرى محلية ومطلقة عند س = ٢ والقيمة ق(٢) = ٠.

عظمى مطلقة عند س = −٢ والقيمة ق(−٢) = ١١

٣) قيم س الحرجة = {−٢، ١، ٢، ٤} .

---

⑳

$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} ٣ - \text{س}^٢ ، & \text{س} \leq ١ \\ \frac{٢}{\text{س}} ، & \text{س} > ١ \end{cases}$$

متصل

الحل ق قابل للاشتقاق على ح

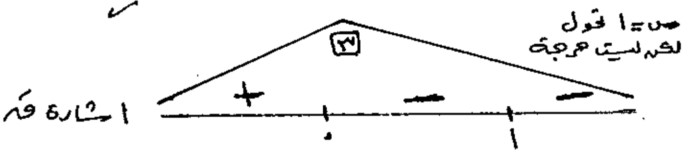
$$\text{قَ}(\text{س}) = \begin{cases} -٢\text{س} ، & \text{س} \leq ١ \\ \frac{-٢}{\text{س}^٢} ، & \text{س} > ١ \end{cases}$$

الجذور

س ≤ ١: −٢س = ٠ ، س = ٠ ✓

س > ١: $\frac{-٢}{\text{س}^٢} \neq ٠$

س = ١ تحول لكنه ليست حرجة



١) تزايد ق (−∞، ٠] ، تناقص ق [٠، ∞)

٢) قيم س الحرجة = {٠}

٣) قيمة عظمى محلية ومطلقة عند س = ٠ ⇐ ق(٠) = ٣ .

تمرين ①

ق(س) = س|س − ٤| ، أوجد كل المطاليب من اشارة قَ

تمرين ②

اذا كان ق(س) = |س − ٣| + ٥ ما أصغر قيمة للاقتران ق

أ) ٥ ب) صفر جـ) ٣ د) −٥

تمرين محلول

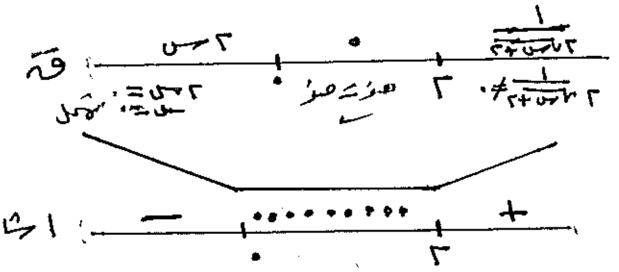
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٢ ، & \text{س} \leq ٠ \\ ٢ ، & ٠ < \text{س} < ٢ \\ \sqrt{\text{س} + ٢} ، & \text{س} \geq ٢ \end{cases}$$

اوجد كل مطاليب اشارة قَ .

الحل

ق متصل على ح

$$قَ(س) = \begin{cases} ٢س & ، س < ٠ \\ ٠ & ، ٠ < س < ٢ \\ \frac{١}{٢\sqrt{س+٢}} & ، س > ٢ \end{cases}$$



١) تزايد ق $[٢، \infty)$ ، تناقص ق $(-\infty، ٠]$

٢) قيم س الحرجة = $[٠، ٢]$

٣) قيم عظمى محلية = ٢ تحدث عند $س \in (٠، ٢)$

قيمة صغرى محلية ومطلقة = ٢ تحدث عند $س \in [٠، ٢]$

(٢١) اذا كان ق(س) ، هـ(س) اقترانين متصلين على [أ، ب] وقابلين للاشتقاق على (أ، ب) وكان كل من ق(س) ، هـ(س) متزايد على [أ، ب] وكان ل(س) = ق(س) + هـ(س) ، اثبت أن ل(س) متزايداً على [أ، ب]

الحل

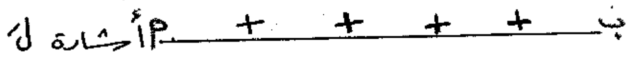
ل(س) متصل على [أ، ب] جمع متصلين ل(س) قابل للاشتقاق على (أ، ب) جمع قابلين للاشتقاق

$لَ(س) = قَ(س) + هـَ(س)$

ق متزايد $\therefore قَ(س) > ٠$ على (أ، ب)

هـ متزايد $\therefore هـَ(س) > ٠$ على (أ، ب)

$\therefore لَ(س) = قَ(س) + هـَ(س) > ٠$ على (أ، ب)



$\therefore$ ل متزايد على [أ، ب]

خطوات إيجاد التقعر للأعلى وللأسفل

أ- نجد المشتقة الثانية ونساويها بالصفر لنجد الأصفار.

ب- نعينه على الخط أصفار قً وقيم س التي تجعل قً غير موجوده (الأطراف ويمكن أصفار المقام أو التحول)

هـ- نضع اشارة قً على الخط.

د- نرسم منحنيات التقعر ونحدد نقطة الانعطاف.

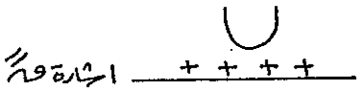
أمثلة:

* جد مجالات التقعر للاعلى وللاسفل ② نقطة الانعطاف لكل مما يلي:-

① $ق(س) = س^{٢} + ٤س - ٢$ (ق متصل)

$قَ(س) = ٢س + ٤$

$قً(س) = ٢ \neq ٠$



ق مقعر للأعلى على ح

لايوجد نقطة انعطاف

② $ق(س) = س^{٤} - ٤س^{٣}$

الحل

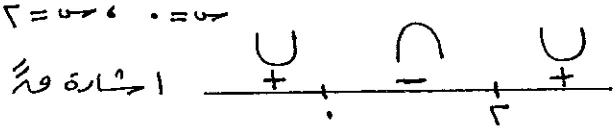
ق متصل ← $قَ(س) = ٤س^{٣} - ١٢س^{٢}$

$قً(س) = ١٢س^{٢} - ٢٤س$

$١٢س^{٢} - ٢٤س = ٠$

$س^{٢} - ٢س = ٠ \rightarrow س(س-٢) = ٠$

$س = ٠ ، س = ٢$



١) تقعر للأعلى $(-\infty، ٠]$ ، $[٢، \infty)$

تقعر للأسفل $[٠، ٢]$

٢) نقط الانعطاف (٠، ٠) ، (٢، −١٦)

③ $ق(س) = \sqrt[٣]{س}$ ، $س \in [-٣، ٣]$

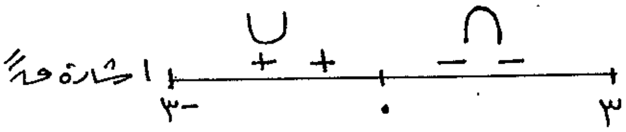
الحل

$ق(س) = س^{\frac{١}{٣}}$ ، ق متصل على $[-٣، ٣]$

$قَ(س) = \frac{١}{٣} س^{\frac{-٢}{٣}}$

$قً(س) = \frac{-٢}{٩} س^{\frac{-٥}{٣}} = \frac{-٢}{٩\sqrt[٣]{س^{٥}}}$

الجذور ← بسط : $-\text{٢} \neq \text{٠}$
← مقام : $\text{س} = \text{٠}$



ق مقعر للأعلى [-٣، ٠]

ق مقعر للأسفل [٠، ٣] ، نقطة الانعطاف (٠،٠)

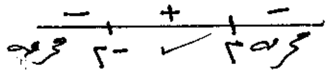
تمرين محلول

$\text{ق}(\text{س}) = \sqrt{\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}}}$

الحل

نحدد المجال : $\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}} = \text{٠} \longrightarrow \text{س}^{\text{٢}} = \text{٤}$

$\text{س} = \text{٢} ، -\text{٢}$



المجال [-٢، ٢]

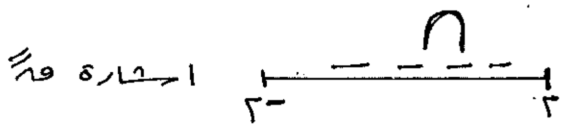
$\text{قَ}(\text{س}) = \frac{\text{١}}{\text{٢}}(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}} \times -\text{٢س}$

$\text{قَ}(\text{س}) = -\text{س}(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}}$

$\text{قً}(\text{س}) = -\text{س} \times \frac{-\text{١}}{\text{٢}}(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\frac{-\text{٣}}{\text{٢}}} \times -\text{٢س} + (\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\frac{-\text{١}}{\text{٢}}} \times -\text{١}$

$$= \frac{-\text{س}^{\text{٢}}}{\sqrt{(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٣}}}} + \frac{-\text{١}(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})}{\sqrt{(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})} \times (\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})}$$

$$= \frac{\cancel{-\text{س}^{\text{٢}}} - \text{٤} + \cancel{\text{س}^{\text{٢}}}}{\sqrt{(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٣}}}} = \frac{-\text{٤}}{\sqrt{(\text{٤} - \text{س}^{\text{٢}})^{\text{٣}}}}$$



ق مقعر للاعلى = ∅

ق مقعر للاسفل [-٢، ٢] لايوجد نقطة انعطاف

④ $\text{ق}(\text{س}) = \text{س} + \frac{\text{٤}}{\text{س}} ، \text{س} \neq \text{٠}$

ق(س) متصل على ح - {٠}

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{١} - \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٢}}}$

$\text{قً}(\text{س}) = \frac{\text{٤} \times \text{٢س}}{\text{س}^{\text{٤}}} = \frac{\text{٤}}{\text{س}^{\text{٣}}}$

جذور ← $\text{٤} \neq \text{٠}$
← $\text{س} = \text{٠}$

ق مقعر للأعلى (٠، ∞)

ق مقعر للأسفل (-∞، ٠)

لا يوجد نقطة انعطاف

⑤ $\text{ق}(\text{س}) = \text{٢جاس} + \frac{\text{١}}{\text{٢}}\text{جا٢س} ، \text{س} \in [\text{٠}، \text{٢}\pi]$

الحل

ق(س) متصل على الفترة [٠، ٢π]

$\text{قَ}(\text{س}) = \text{٢جتاس} + \frac{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}} \times \cancel{\text{٢}}\text{جتا٢س}$

$\text{قً}(\text{س}) = -\text{٢جاس} + -\text{٢جا٢س}$

$-\text{٢جاس} - \text{٢جا٢س} = \text{٠}$ (نحتاج متطابقة)

$-\text{٢جاس} - \text{٢}(\text{٢جاس جتاس}) = \text{٠}$

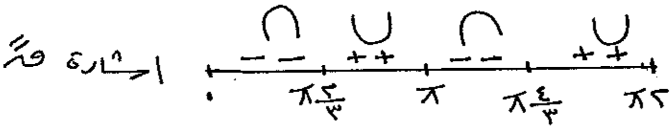
$\frac{-\text{٢جاس}}{-\text{٢}} - \frac{\text{٤جاس جتاس}}{-\text{٢}} = \frac{\text{٠}}{-\text{٢}}$

$\text{جاس} + \text{٢جاس جتاس} = \text{٠}$

$\text{جاس}(\text{١} + \text{٢جتاس}) = \text{٠}$

$\text{جاس} = \text{٠} \longrightarrow \text{س} = \text{٠} ، \pi ، \text{٢}\pi$

$\text{جتاس} = \frac{-\text{١}}{\text{٢}} \longrightarrow \text{س} = \frac{\text{٢}\pi}{\text{٣}} ، \frac{\text{٤}\pi}{\text{٣}}$



ق مقعر للأعلى $[\frac{\text{٢}\pi}{\text{٣}} ، \pi]$ ، $[\frac{\text{٤}\pi}{\text{٣}} ، \text{٢}\pi]$

ق مقعر للاسفل $[\text{٠} ، \frac{\text{٢}\pi}{\text{٣}}]$ ، $[\pi ، \frac{\text{٤}\pi}{\text{٣}}]$

نقطة انعطاف $(\frac{\text{٢}\pi}{\text{٣}} ، \frac{\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}})$ ، $(\pi ، \text{٠})$ ، $(\frac{\text{٤}\pi}{\text{٣}} ، \frac{-\text{٣}\sqrt{\text{٣}}}{\text{٤}})$

تمرين محلول

$\text{ق}(\text{س}) = \text{جتاس} - \text{جاس} + \text{٥} ، \text{س} \in [\text{٠}، \pi]$

ق متصل على [٠، π]

$\text{قَ}(\text{س}) = -\text{جاس} - \text{جتاس}$

$\text{قً}(\text{س}) = -\text{جتاس} + \text{جاس}$

$-\text{جتاس} + \text{جاس} = \text{٠}$

⇐ −جتاس = −جاس ⇐ ظاس = ١

$س = \frac{\pi}{4}$

إشارة ق'' ∩ − − − | + + + ∪ (٠ ، $\frac{\pi}{4}$ ، π)

ق مقعر للأعلى [$\frac{\pi}{4}$ ، π]

ق مقعر للأسفل [٠ ، $\frac{\pi}{4}$]

نقطة انعطاف ($\frac{\pi}{4}$ ، ٥)

---

⑥ ق(س) = { $س^٢ - ١$ ، س < ٢ ؛ ٥ − س ، س ≥ ٢ }

ق(س) متصل على ح

قَ(س) = { ٢س ، س < ٢ ؛ −١ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ }

ق''(س) = { ٢ ، س < ٢ ؛ ٠ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ }

الجذور: س < ٢ : ٢ ≠ ٠ ، س > ٢ : ٠ = ٠ ✓

إشارة ق'' + + + + + ∪ | ٢ | .... لا تقعر

ق مقعر للأعلى (−∞ ، ٢]

ق مقعر للأسفل ∅

لا يوجد نقطة انعطاف

تمرين محلول

ق(س) = { $س^٢ + ٢$ ، س ≤ ٠ ؛ ٢ ، ٠ < س < ٢ ؛ $\sqrt{س+٢}$ ، س ≥ ٢ }

أوجد كل مطاليب ق''

الحل ق متصل على ح

قَ(س) = { ٢س ، س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ < س < ٢ ؛ $\frac{١}{٢\sqrt{س+٢}}$ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٢ }

ق''(س) = { ٢ ، س < ٠ ؛ ٠ ، ٠ < س < ٢ ؛ $\frac{-١}{٤\sqrt{(س+٢)^٣}}$ ، س > ٢ ؛ غير موجودة ، س = ٠ ، ٢ }

الجذور: ٢ ≠ ٠ ، ٠ = ٠ ، $\frac{-١}{٤\sqrt{(س+٢)^٣}}$ ≠ ٠

إشارة ق'' + + + ∪ | ٠ | .... لا تقعر | ٢ | − − ∩

ق مقعر للأعلى (−∞ ، ٠]

ق مقعر للأسفل [٢ ، ∞)

لا يوجد نقطة انعطاف

تمرين محلول

اذا كان الاقتران ق معرف على [أ ، ب] وكان

قَ(س١) − قَ(س٢) < ٠ ، س١ < س٢ لجميع قيم

س١ ، س٢ ∈ (أ ، ب) فأي العبارات التالية صحيحة :

أ) ق(س) متزايد في الفترة [أ ، ب]

ب) ق(س) متناقص في الفترة [أ ، ب]

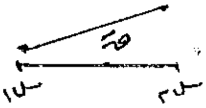
جـ) منحنى ق(س) مقعرًا للأعلى في الفترة [أ ، ب]

د) منحنى ق(س) مقعرًا للأسفل في الفترة [أ ، ب]

الحل

س٢ > س١ قَ(س٢) > قَ(س١) ∴

قَ(س) متزايد ∴ ق''(س) > ٠



+ + + + ∪ ق'' ∴ ق مقعر للأعلى .

---

* القيم القصوى باستخدام اختبار المشتقة الثانية

خطوات الحل

١) نجد أصفار المشتقة الأولى

٢) نجد المشتقة الثانية لفحص أصفار الأولى كما يلي :-

أ) اذا كان الناتج موجب فإن ق(س) ∪↓ لذلك يوجد صغرى

ب) اذا كان الناتج سالب فإن ق(س) ∩↑ لذلك يوجد عظمى

جـ) اذا كان الناتج (صفر) عندها نفشل المشتقة الثانية ونعود للمشتقة الأولى .

ملاحظة: النقط الحرجة التي ليست اصفار المشتقة الأولى يتم اختبارها عن طريق إشارة قَ

أمثلة

باستخدام اختبار المشتقة الثانية جد القيم القصوى وحدد نوعها لكل اقتران ان أمكن مما يلي :

① ق(س) = $س^٣ - ٣س^٢ - ٥$

الحل

ق'(س) = $٣س^٢ - ٦س$

$٣س^٢ - ٦س = ٠$ ← ٣س(س - ٢) = ٠

س = ٠ ، س = ٢

ق''(س) = ٦س - ٦

ق''(٠) = -٦ ∩ يوجد عظمى محلية عند س = ٠ ← ق(٠) = -٥

ق''(٢) = ٦ ∪ ← يوجد صغرى محلية عند س = ٢ ← ق(٢) = -٩

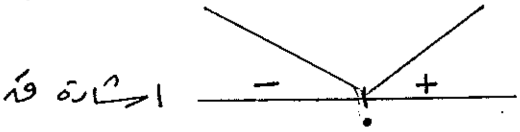
---

② ق(س) = $س^٤$.

ق'(س) = $٤س^٣$ ← $٤س^٣ = ٠$ ← س = ٠

ق''(س) = $١٢س^٢$

ق''(٠) = ٠ يفشل اختبار ق'' نعود إلى اشارة ق'



صغرى محلية ومطلقة عند س = ٠ والقيمة ق(٠) = ٠

تمرين

ق(س) = جاس + جتاس ، س ∈ [٠، ٢π] جد القيم القصوى ان امكن باختبار ق''(س) .

تمرين

اذا كان ق(س) اقتران كثير حدود ، حيث ق'(١) = ٠ ، ق''(١) × ق''(٢) > ٠ ، ق''(٢) < ٠ ، فإن النقطة (١، ق(١)) هي نقطة :

أ) قيمة عظمى مطلقة ب) قيمة عظمى محلية

ج) قيمة صغرى محلية د) قيمة صغرى مطلقة .

الحل

لأن ق'(١) = ٠ ، ق''(١) < ٠ ⇐ ∩

∴ يوجد عظمى محلية عند س = ١

تمرين

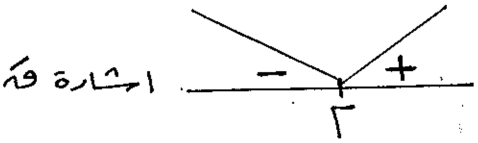
اذا كان ق كثير حدود من الدرجة الثانية وكان ق'(٢) = ٠ ، ق''(٢) > ٠ فإن الاقتران ق متزايداً في الفترة :

أ) (-∞، ٢] ب) [٢، ∞) ج) ∅ د) ح

الحل

لأن ق'(٢) = ٠ ، ق''(٢) > ٠ ، ∪ صغرى

∴ يوجد صغرى محلية عند س = ٢



∴ ق متزايد [٢، ∞)

أسئلة الثوابت :

نكون معادلات بعدد الثوابت وذلك من المعلومات

١) الزوج المرتب (س، ص) ← ق(س) = ص

٢) كلمة حرجة ، صغرى ، عظمى ، قصوى عند س = جـ تكون عندها ← ق'(جـ) = ٠

٣) كلمة انعطاف ← ق''(جـ) = ٠

٤) من المسألة الهندسية ← ميل المماس = المشتقة عند التماس .

أمثلة

① اذا كان للاقتران ق(س) = $س^٢ + ٣أس$ نقطة حرجة عند س = ٦ فما قيمة الثابت أ ؟

الحل :

ق'(٦) = ٠ ← ق'(س) = ٢س + ٣أ

ق'(٦) = ١٢ + ٣أ = ٠

أ = -٤

---

② ق(س) = $أس^٢ + ٣بس$ ، جد الثوابت أ، ب علماً بأن النقطة (٣، ١٨) نقطة قصوى .

الحل

قصوى ← ق(٣) = ١٨ ← ق'(٣) = ٠ .

قَ(س) = ٣أس + ٣ب

قَ(٣) = ٦أ + ٣ب = ٠ (بالقسمة على ٣)

⇐ ٢أ + ب = ٠ ⟵ ①

ق(٣) = ٩أ + ٩ب = ١٨ (بالقسمة على ٩)

⇐ أ + ب = ٢ ⟵ ②

من حل المعادلتين ①، ② ينتج أن

أ = -٢ ، ب = ٤

③ اذا كان ق(س) = س^{٣} + أس^{٢} + ب س + ٥جـ ، فما قيمة الثوابت أ، ب، جـ حيث (١، ٩) نقطة عظمى محلية ويوجد انعطاف عند س = ٢ .

الحل نقطة عظمى

ق(١) = ٩ ، قَ(١) = ٠

انعطاف ⟵ قً(٢) = ٠

قَ(س) = ٣س^{٢} + ٢أس + ب ⟵ قً(س) = ٦س + ٢أ

قً(٢) = ١٢ + ٢أ = ٠ ⟵ أ = -٦

قَ(١) = ٣ + -١٢ + ب = ٠ ⟵ ب = ٩

ق(١) = ١ + أ + ب + ٥جـ = ٩

١ - ٦ + ٩ + ٥جـ = ٩ ⟵ جـ = ١

تمرين ①

اذا كان ق(س) كثير حدود من الدرجة الثانية يمر بالنقطة (١، ٤) وكان للاقتران قيمة صغرى هي ق(٢) = ٣

اكتب قاعدة ق(س)

تمرين ②

ق(س) = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د ، جد قيم الثوابت أ، ب، جـ، د علماً بأنه يوجد للاقتران قيمة عظمى محلية عند س = ٠ مقدارها (٣٢) ويوجد قيمة صغرى محلية عند س = ٤ مقدارها (٠)

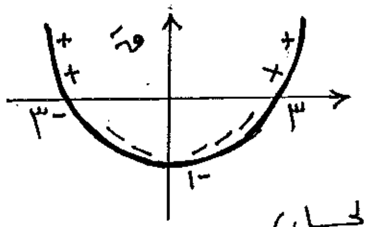
(الجواب أ = ١ ، ب = -٦ ، جـ = ٠ ، د = ٣٢)

استنتاج خصائص ق من رسم قَ :

إذا كان لدينا رسمة قَ(س) فإننا نحلل اشارة قَ(س) بوضع الاشارات على الرسمة (الرش) ونستنتج اشارة قً(س) من الصعود والهبوط (تحريك الأصبع)

أمثلة

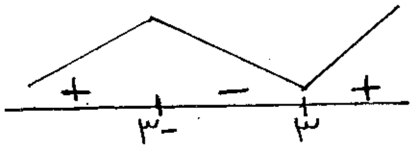
① الشكل المجاور يمثل منحنى قَ(س) جد خصائص ق(س)



الحل

نرش الاشارات على قَ حيث فوق السينات +

وتحت السينات −



١) تزايد ق (-∞، -٣] ، [٣، ∞)

تناقص ق [-٣، ٣]

٢) قيم س الحرجة {-٣، ٣}

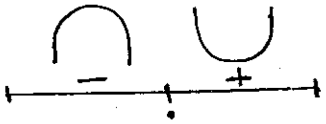
النقط الحرجة (-٣، ق(-٣)) ، (٣، ق(٣)) .

الله اعلم

٣) النقط القصوى (-٣، ق(-٣)) عظمى محلية.

(٣، ق(٣)) صغرى محلية

٤) المرحلة الثانية (تحريك الأصبع على منحنى قَ)

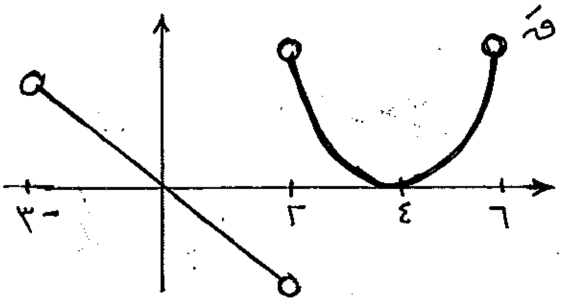


ق مقعر للأعلى [٠، ∞) ، ق مقعر للأسفل (-∞، ٠]

٥) نقطة انعطاف (٠، ق(٠)) .

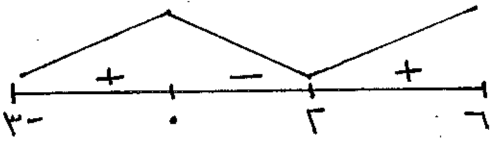
الله أعلم

② الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) المتصل على [-٣، ٦] وقابل للاشتقاق على (-٣، ٦) - {٢} بالإعتماد عليه أجب عن خصائص ق.



الحل

نرش الاشارات على الرسمة



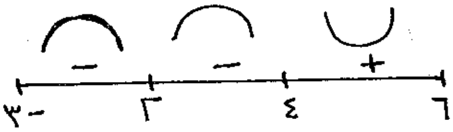
١) تزايد ق [-٣، ٠]، [٣، ٦] ، تناقص ق [٠، ٣]

٢) قيم س الحرجة = {-٣، ٠، ٣، ٤، ٦}

(عند قيم س التي يقطع فيها المنحنى محور السينات والحلقات والأطراف)

٣) النقط القصوى: (٠، ق(٠)) عظمى محلية .
(٣، ق(٣)) صغرى محلية .

٤) المرحلة الثانية لتحريك الإصبع على منحنى قَ .

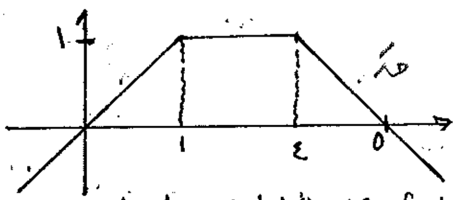


ق مقعر للأعلى [٤، ٦] ، ق مقعر للأسفل [-٣، ٤]

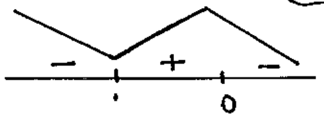
٥) نقطة الانعطاف (٤، ق(٤)) .

تمرين محلول

اعتمد الشكل الذي يمثل منحنى قَ(س) جد خصائص ق(س)



الحل رسم الإشارات على الرسمة

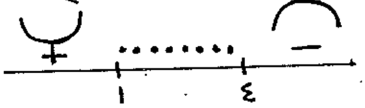


١) تزايد ق [٠، ٥] ، تناقص ق (-∞، ٠]، [٥، ∞)

٢) قيم س الحرجة لـ ق = {٠، ٥}

٣) النقط القصوى (٠، ق(٠)) صغرى محلية.
(٥، ق(٥)) عظمى محلية .

٤)



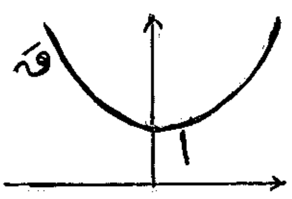
ق مقعر للأعلى (-∞، ١] ، ق مقعر للأسفل [٤، ∞)

٥) لا يوجد انعطاف

تمرين

اذا كان الشكل المجاور يمثل منحنى المشتقة الأولى للاقتران ق(س) .

جد خصائص ق .



* استنتاج بعض خصائص ق من رسم قً *

يمكن استنتاج مجالات التقعر ونقط الانعطاف بحيث نرسم الإشارات على قً فنحصل على إشارة قً

أمثلة

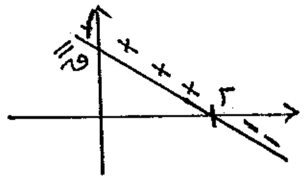
١) الشكل المجاور يمثل منحنى قً(س) أجب عما يليه :

أ) مجالات التقعر لـ ق

ب) نقط الانعطاف (إن وجدت)

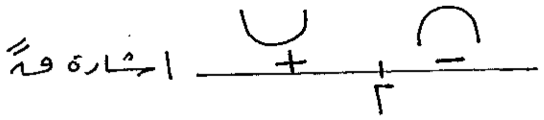
جـ) مجالات تزايد وتناقص قَ

د) اذا كان قَ(١) = ٠ . ما نوع النقطة (١، ق(١))



الحل

نرسم الإشارات على الرسمة .



أ) ق مقعر للأعلى (-∞، ٣] ، ق مقعر للأسفل [٣، ∞)

ب) نقطة الانعطاف (٣، ق(٣))

جـ) تزايد قَ (-∞، ٣] ، تناقص قَ [٣، ∞)

د) بما أن قَ(١) = ٠ ← ∴ (١، ق(١)) حرجة
نجد قً(١) = + ← ∴ (١، ق(١)) صغرى محلية.

تمرين

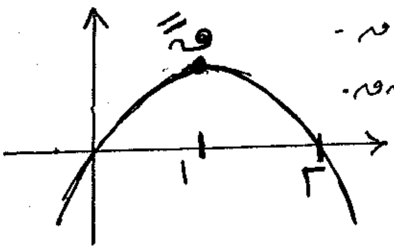
الشكل المجاور يمثل منحنى قً للاقتران ق كثير الحدود من الدرجة الرابعة معتمداً عليه اجب عما يلي :-

١) جد مجالات التقعر للاقتران ق .

٢) جد نقاط الانعطاف للاقتران ق.

٣) جد مجالات تزايد قَ .

٤) جد النقط القصوى للاقتران قَ وحدد نوعها .



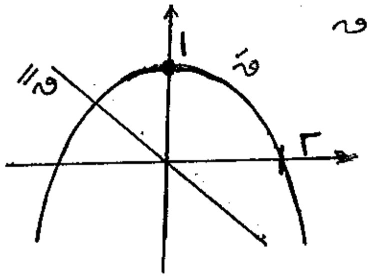
تمرين محلول

الشكل المجاور يمثل منحنى قَ ، قً للاقتران ق(س) كثير الحدود من الدرجة الثالثة والذي يمر بالنقطة (٠، ٢) اجب عما يليه :

١) مجالات التقعر للاقتران ق

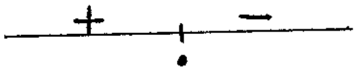
٢) نقطة انعطاف ق

٣) قاعدة ق(س)



الحل

اشارة ق''



١) ق مقعر للأعلى (−∞، ٠] ، ق مقعر للأسفل [٠، ∞)

٢) نقطة الانعطاف (٠، ق(٠)) = (٠، ٢)

٣) ق(س) = أ$س^٣$ + ب$س^٢$ + جـ س + د

ق'(س) = ٣أ$س^٢$ + ٢ب س + جـ .

ق''(س) = ٦أ س + ٢ب

من الرسم : ق''(٠) = ٠ ، ق'(٠) = ١ ، ق'(٢) = ٠

من المعطيات ق(٠) = ٢

ق''(٠) = ٠ + ٢ب = ٠ ⟵ ب = ٠

ق'(٠) = ٠ + ٠ + جـ = ١ ⟵ جـ = ١

ق'(٢) = ١٢أ + ٤ب + جـ = ٠

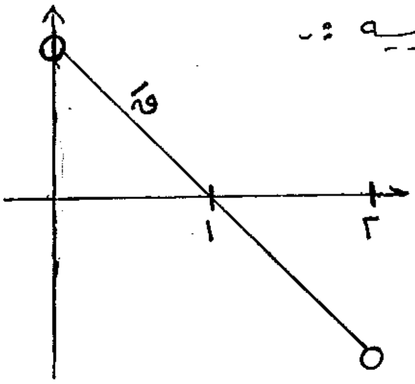
١٢أ + ٠ + ١ = ٠ ⟵ أ = $\frac{-١}{١٢}$

ق(٠) = ٠ + ٠ + ٠ + د = ٢ ⟵ د = ٢

ق(س) = $\frac{-١}{١٢}$ $س^٣$ + س + ٢

تمرين

الشكل المجاور يمثل ق' للاقتران ق المعرف على [٠، ٢] اجب عما يليه :-

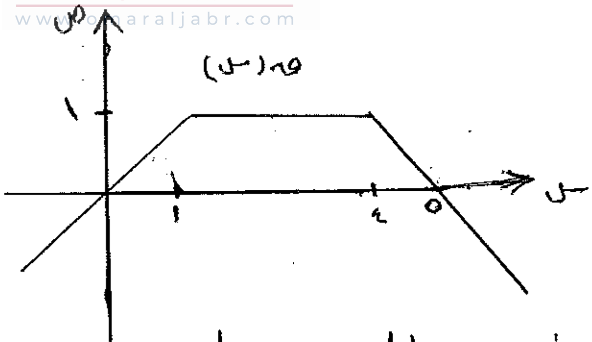


١) فترات التزايد لِ ق

٢) نقطة القيمة العظمى المحلية لِ ق

٣) مجالات تقعر ق .

الشكل المجاور يمثل منحنى ق(س) واجب



① جد قيم س الحرجة لـ ق(س)

② ق''(٥) ، ق''(١) ، ق''(٣)